Groupes de Thompson et propriétés de finitude (co)homologique

Guillaume Laget
Mémoire de DEA sous la direction de Vlad Sergiescu
Institut Fourier, Grenoble

23 septembre 1998

L'objet principal de ce mémoire est l'étude des groupes de Thompson, définis en 1965 par Richard Thompson pour construire des groupes de présentation finie pour lesquels le problème des mots est non résoluble. Ces groupes sont ensuite apparus dans d'autres domaines des mathématiques : théorie des groupes, théorie de l'homotopie, théorie de Teichmüller.

Après quelques préliminaires d'algèbre homologique et d'homologie des groupes, on va définir les groupes de Thompson F, T et G qui sont respectivement des groupes d'homéomorphismes de $[0, 1]$, S^1 et de l'ensemble de Cantor C, avec $F \subset T \subset G$, et on donnera leurs propriétés les plus élémentaires, et en particulier une description des éléments de ces groupes par des couples d'arbres binaires.

Ces diagrammes d'arbres permettront de définir une action de G sur un sous-ensemble des partitions de C, les partitions admissibles (de là on déduira que G est simple) puis sur des complexes simpliciaux X_n. De là on pourra déduire que G est de présentation finie, et donner certaines de ses propriétés homologiques.

Dans la dernière partie du mémoire on citera quelques problèmes où apparaissent les groupes de Thompson.

Je remercie Vlad Sergiescu pour m'avoir proposé ce sujet et pour tout le temps qu'il a bien voulu me consacrer lors de ce stage de DEA.

1 Homologie et cohomologie des groupes.

1.1 Quelques "rappels" d'algèbre homologique.

• Soit A un anneau. Un A-module P est projectif si étant donné un diagramme exact de A-modules

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "0"] & \\ M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "j"] & M'' \end{tikzcd}$$

, on peut trouver

$\psi : P \to M'$ tel que $i\psi = \phi$. Cela équivaut à l'exactitude du foncteur $\mathrm{Hom}_A(P, -)$.

Tout module libre est projectif.

• Si A est un anneau et M un A-module, une résolution de M sur A est une suite exacte de A-modules $\ldots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \xrightarrow{\varepsilon} 0$.

Si les F_i sont des modules libres, on parle de résolution libre ; tout module admet une résolution libre. De même, si les F_i sont des modules projectifs on parle de résolution projective.

• Si X est un ensemble, on note $\mathbb{Z}[X]$ (ou $\mathbb{Z}X$) le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les éléments de X : un élément de $\mathbb{Z}X$ s'écrit de façon unique $\sum_{x\in X} a(x)x$, $(a(x))_{x\in X}$ étant une famille presque nulle d'entiers.

Si on prend pour ensemble un groupe G, la multiplication s'étend par bilinéarité à $\mathbb{Z}G$, et donc $\mathbb{Z}G$ admet une structure d'anneau.

• Un $\mathbb{Z}G$-module (ou G-module) est un groupe abélien A muni d'un morphisme de $\mathbb{Z}G$ dans l'anneau des endomorphismes de A, ou ce qui revient au même un groupe abélien A muni d'une action de G sur A.

Exemple : si G agit sur un ensemble X, $\mathbb{Z}X$ est un G-module.

1.2 $\mathbb{Z}G$-résolutions et topologie.

• On voit $\mathbb{Z}$ comme un $\mathbb{Z}G$ module trivial, i.e l'action de G est donnée par $g.1 = 1$ pour tout $g \in G$.

Un G-complexe X est un CW-complexe avec une action de G qui permute les cellules. On a donc une action de G sur le complexe cellulaire $C_*(X)$, et l'application $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ qui à toute cellule σ associe 1 est une application de G-modules.

X est un G-complexe libre si l'action sur les cellules est libre ; alors $C_n(X)$ a une $\mathbb{Z}$-base librement permutée par G, donc $C_n(X)$ est un $\mathbb{Z}G$-module libre ayant un élément de base pour chaque G-orbite de cellules.

Si X est contractile, la suite $\ldots \to C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ (complexe cellulaire augmenté) est exacte, et donc :

Proposition 1.2.1 *Si X est un G-complexe libre et contractile, son complexe cellulaire augmenté est une résolution libre de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$.*

• Si Y est un CW-complexe connexe tel que $\pi_1 Y = G$ et le revêtement universel X de Y est contractile (ou ce qui revient au même, si pour tout $i \geq 2$, $H_i(X) = 0$, ou encore pour tout $i \geq 2$, $\pi_i(Y) = 0$), on dit que Y est un complexe d'Eilenberg Mac Lane de type $(G, 1)$, ou simplement un $K(G, 1)$-complexe.

Proposition 1.2.2 *Si Y est un $K(G, 1)$ alors le complexe cellulaire augmenté de son revêtement universel est une résolution libre de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$.*

<u>Exemples :</u> • si G est le groupe libre de base S, on obtient la résolution $0 \to \mathbb{Z}G^{(S)} \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$.

• si G est cyclique de cardinal n, de générateur t, et si $N = 1 + t + \ldots + t^{n-1}$, on a la résolution $\ldots \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$.

1.3 L'homologie d'un groupe.

Soit G un groupe et M un G-module. Le groupe des co-invariants de M est $M_G = M \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$, ou encore le quotient de M par le sous-groupe additif engendré par les $\{gm - m; g \in G, m \in M\}$.

Proposition 1.3.1 • *si $M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de G-modules, $M'_G \to M_G \to M''_G \to 0$ est une suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules.*

• *si F est un $\mathbb{Z}G$-module libre de base (e_i), F_G est un $\mathbb{Z}$-module libre de base $(\bar{e}_i)$.*

Proposition 1.3.2 *Si X est un G-complexe libre et $Y = X/G$ le complexe quotient, alors $C_*(Y) \simeq C_*(X)_G$.*

Définition .1 *Soit G un groupe et F une résolution projective de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$. Alors les groupes d'homologie de G sont les groupes $H_i(G) = H_i(F_G)$, pour $i \geq 0$.*

La définition ne dépend (à un isomorphisme près) pas du choix de la résolution projective F.

Exemples :

• Pour le groupe libre de base S, $H_i(F(S)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ \mathbb{Z}S = F(S)_{ab} & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases}$

• Pour le groupe cyclique de cardinal n, $H_i(\mathbb{Z}_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ \mathbb{Z}_n & i \text{ impair} \\ 0 & i \text{ pair}, i > 0 \end{cases}$

Si Y est un $K(G,1)$, $C_*(X)$ est une résolution libre de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$. Mais $C_*(X)_G \simeq C_*(Y)$, donc $H_*(G) \simeq H_*(Y)$.

Ainsi, l'homologie d'un groupe G est celle d'un $K(G,1)$ quelconque.

Exemples : on retrouve en prenant pour $K(G,1)$ un bouquet de cercles l'homologie d'un groupe libre ; en considérant le n-tore $S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$, qui est un $K(\mathbb{Z}^n, 1)$, on trouve $H_i(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^{C_n^i}$ pour tout $i \geq 0$.

1.4 Formule de Hopf et conséquences.

Un $K(G,1)$ étant connexe, $H_0(G) = \mathbb{Z}$ pour tout G.

D'autre part, si Y est un $K(G,1)$, $\pi_1 Y = G$, et donc $H_1(Y) = H_1(G) = G_{ab}$, l'abélianisé de G.

La formule de Hopf donne le H_2 de tout groupe G donné par générateurs et relations : si $G = F/R$ où F est libre et R un sous-groupe normal, alors

$$H_2(G) \simeq R \cap [F,F]/[F,R].$$

Parmi les conséquences on peut citer :

• Si $1 \to N \to G \to Q \to 1$ est une suite exacte de groupes, on a la suite exacte d'homologie $H_2 G \to H_2 Q \to (H_1 N)_Q \to H_1 G \to H_1 Q \to 0$, l'action de Q sur $N_{ab} = H_1 N$ étant induite par l'action de conjugaison de G sur N.

• Si G est fini, $H_2(G)$ aussi.

• Si G est de présentation finie, $H_2(G)$ est de type fini.

1.5 Homologie et cohomologie à coefficients.

On a défini dans ce qui précède le foncteur $- \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$ (que l'on peut aussi noter $- \otimes_G \mathbb{Z}$), s'appliquant à un complexe de G-modules.

Mais la même construction s'applique pour un G-module M quelconque : on obtient un foncteur $- \otimes_G M$; on définit alors l'homologie de G à coefficients dans M par $H_*(G, M) = H_*(F \otimes_G M)$, F étant une résolution projective de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$ (et le résultat ne dépend pas de la résolution projective choisie).

Bien entendu si on prend $M = \mathbb{Z}$, on retrouve l'homologie définie précédemment : $H_*(G, \mathbb{Z}) = H_*(G)$.

On définit enfin la cohomologie de G : si F est une résolution projective quelconque de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$, la cohomologie de G à coefficients dans M sera la cohomologie du complexe $Hom_G(F, M)$: $H^*(G, M) = H^*(Hom_G(F, M))$.

On se contente de citer ces définitions car dans l'exposé, on ne rencontrera que l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1.6 Questions de finitude.

1.6.1 Dimension cohomologique.

On a vu deux descriptions équivalentes de $H_*(G)$, par l'utilisation d'une résolution projective $(P_i)_{i \geq 0}$ ou d'un $K(G, 1)$-complexe ; cela conduit à définir deux conditions de finitude (co)homologique pour G : la dimension cohomologique et la dimension géométrique.

On appelle <u>dimension cohomologique</u> de G, notée $\mathrm{cd}(G)$ le plus petit entier n tel qu'il existe une résolution de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$ avec $P_i = 0$ pour $i > n$, et <u>dimension géométrique</u> de G, notée $\mathrm{gd}(G)$ la plus petite dimension d'un $K(G, 1)$-complexe (dans les deux cas, la dimension peut être infinie).

On peut, si $n = \max\{\mathrm{cd}(G), 3\}$, construire un $K(G, 1)$-complexe de dimension n. Ainsi, $\mathrm{cd}(G) \leq \mathrm{gd}(G)$, et on a égalité dès que $\mathrm{cd}(G) > 2$.

Plus précisément, ou bien $\mathrm{cd}(G) = \mathrm{gd}(G)$, ou bien $\mathrm{cd}(G) = 2$ et $\mathrm{gd}(G) = 3$. La conjecture d'Eilenberg-Ganéa dit que seul le premier cas est possible.

<u>Exemples :</u> • $\mathrm{cd}(G) = 0$ si et seulement si G est le groupe trivial.

• si G est libre non trivial, $\mathrm{cd}(G) = 1$.

• Si $G = \mathbb{Z}^n$, $Y = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ est un $K(G, 1)$-complexe de dimension n, donc $\mathrm{cd}(G) \leq n$, et $H_n(Y) = \mathbb{Z}$, donc $\mathrm{cd}(G) = n$.

• Si G est cyclique, $\mathrm{cd}(G) = +\infty$ car $H_{2i+1}(G) \neq 0$ pour tout i.

• Si H est un sous-groupe de G, $\mathrm{cd}(H) < \mathrm{cd}(G)$ (car une résolution sur $\mathbb{Z}G$ est aussi une résolution sur $\mathbb{Z}H$) et par conséquent si $\mathrm{cd}(G) < \infty$, G est sans torsion. En particulier tout groupe fini est de dimension cohomologique infinie.

1.6.2 Propriétés de finitude FP_n.

Une autre condition de finitude consiste à demander non pas que la résolution soit de longueur finie, mais que les (P_i) soient finiment engendrés.

On dit que G est de type FP_n s'il existe une résolution de type fini de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$, i.e une résolution (partielle) projective de longueur n, $P_n \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ avec les P_i finiment engendrés. Si on peut trouver une telle résolution qui soit de longueur infinie, G est de type FP_∞.

Proposition 1.6.1 *G est de type FP_∞ si et seulement si G est de type FP_n pour tout $n \geq 0$.*

Enfin, G est de type FP si $\mathbb{Z}$ admet une résolution de type fini et de longueur finie.

Proposition 1.6.2 *G est de type FP si et seulement si G est de type FP_∞ et de dimension cohomologique finie.*

On montre que la condition G de type FP_1 est équivalente à G de type fini.

Si G est de présentation finie, G est de type FP_2 ; en effet, on peut trouver un 2-complexe fini Y tel que $\pi_1 Y = G$, et alors le complexe cellulaire du revêtement universel de Y donne une résolution libre de longueur 2 de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$ de type fini.

Un résultat récent de Bestvina-Brady montre que la réciproque est fausse : il existe des groupes de type FP_2 qui ne sont pas de présentation finie. La démonstration consiste à associer à un complexe simplicial déterminé par son 1-squelette L un groupe H_L avec les propriétés H_L est de type FP_2 si et seulement si $H_1(L) = 0$, et H_L est de présentation finie si et seulement si L est simplement connexe.

Pour conclure, on peut par exemple prendre pour L une triangulation de la sphère de Poincaré, dont le π_1 est $\mathcal{A}_5$ donc non trivial, mais dont le H_1, étant l'abélianisé du groupe simple non abélien $\mathcal{A}_5$ est trivial.

2 Complexes simpliciaux.

2.1 Une famille de complexes simpliciaux contractiles.

On définit pour $r \geq 2$ un complexe simplicial K_r par ses sommets (a,b), $a,b \in \{1,\ldots,r\}$, $a \neq b$ et ses faces $\{(a_0,b_0),\ldots,(a_m,b_m)\}$ avec $\{a_i,b_i\} \cap \{a_j,b_j\} = \emptyset$ si $i \neq j$.

On veut prouver la propriété (P_k) : il existe $\mu(k)$ et $\nu(k)$ tels que si $r \geq \mu(k)$, le k-squelette $K_r^{(k)}$ est homotope à 0 dans K_r, par une homotopie dans laquelle chaque k-simplexe reste dans un sous-complexe d'au plus $\nu(k)$ sommets.

Si $k = 0$, on pose $\mu(k) = 5$. Alors deux sommets distincts (a,b) et (c,d) sont joints par une arête si $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset$, et par un chemin de deux arêtes sinon (le chemin $(a,b) \to (e,f) \to (c,a)$, si $a = d$, a,b,c,e,f étant des points distincts). Donc P_0 est vraie, avec $\mu(0) = 5$, $\nu(0) = 2$.

Supposons P_{k-1} vraie, et soit σ un k-simplexe. Alors $\partial\sigma$, réunion de $k+1$ $(k-1)$-simplexes est inclus dans un sous-complexe Σ' ayant au plus $(k+1)\nu(k-1)$ sommets. Donc si $r \geq \mu(k-1)$ et $r \geq 2(k+1)\nu(k-1)+2$, on peut trouver un sommet ν qui n'est pas dans Σ' et tel que Σ' (et donc σ) s'homotope sur ν. De plus cette homotopie reste dans le complexe engendré par Σ' et ν. Ainsi, P_k est vraie.

En concluant par récurrence, on voit que P_k est vraie pour tout $k \geq 0$, et en particulier que, k étant fixé, K_r est k-connexe pour tout r assez grand.

2.2 Complexes simpliciaux et ensembles partiellement ordonnés.

Un ensemble X muni d'une relation d'ordre $\leq$ est appelé ensemble partiellement ordonné (e.p.o). Un des intérêts de ces ensembles qui sera utilisé ici est que l'on dispose d'un moyen canonique de leur associer un complexe simplicial, noté $|X|$.

$|X|$ est défini par ses faces : on a une n-face pour toute suite croissante $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ d'éléments de X.

De plus, si X et Y sont des e.p.o et $f : X \to Y$ une application croissante, f définit une application simpliciale de $|X|$ dans $|Y|$, notée $|f|$: l'image de $\{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ par $|f|$ est la face $\{f(x_0) \leq f(x_1) \leq \ldots \leq f(x_n)\}$, et $|f|$ est linéaire sur chaque face.

Proposition 2.2.1 *Si $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ sont des applications croissantes, et si de plus $\forall x \in X, f(x) \geq g(x)$, alors les applications induites $|f|$ et $|g|$ sont homotopes.*

Démonstration:

Soit $F : \{0 < 1\} \times X \longrightarrow Y$ qui envoie $(0, x)$ sur $f(x)$ et $(1, x)$ sur $g(x)$. F est une application croissante d'e.p.o (pour l'ordre produit sur $\{0 < 1\} \times X$), donc induit $|F| : [0,1] \times |X| \to |Y|$, qui est une homotopie entre $|f|$ et $|g|$. ■

On en déduit un critère simple pour montrer que le complexe $|X|$ est contractile : il suffit de trouver $x_0 \in X$ et $f : X \to X$ croissante qui vérifie $\forall x, f(x) \geq x$ et $f(x) \geq x_0$. En effet, on aura alors $|f|$ homotope à $Id_{|X|}$ et à l'application c_{x_0} constante de valeur x_0. En particulier, $Id_{|X|} \sim c_{x_0}$, ce qui est équivalent à la contractibilité.

Cela s'applique en particulier au cas où X est minoré (ou majoré).

Un autre moyen qui sera utilisé (indépendant de la notion d'e.p.o) pour montrer qu'un complexe simplicial est contractile est de prouver qu'il est connexe, et que ses groupes d'homotopies π_k sont triviaux pour $k \geq 1$.

3 Les groupes de Thompson.

3.1 Le groupe F.

3.1.1 Définition.

Définition .2 *Soit F l'ensemble des homéomorphismes de $[0,1]$, dérivables sauf en un nombre fini de points de la forme $p/2^q$ (nombres dyadiques) et affines sur les intervalles de dérivabilité, avec pour pentes des puissances de 2.*

F est un sous-groupe de Homeo$([0,1])$, appelé premier groupe de Thompson.

Il est clair que les éléments de F sont des applications croissantes.

Exemples : les deux applications $A(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ x - 1/4, & 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ 2x - 1, & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$ et

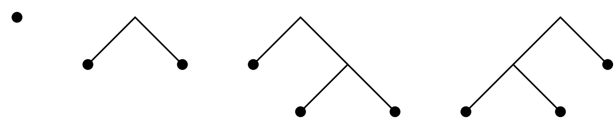
$B(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ x/2 + 1/4, & 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ x - 1/8, & 3/4 \leq x \leq 7/8 \\ 2x - 1, & 7/8 \leq x \leq 1 \end{cases}$ sont des éléments de F.

On définit encore des éléments X_n par $X_0 = A$ et $X_n = A^{-(n-1)} B A^{n-1}$ pour $n \leq 1$.

3.1.2 Groupe F et diagrammes d'arbres.

On va représenter les éléments de F par des couples d'arbres.

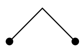
On remarque tout d'abord qu'il y a une bijection entre l'ensemble des arbres binaires finis et l'ensemble des partitions de $[0,1]$ en intervalles d'extrémités dyadiques. Par exemple, les arbres



représentent les partitions $\{[0,1]\}$, $\{[0,1/2];[1/2,1]\}$, $\{[0,1/2];[1/2,3/4];[3/4,1]\}$ et $\{[0,1/4];[1/4,1/2];[1/2,1]\}$.

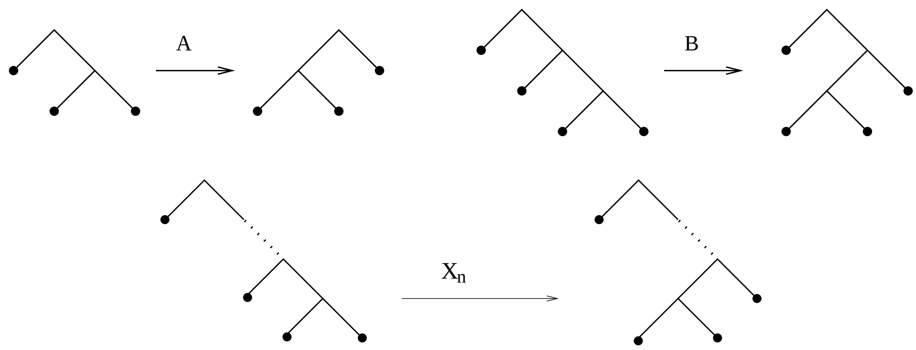
On considère ensuite les diagrammes d'arbres : ce sont les couples (R, S) où R et S sont des arbres ayant le même nombre de feuilles (i.e correspondant à des partitions de même cardinal).

A tout diagramme on peut associer un élément de $f \in F$, les feuilles du premier arbre correspondant aux intervalles de dérivabilité de f, et les feuilles du second à leurs images.

Pour f fixé dans F, on peut lui associer une infinité de diagrammes, mais ils sont tous construits à partir d'un diagramme réduit (où le nombre de feuilles est égal au nombre de points de non-dérivabilité de f plus un) en remplaçant successivement une feuille de R et son image dans S par des , ce qui revient à partager en deux un intervalle et son image par f.

On obtient donc une bijection entre F et l'ensemble des diagrammes réduits.

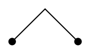
Ainsi, A, B et X_n sont représentés par les diagrammes :



On appelle exposant d'une feuille la longueur de la plus grande suite de coté gauche ne rencontrant pas le bord droit de l'arbre. On a alors la description suivante du lien entre F et diagrammes d'arbres :

Proposition 3.1.1 *Soient R et S deux arbres à $n+1$ feuilles d'exposants respectifs $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_n$. Alors la fonction $f \in F$ de diagramme (R, S) est $X_0^{b_0} X_1^{b_1} \dots X_n^{b_n} X_n^{-a_n} \dots X_1^{-a_1} X_0^{-a_0}$.*

De plus, le diagramme est réduit si et seulement si :

- *les deux dernières feuilles de R forment un* *, ce n'est pas le cas de celles de S*
- *pour tout $k < n$, $a_k > 0, b_k > 0 \implies a_{k+1} > 0$ ou $b_{k+1} > 0$.*

3.1.3 Présentations de F

Les outils précédents permettent assez facilement d'arriver à la description de F :

Proposition 3.1.2 *F est engendré par A et B, et admet les deux présentations :*
$< A, B | [AB^{-1}, A^{-1}BA], [AB^{-1}, A^{-2}BA^2] >$
et
$< X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots | X_k^{-1} X_n X_k = X_{n+1}$ *pour* $k < n >$.

En particulier, F est un groupe de présentation finie.

L'application $F \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ qui à f associe (a, b) tels que 2^a et 2^b sont les pentes de f en 0 et 1 est surjective et son noyau est $[F, F]$. Par conséquent, $F/[F, F] \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, et en particulier F n'est pas un groupe simple. Par contre, on peut montrer que $[F, F]$ est simple.

3.2 Le groupe T.

3.2.1 Définition.

On identifie S^1 au quotient $[0, 1]/\{0 = 1\}$. On peut alors définir un analogue du groupe F pour S^1 :

Définition .3 *Soit T l'ensemble des homéomorphismes de S^1, dérivables sauf en un nombre fini de points de la forme $p/2^q$ et affines sur les intervalles de dérivabilité, avec pour pentes des puissances de 2.*

T est un sous-groupe de Homeo(S^1) appelé deuxième groupe de Thompson.

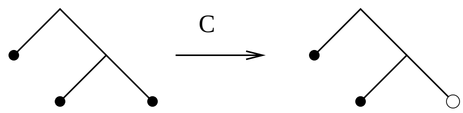
En particulier, on voit que F est un sous-groupe de T.

L'application $C(x) = \begin{cases} x/2 + 3/4 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ x - 1/4 & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$ est un élément de T qui n'est pas dans F.

3.2.2 Groupe T et diagrammes d'arbres.

On peut de même associer aux éléments de T des diagrammes d'arbres (R, S), mais on doit de plus préciser sur S l'image de la première feuille de R (dans le cas d'éléments de F il s'agit de la première).

Exemple : C envoie le premier intervalle de R, $[0, 1/2]$, sur le troisième de S, $[3/4, 1]$.



3.2.3 Présentation de T.

Proposition 3.2.1 *T est engendré par A, B et C et admet la présentation :*

$$< A, B, C \;\; | \;\; [AB^{-1}, A^{-1}BA], [AB^{-1}, A^{-2}BA^2], BA^{-1}CBC^{-1}, A^{-1}CBA^{-1}BAB^{-2}C^{-1}A^2B^{-1}, CA(A^{-1}CB)^{-2}, C^3 > .$$

L'étude de cette présentation permet de montrer que T est un groupe simple.

3.2.4 Structure projective intégrale par morceaux de T.

Le groupe T est isomorphe au groupe $PPSL_2(\mathbb{Z})$ des homéomorphismes de $\mathbb{R} \cup \infty$ préservant l'orientation, qui sont $PSL_2(\mathbb{Z})$ par morceaux, les intervalles en question étant d'extrémités rationnelles (i.e pour chaque élément f du groupe on peut trouver une décomposition en intervalles d'extrémités rationnelles de $\mathbb{R} \cup \infty$ telle que sur chacun de ces intervalles f agit comme un élément de $PSL_2(\mathbb{Z})$). La démonstration de cet isomorphisme repose sur l'explicitation d'une bijection entre l'ensemble des nombres dyadiques et $\mathbb{Q} \cup \infty$.

Un autre résultat (plus profond) démontré par M.Imbert dans [9] est que le groupe T est isomorphe à un groupe défini par R.Penner, le groupe universel de Ptolémée, important dans la théorie des espaces universels de Teichmüller.

3.3 Partitions standard.

Soit C l'ensemble de Cantor, qui est l'ensemble des réels de $[0, 1]$ s'écrivant en base 3 avec des 0 et des 2.

On a une opération appelée expansion simple sur le Cantor : $C = \alpha_0 C \uplus \alpha_1 C$ où $\alpha_0 C = \{x \in C \,|\, x = 0,0\ldots\}$ et $\alpha_1 C = \{x \in C \,|\, x = 0,2\ldots\}$. On obtient une partition de C en deux sous-ensembles canoniquement homéomorphes à C ; par conséquent on peut recommencer cette opération sur les ensembles obtenus. On appelle c_0 et c_1 les homéomorphismes canoniques de C dans $\alpha_0 C$ et $\alpha_1 C$.

Une telle composée d'expansions simples est appelée une expansion.

Définition .4 *Une partition standard est une partition obtenue par expansion de $\{C\}$. On appelle rang d'une partition le nombre de ses éléments.*

Si Y est une expansion de X, on note $X \leq Y$. $\leq$ est une relation d'ordre (partiel) sur l'ensemble des partitions.

Il y a une bijection canonique entre l'ensemble des partitions standard et l'ensemble des arbres binaires finis de racine C, les feuilles de l'arbre correspondant aux éléments de la partition.

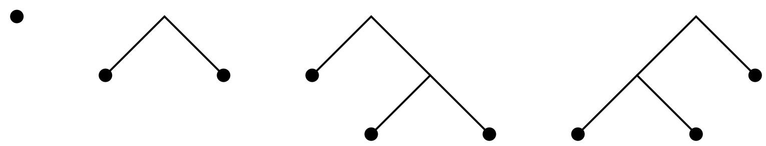
Lemme 3.3.1 *Si X et Y sont des partitions standard, il existe une plus petite partition standard Z qui soit une expansion de X et Y. On note $Z = X \wedge Y$.*

Démonstration:
Il suffit, en représentant les partitions standard sous forme d'arbres, de considérer la partition associée à la réunion (superposition) des arbres X et Y. ■

Exemple : $U = \{C\}$, $V = \{\alpha_0 C, \alpha_1 C\}$, $W = \{\alpha_0 C, \alpha_0\alpha_1 C, \alpha_1\alpha_1 C\}$ et $T = \{\alpha_0\alpha_0 C, \alpha_1\alpha_0 C, \alpha_1 C\}$ sont des partitions standard de rangs respectifs 1, 2, 3 et 3.

Alors on a $U < V < W$, $U < V < T$, mais W et T ne sont pas comparables.

Les arbres correspondants sont :



Lemme 3.3.2 *Si X et Y sont des partitions standard avec $rg(X) \geq rg(Y)$ et si $X \neq Y$, il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que x soit un des éléments d'une expansion de y (et $x \neq y$). On dit alors que x est un descendant de y, ou que y est un ascendant de x.*

Démonstration:
Là encore on représente les partitions sous forme d'arbres, et on fait une récurrence sur le rang de X.

- Si $\text{rg}(X) = 1$, $X = Y$, donc ce cas est à exclure.
- Si $\text{rg}(X) = 2$, on a $Y = \{C\}$, et on peut prendre $y = C$ et $x = C_0$ (ou $x = C_1$).

– On suppose le résultat vrai pour $\mathrm{rg}(X) \leq d$, $d \geq 2$. Soit X de rang $d+1$.
  On considère les arbres X_0, Y_0, X_1 et Y_1 qui sont les parties gauche et droite de X et Y.
  Si $\mathrm{rg}(X) > \mathrm{rg}(Y)$, il existe i tel que $\mathrm{rg}(X) > \mathrm{rg}(X_i) > \mathrm{rg}(Y_i)$.
  Si X et Y sont de même rang, ou bien $\mathrm{rg}(X_i) = \mathrm{rg}(Y_i)$ pour $i = 1, 2$, et alors on a i tel que $X_i \neq Y_i$, ou bien on a i tel que $\mathrm{rg}(X_i) > \mathrm{rg}(Y_i)$.
  Dans les 3 cas, on est ramené à un rang inférieur ou égal à d en prenant $X = X_i$ et $Y = Y_i$.

On conclut donc par récurrence sur $d = \mathrm{rg}(X)$. ■

3.4 Le groupe G.

Si l'on se donne $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ et $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ deux partitions standard de même rang et si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on appelle $f : C \longrightarrow C$ l'homéomorphisme de C telle que $f_{|X_i}$ est la bijection canonique de X_i dans $Y_{\sigma(i)}$.

Une telle partition X est dite adaptée à f ou f-adaptée. Dans ce cas, toute expansion de X l'est aussi. Pour une partition f-adaptée X, on note $Y = f(X)$ son image, qui est adaptée à f^{-1}.

Définition .5 *L'ensemble des applications ainsi définies forment un sous-groupe de Homeo(C), appelé groupe de Thompson G.*

Démonstration:
Cet ensemble contient Id_C, et pour composer f et g il suffit, si X est adaptée à f et Z à g de remarquer que $Y = f(X) \wedge Z$ est adaptée à g et f^{-1}, et $T = f^{-1}(Y)$ à f. On peut alors définir $g \circ f$: f est définie de T dans Y qui est g-adaptée. ■

Si X est f-adaptée et si $X = f(X)$, alors f peut être vue comme une permutation de X. En particulier, f est d'ordre fini.

Si X et Y sont adaptées à $f \in G$, alors $X \wedge Y$ aussi, et $f(X \wedge Y) = f(X) \wedge f(Y)$.

Tout ce qui précède montre que G peut lui aussi être représenté par des diagrammes d'arbres ; la seule différence avec F et T est que cette fois il faut préciser l'image de chaque feuille. On représente donc un élément de G par un couple d'arbre ayant le même nombre n de feuilles, et par une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$.

F et T peuvent alors être vus comme des sous-groupes de G, caractérisés par le fait que $\sigma = Id$ pour les éléments de F et σ est une permutation cyclique pour les éléments de T.

3.5 Partitions admissibles.

3.5.1 Définition.

Dans la suite, une partition de C de rang n sera la donnée de $X_1, \ldots, X_n$ sous-ensembles de C deux à deux disjoints de réunion C, et $h_i : C \to X_i$ des homéomorphismes (en particulier, les partitions standard sont des partitions en ce sens).

Sur l'ensemble des partitions on prolonge la notion d'expansion simple : cela consiste à remplacer X_i par $h_i\alpha_0 C$ et $h_i\alpha_1 C$, et h_i par $h_i \circ c_0$ et $h_i \circ c_1$. De même une composée d'expansions simples est appelée expansion.

Mais sur l'ensemble des partitions cette opération a un inverse : une contraction simple consiste à remplacer X_i et X_j par $Z = X_i \sqcup X_j$ avec l'homéomorphisme $h : C \to Z$ qui envoie $\alpha_0 C$ sur X_i par $h_i \circ c_0^{-1}$ et $\alpha_1 C$ sur X_j par $h_j \circ c_1^{-1}$. Une contraction est une composée de contractions simples.

Si X et Y sont des partitions, on note $X \leq Y$ si Y est une expansion de X. Cela munit l'ensemble des partitions d'une structure d'ensemble partiellement ordonné.

Définition .6 *On appelle partition admissible de C toute contraction de partition standard, et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions admissibles.*

Il est clair (grâce au lemme 3.3.1) que deux partitions admissibles ont une expansion commune. Enfin, par restriction de $\leq$, $\mathcal{P}$ admet une structure d'e.p.o.

Dans la suite, pour alléger les notations, pour décrire une partition admissible on se contentera de citer les sous-ensembles qui la composent, sans les homéomorphismes correspondant.

3.5.2 Action de G sur $\mathcal{P}$.

Soit $g \in \mathrm{Homeo}(C)$ et $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ une partition, avec les homéomorphismes h_i. Alors on peut définir une partition $g(X) = \{g(X_1), \ldots, g(X_n)\}$ en prenant les $g \circ h_i$ comme homéomorphismes. Cela définit une action de $\mathrm{Homeo}(C)$ sur l'ensemble des partitions, donc par restriction une action de G.

De plus, cette action est compatible avec la structure d'e.p.o : si $X \leq Y$ et $g \in \mathrm{Homeo}(C)$, $g(X) \leq g(Y)$.

Proposition 3.5.1 *Une partition X est admissible si et seulement si elle est dans l'orbite pour G d'une partition standard.*

Démonstration:

– Soit $g \in G$ et Y une partition standard.
Fixons X g-adaptée. Alors $X \wedge Y$ est aussi g-adaptée, et donc $g(X \wedge Y)$ est une partition standard. Mais on a $g(Y) \leq g(X \wedge Y)$, donc $g(Y)$ est une contraction d'une partition standard : $g(Y) \in \mathcal{P}$.
– Soit X admissible.
Il existe Y partition standard telle que $X \leq Y$. Soit alors Z une partition standard de même rang que X. On peut (en identifiant X_i et Z_i) pratiquer sur Z la même expansion que pour passer de X à Y. On obtient alors une partition standard Z', et on peut trouver $g \in G$, $g : Z' \to Y$. Mais alors, $g(Z) = X$, donc X est dans la G-orbite de Z qui est une partition standard.

On a donc montré que la G-orbite d'une partition standard est incluse dans $\mathcal{P}$, et que si $X \in \mathcal{P}$, X est dans la G-orbite d'une partition standard. ■

Ainsi, $\mathcal{P}$ est stable sous l'action de G : on a défini une action de G sur $\mathcal{P}$.

De plus, G agit transitivement sur l'ensemble des partitions admissibles de même rang : en effet, si X et Y sont deux partitions admissibles de même rang, on peut écrire grâce à la proposition $X = g.X'$ et $Y = h.Y'$ pour X', Y' des partitions standard de même rang et $g, h \in G$. Mais on peut définir $\theta \in G$ par $\theta(X_i^{'}) = Y_i^{'}$, et on a alors $Y = h.Y' = h.\theta.X' = h.\theta.g^{-1}.X = (h\theta g^{-1}).X$, d'où le résultat.

Enfin, le stabilisateur de $X \in \mathcal{P}$ est isomorphe à $\mathcal{S}_{\mathrm{rg}(X)}$: si $g(X) = X$, l'action de g se limite à une permutation des X_i.

3.5.3 Complexe associé à la structure d'e.p.o.

$\mathcal{P}$ est un e.p.o : on a vu dans la partie **2.2** comment lui associer un complexe simplicial $|\mathcal{P}|$.

Proposition 3.5.2 *$|\mathcal{P}|$ est un G-complexe contractile (de dimension infinie) dont les stabilisateurs des faces sont des groupes finis.*

Démonstration:
Il est clair que $|\mathcal{P}|$ est un G-complexe de dimension infinie. Le fait que les stabilisateurs des faces sont finis vient de ce que $\mathrm{Stab}(X)$ est fini pour tout $X \in \mathcal{P}$.

Reste à montrer que $|\mathcal{P}|$ est contractile.

Tout d'abord il est connexe : si x, $y \in |\mathcal{P}|$, x et y sont des éléments de deux faces $X = \{X_0 < X_1 < \ldots < X_n\}$ et $Y = \{Y_0 < Y_1 < \ldots < Y_n\}$. On peut trouver $Z \in \mathcal{P}$ tel que $X_n < Z$ et $Y_n < Z$. Par conséquent on obtient deux faces X' et Y' qui ont un point commun Z, avec $x \in X'$ et $y \in Y'$. Cela prouve que $|\mathcal{P}|$ est connexe par arcs.

Soit ensuite $k \geq 1$, et $f : S^k \to |\mathcal{P}|$. Les intérieurs des faces de $|\mathcal{P}|$ forment un recouvrement ouvert de $|\mathcal{P}|$, et $f(S^k)$ est compact. Par conséquent, on peut trouver des faces $F_1, \ldots, F_n$ telles que $f(S^k) \subset \bigcup_i F_i$.

Si $F_i = \{F_0^i < F_1^i < \ldots < F_n^i\}$, on peut trouver $M \in \mathcal{P}$ tel que $F_n^i < M$ pour tout i. Alors on appelle $F_i^{'}$ la face $\{F_0^i < F_1^i < \ldots < F_n^i < M\}$. Pour $y \in F_i$ et $t \in [0, 1]$,

$(1-t)y + tM$ est bien défini comme élément de $F_i^{'}$. L'application $F : [0,1] \times S^k \rightarrow |\mathcal{P}|$ qui à (t,x) associe $(1-t)f(x) + tM$ est bien définie, et c'est une homotopie entre f et l'application constante de valeur M.

$|\mathcal{P}|$ étant connexe, cela prouve que $\pi_k(|\mathcal{P}|)$ est trivial, d'où le résultat. $\blacksquare$

4 Simplicité de G.

La démonstration se fait en trois étapes : on commence par prouver l'existence dans tout sous-groupe distingué de G non trivial d'un élément non trivial d'ordre fini. On en déduit que ce sous-groupe contient tous les éléments d'ordre fini. Enfin on montre que G est engendré par les éléments d'ordre fini. Le résultat est alors évident : si $N \triangleleft G$, $N \neq 1$, N contient tous les éléments d'ordre fini. Ainsi, $G \subset N$, donc $N = G$. Les sous-groupes distingués de G sont donc 1 et G.

Lemme 4.0.1 *Si $N \triangleleft G$, $N \neq 1$, N contient un élément d'ordre fini non trivial.*

Démonstration:
Soit $\theta \in N$, $\theta \neq 1$, et X θ-adaptée. On note $Y = f(X)$.
Si $X = Y$, θ est une permutation de X, donc θ est d'ordre fini.
Sinon, on peut trouver, X et Y étant distincts et de même rang, $y_0 \in Y$ qui soit ascendant de $x \in X$, d'après le lemme 3.3.2.
X contient alors une expansion de $\{\alpha_0 y_0, \alpha_1 y_0\}$. Par conséquent, quitte à changer de x on peut supposer que $\theta(x) \neq y_0$. Soit $y = \theta(x)$.
On définit ϕ par $\phi(\alpha_0 y) = \alpha_1 y$, $\phi(\alpha_1 y) = \alpha_0 y$ et $\phi(y') = y'$ si $y' \in Y \setminus \{\alpha_0 y_0, \alpha_1 y_0\}$. Alors ϕ est un élément d'ordre 2 de G. De plus, $\phi(y_0) = y_0$ donc $\phi(\alpha_i x) = \alpha_i x$ pour $i = 0, 1$.
Soit alors $\psi = \phi^{-1} \circ \theta^{-1} \circ \phi \circ \theta$; $\psi \in N$. Si $x' \in X$ et $x' \neq x$, $\psi(x') = (\phi^{-1} \circ \theta^{-1} \circ \phi)(y')$ où $y' \cap y = \emptyset$, donc $\psi(x') = \phi^{-1}(x')$. De même on calcule $\psi(\alpha_0 x) = \alpha_1 x$ et $\psi(\alpha_0 x) = \alpha_1 x$.
ψ est donc un élément d'ordre 2 de N. ■

Lemme 4.0.2 *Si $N \triangleleft G$, $N \neq 1$, N contient tous les éléments d'ordre fini de G.*

Démonstration:
Soit $\phi \in G$ d'ordre fini n, et Z_0 ϕ-adaptée. On construit $Z_1 = \phi^{-1}(\phi(Z_0) \wedge Z_0)$: Z_1 et $\phi(Z_1)$ sont adaptées à ϕ.
De même on construit de proche en proche $Z_2 = \phi^{-2}(\phi^2(Z_1) \wedge Z_1), \ldots, Z_n$, pour obtenir Z_n tel que $Z_n, \phi(Z_n), \ldots, \phi^n(Z_n) = Z_n$ sont ϕ-adaptées.
Soit alors $Z = Z_n \wedge \phi(Z_n) \wedge \ldots \wedge \phi^{n-1}(Z_n)$: Z est ϕ-adaptée à ϕ et $\phi(Z) = \phi(Z_n \wedge \phi(Z_n) \wedge \ldots \wedge \phi^{n-1}(Z_n)) = \phi(Z_n) \wedge \phi^2(Z_n) \wedge \ldots \wedge \phi^n(Z_n) = Z$; par conséquent, ϕ est d'ordre fini.
Maintenant considérons $Z^* = \{\alpha_0 z, \alpha_1 z | z \in Z\}$; Z^* est adaptée à ϕ, et ϕ est une permutation paire de Z^*.
On a donc prouvé : quel que soit $\phi \in G$ d'ordre fini, il existe Z partition standard telle que $\phi \in \mathcal{A}_Z$. De plus, en itérant le procédé, on voit que l'on peut supposer Z de rang aussi grand que l'on veut (puisque passer de Z à Z^* multiplie le rang par 2).

Soit $\theta_1 \in N$ d'ordre fini, $\theta_1 \neq 1$, et Z de rang au moins 5, tel que $\theta_1 \in \mathcal{A}_Z$.

On considère alors le sous-groupe distingué H de $\mathcal{A}_Z$ engendré par θ_1 (H est le sous-groupe engendré par les $x\theta_1 x^{-1}$, $x \in \mathcal{A}_Z$). Comme $\theta_1 \neq 1$, $H \neq \{1\}$ et, $\mathcal{A}_Z$ étant simple, $H = \mathcal{A}_Z$.

H est inclus dans N car $N \triangleleft G$, et $\mathcal{A}_Z \subset G$; donc finalement, $\mathcal{A}_Z \subset N$.

On peut alors trouver $\theta_2 \in N \setminus \{1\}$ admettant un point fixe $z \in Z$. Soit $Z' = Z \cup \{\alpha_0 z, \alpha_1 z\} \setminus \{z\}$. On a $\theta_2 \in \mathcal{A}_{Z'}$, donc de même $\mathcal{A}_{Z'} \subset N$, et $\mathrm{rg}(Z') = \mathrm{rg}(Z) + 1$.

En procédant par récurrence on a donc : $(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\exists Z, \mathrm{rg}(Z) = n)(\mathcal{A}_Z \subset N)$.

Comme pour Y, Z de même rang on peut trouver $\phi \in G$ tel que Y est ϕ-adaptée et $Z = \phi(Y)$, on a $\phi^{-1}\mathcal{A}_Z\phi \subset N$ (car N est distingué dans G), donc $\mathcal{A}_Y \subset N$.

Finalement, N contient les groupes alternés de toutes les partitions de rang assez grand, donc tous les éléments d'ordre fini. ■

Lemme 4.0.3 *G est engendré par les éléments d'ordre fini.*

Démonstration:

On dit que $\theta \in G$ est de rang d si il existe Y θ-adaptée de rang d. On va montrer par récurrence sur d que tout élément de G est engendré par des éléments d'ordre fini.

Si θ est de longueur 1, θ est d'ordre 1.

Si θ est de longueur 2, θ est d'ordre 1 ou 2 car θ est l'identité ou la transposition $(\alpha_0 C, \alpha_1 C)$.

Si θ est de longueur d, avec $d \geq 3$: soit Y θ-adaptée de rang d, et $Z = \theta(Y)$. On peut écrire $Y = \{\alpha_0 u, \alpha_1 u, w_1, \ldots, w_k\}$ et $Z = \{\alpha_0 v, \alpha_1 v, t_1, \ldots, t_k\}$. Il existe x, y dans Y tels que $\theta(x) = \alpha_0 v$, $\theta(y) = \alpha_1 v$, et une permutation ϕ de Y telle que $\phi(\alpha_0 u) = x$, $\phi(\alpha_1 u) = y$. Alors ϕ est d'ordre fini, $\theta \circ \phi$ est de longueur $d - 1$, donc engendré par des éléments d'ordre fini. Ainsi, $\theta = (\theta \circ \phi) \circ \phi^{-1}$ est engendré par des éléments d'ordre fini. ■

5 Un G-complexe.

5.1 Le complexe $\mathcal{S}$.

Sur $\mathcal{P}$ on définit une nouvelle relation : Y est une expansion élémentaire de X s'il existe un sous-ensemble $X' = \{X_1, \ldots, X_p\}$ de X tel que $Y = X \setminus X' \cup \{\alpha_0 X_1, \alpha_1 X_1, \ldots, \alpha_0 X_p, \alpha_1 X_p\}$. On note alors $X \preceq Y$; cela implique en particulier $X \leq Y$, mais $\preceq$ n'est pas une relation d'ordre, car elle n'est pas transitive.

Un simplexe $\{X_0 < X_1 < \ldots < X_n\}$ de $|\mathcal{P}|$ est dit élémentaire si $X_0 \preceq X_n$, ce qui implique $X_i \preceq X_j$ pour tout $i \leq j$. Par conséquent, les faces d'un simplexe élémentaire sont des simplexes élémentaires, et ceux-ci forment un sous-complexe $\mathcal{S}$ de $|\mathcal{P}|$.

On note (X, Y) l'ensemble $\{Z \in \mathcal{P} \mid X < Z < Y\}$, et de même on définit les intervalles fermés et semi-fermés $[X, Y)$, $(X, Y]$ et $[X, Y]$.

Une propriété importante est que si Y n'est pas une expansion élémentaire de X, $|(X, Y)|$ est contractile. En effet, soit Z une expansion de X, et $f(Z)$ le plus grand élément de $[X, Z]$ tel que $X \preceq f(Z)$ ($f(Z)$ est la réunion des éléments de X présents dans Z et de l'expansion simple des autres). On a $X < f(Z) < Z$. De plus, l'application f est croissante, et en particulier, $f(Z) < f(Y)$ pour tout Z, donc on peut appliquer le résultat du **2.2** pour conclure.

Le fait que $|[X, Y)|$, $|(X, Y]|$ et $|[X, Y]|$ sont contractiles est immédiat car ces ensembles sont majorés ou minorés.

Proposition 5.1.1 *$\mathcal{S}$ est contractile.*

Démonstration:
On montre que $\mathcal{S}$ est contractile en montrant que l'on obtient $|\mathcal{P}|$, qui est contractile, par des adjonctions de $|[X, Y]|$ où Y est une expansion non-élémentaire de X qui ne change pas le type d'homotopie. Pour cela on procède par récurrence sur $\mathrm{rang}(Y) - \mathrm{rang}(X)$. Avant l'adjonction, la partie de $|[X, Y]|$ présente est $|[X, Y)| \cup |(X, Y]|$, qui est la suspension de $|(X, Y)|$ et est donc contractile. $|[X, Y]|$ étant aussi contractile, l'adjonction ne change pas le type d'homotopie, d'où le résultat. ■

On montre de même que le sous-complexe de $\mathcal{S}$ formé des sommets de rang au moins p est contractile pour tout $p \geq 1$.

5.2 Le théorème principal.

On considère les sous-complexes $\mathcal{S}_{p,q}$ de $\mathcal{S}$ dont les sommets X vérifient $p \leq \mathrm{rg}(X) \leq q$.

Si on fixe une partition admissible Y de rang $q+1$, soit $\mathcal{L}(Y)$ le sous-complexe de $\mathcal{S}_{p,q}$ dont les sommets sont les $X \in \mathcal{P}$ tels que $X \preceq Y$ (les faces étant les suites $\{X_0, \dots, X_m\}$ de tels X). Alors $\mathcal{S}_{p,q+1}$ est obtenu en recollant un cône au dessus de $\mathcal{L}(Y)$, pour tous les Y de rang $q+1$.

On peut décrire $\mathcal{L}(Y)$ par les ensembles $P \in Y \times Y$ vérifiant
(1) $(a,b) \in P$ implique $a \neq b$
(2) si $(a,b),(c,d) \in P$ sont différents, alors $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset$
(3) $\operatorname{card}(P) \leq q+1-p$
En effet, chaque P correspond à un sommet (les couples (a,b) représentant les éléments contractés lors du passage de Y à X), et une chaîne $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_m$ correspond à une face $X_m \subset \dots \subset X_0$.

On reconnaît alors $\mathcal{L}(Y)$ comme la subdivision barycentrique du $(q-p)$-squelette de K_{q+1} (défini au 2.1). En effet chaque P définit une face de K_{q+1} (par (1) et (2)) de dimension inférieure ou égale à $q-p$ (par (3)), et à chaque ensemble P on associe un sommet de $\mathcal{L}(Y)$, les inclusions de faces $P_0 \subset \dots \subset P_m$ correspondant aux simplexes de $\mathcal{L}(Y)$.

En particulier, si K_{q+1} est $(n-1)$-connexe, et si $q-p > n$, $\mathcal{L}(Y)$ l'est aussi. Ainsi, il existe r_0 tel que si $q \geq r_0$ et $q \geq p+n$, $\mathcal{L}(Y)$ est $(n-1)$-connexe. Mais alors le fait de rajouter un cône au dessus de $\mathcal{L}(Y)$ ne change par les groupes d'homotopies π_i pour $i < n$, donc finalement : si $p_0 = r_0 - n$, $p \geq p_0$ et $q \geq p+n$, on a pour $i < n$:

$$\pi_i(\mathcal{S}_{p,q}) \simeq \pi_i(\mathcal{S}_{p,q+1}).$$

Comme la réunion de la famille $\mathcal{S}_{p,q} \subset \mathcal{S}_{p,q+1} \subset \dots$ est le sous-complexe de $\mathcal{S}$ formé des partitions de rang au moins p, qui est contractile, ce qui précède prouve que si $p \geq p_0$, $\mathcal{S}_{p,p+n}$ est $(n-1)$-connexe. On note $X_n = \mathcal{S}_{p_0,p_0+n}$.

G agit sur $\mathcal{S}_{p,p+n}$ par restriction de l'action sur $\mathcal{S}$. On va montrer que cette action admet un n-simplexe comme domaine fondamental. Si $\{Y_0 < Y_1 < \dots < Y_m\}$ est un simplexe, on peut lui associer la suite $\{\operatorname{rg}(Y_0) < \operatorname{rg}(Y_1) < \dots < \operatorname{rg}(Y_m)\}$. Alors deux simplexes sont G-équivalents si et seulement si les suites associées sont les mêmes, car G agit transitivement sur l'ensemble des partitions admissibles de cardinal fixé.

Par conséquent, un n-simplexe ayant exactement une face pour chaque telle suite, le résultat en découle.

On a ainsi prouvé :

Théorème 5.2.1 *Il existe un complexe simplicial X_n de dimension n, $(n-1)$-connexe, sur lequel G agit avec un n-simplexe pour domaine fondamental. De plus, les stabilisateurs des faces sont des groupes finis.*

6 Applications aux questions de finitude.

6.1 Propriétés de finitude de G.

Le théorème 5.2.1, qui est le théorème principal de cet exposé, va nous permettre de montrer que G est de présentation finie et de type FP_∞.

C'est une conséquence immédiate des résultats suivants ; la démonstration du premier repose sur les résultats de Serre sur la structure des groupes agissant sur un arbre, le deuxième résultat repose sur la notion de suite spectrale. Ces deux propositions sont admises.

Proposition 6.1.1 *Si un groupe G agit sur un CW-complexe X simplement connexe avec les stabilisateurs des sommets de présentation finie, les stabilisateurs des arêtes de type fini et si X a un 2-squelette fini modulo G, alors G est de présentation finie.*

et

Proposition 6.1.2 *Si un groupe G agit sur un CW-complexe X avec les trois conditions*

(1) X est homologiquement $(n-1)$-connexe, i.e $\tilde{H}_i(X) = 0$ si $i < n$.

(2) Pour $p \leq n$, le stabilisateur d'une p-cellule est de type FP_{n-p}.

(3) X a un n-squelette fini modulo G.

Alors G est de type FP_n.

Ainsi, si on prend $n = 2$, G agit sur X_2 de dimension 2, simplement connexe, avec un 2-simplexe comme domaine fondamental, donc le 2-squelette est fini modulo G. Enfin, les stabilisateurs des arêtes et des sommets étant finis sont a fortiori de type fini ; on en déduit donc que G est de présentation finie.

De même G agit sur X_n qui est homologiquement $(n-1)$-connexe, le stabilisateur d'une p-cellule est fini donc de type FP_{n-p} et le squelette est fini modulo G, donc G est de type FP_n, et ce pour tout n.

On a ainsi montré que G est de type FP_∞ et de présentation finie.

Remarques et applications :

• On a déjà vu que F et T sont de présentation finie, en en trouvant une présentation explicite. Si cela reste possible pour G, la présentation en question a 4 générateurs et 14 relations, et la démonstration est très calculatoire. La méthode indirecte présentée ici a donc son intérêt.

• On peut prouver que F et T sont de type FP_∞ par une méthode analogue.

• Le théorème permet aussi de prouver que G est $\mathbb{Q}$-acyclique, i.e que $H_i(G,\mathbb{Q}) = 0$ pour tout $i > 0$.

7 Quelques compléments.

On va citer, le plus souvent sans démonstration, quelques problèmes dans lesquels apparaissent les groupes de Thompson.

7.1 Groupes moyennables.

Un groupe G est dit moyennable s'il existe une fonction $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ telle que $\mu(gA) = \mu(A)$ pour $g \in G$ et $A \subset G$, $\mu(G) = 1$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si A et B sont disjoints.

Un groupe fini est moyennable ; par contre, le groupe libre à deux générateurs $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ ne l'est pas. De plus, si $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ se plonge dans G, G n'est pas moyennable.

La réciproque est fausse : il existe un contre-exemple G d'Olshanski (de type fini), ne contenant pas $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ et non moyennable.

Mais on ne sait pas démontrer de réciproque pour G de présentation finie ; une piste pour prouver ce résultat serait d'utiliser le groupe F, car on sait que $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ ne se plonge pas dans F (F ne contient aucun sous-groupe libre non abélien).

7.2 Idempotents.

On a vu que le groupe F admet la présentation :
$< X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots | X_k^{-1} X_n X_k = X_{n+1}$ pour $k < n >$.

Par conséquent on peut définir une application $\phi : F \to F$ par $\phi(x_n) = x_{n+1}$ qui vérifie $\phi^2(g) = x_0^{-1}\phi(g)x_0$ pour tout $g \in F$. On dit que ϕ est idempotente à conjugaison près.

Mais le groupe F est universel pour cette propriété : si on a un groupe K avec $k_0 \in K$ et $\psi : K \to K$ telle que $\psi^2 = k_0^{-1}\psi k_0$, il existe une unique application $f : F \to K$ telle que $f(x_0) = k_0$ et $f\phi = \psi f$.

Un analogue topologique de ceci est, pour un espace pointé (Y, y_0) une application $\psi : (Y, y_0) \to (Y, y_0)$ telle que ψ^2 est homotope à ψ (on dit que ψ est idempotente à homotopie près). On peut là aussi construire un espace (Y, y_0) universel pour cette propriété.

Mais on montre que Y est un $K(F, 1)$, et a un nombre fini de cellules en chaque dimension comme CW-complexe, ce qui fournit une autre démonstration du fait que F est de type FP_∞.

7.3 Groupes dénombrables localement finis.

Définition .7 *Un groupe L est dit localement fini si tout sous-groupe de L de type fini est fini.*

On va démontrer que tout groupe L dénombrable et localement fini se plonge dans le groupe de Thompson G.

Un groupe dénombrable localement fini est réunion croissante de sous-groupes finis. En effet, si $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système de générateurs de L et H_i le groupe engendré par $h_1, \ldots, h_n$, H_i est fini, et L est la réunion croissante des H_i.

Par conséquent, on va commencer par s'intéresser aux plongements des groupes finis dans G ; on sait déjà que G contient tous les groupes de permutations finis, donc tous les groupes finis, mais on va préciser ce résultat.

Définition .8 *Soit H un groupe fini. Un plongement standard de H dans G est un morphisme injectif $\alpha : H \to G$ pour lequel il existe une partition admissible X vérifiant $|X| = |H|$, $\alpha(H)$ fixe X (i.e $\alpha(H) \subset \mathcal{S}_X$) et $\alpha(H)$ agit transitivement sur X.*

Alors :

Proposition 7.3.1 *Pour tout H fini, il existe un plongement standard dans G, unique a conjugaison près (i.e si α et β sont deux plongements standard, il existe θ dans G tel que pour tout $h \in H$, $\beta(h) = \theta^{-1}\alpha(h)\theta$).*

Démonstration:

Dans ce qui suit, H est un groupe fini de cardinal n, que l'on écrit $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ avec $h_1 = 1$. On définit les entiers $f(i,j)$ par $h_i h_j = h_{f(i,j)}$. L'associativité de la loi de groupe montre que (*) $f(i, f(j,k)) = f(f(i,j), k)$ pour $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

existence

On fixe une partition standard X de cardinal n, $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, et on définit $g_i \in G$ par $g_i(X_j) = X_{f(i,j)}$ si $1 \le j \le n$. Ainsi, X est g_i-adaptée et $g_i.X = X$ pour tout i.

Alors l'application définie par $\forall i$, $\alpha(h_i) = g_i$ définit bien un morphisme grâce à (*), et il est alors clair que α est un plongement standard.

"unicité" Soit α et β des plongements standard de H associés aux partitions admissibles X et Y.

X et Y sont deux partitions admissibles de même rang, donc il existe $\theta \in G$ tel que $\forall i, \theta(\alpha(h_i)).X_i = \beta(h_i).Y_i$. On peut écrire $X = \{\alpha(h_1).X_1, \ldots, \alpha(h_n).X_1\}$ et $Y = \{\beta(h_1).Y_1, \ldots, \beta(h_n).Y_1\}$ car les actions sont transitives. Alors si $h \in H$ et $x \in X$, $\alpha(h).x = (\theta^{-1}\beta(h)\theta).x$, ce qui prouve que α et β sont conjugués. ∎

Maintenant, si K est un sous-groupe de H de cardinal k, d'indice d, $\alpha(K)$ agit sur X avec d orbites de cardinal k (puisque si $x \in K$, $|\mathrm{Orb}(x)|.|\mathrm{Stab}(x)| = k$ et que $\mathrm{Stab}(x)$ est trivial).

Si $K = \{h_1, \ldots, h_k\}$ avec $h_1 = 1$, on peut écrire X sous la forme $X = \{\alpha(h_1).X_1, \ldots, \alpha(h_k).X_1, \ldots, \alpha(h_1).X_d, \ldots, \alpha(h_k).X_d\}$. Mais si on contracte $\{\alpha(h_i).X_1, \ldots, \alpha(h_i).X_d\}$ en Y_i pour $1 \leq i \leq k$, Y ainsi obtenu est une partition admissible de rang k sur laquelle $\alpha(K)$ agit transitivement, et cela montre que $\alpha_{|K}$ est un plongement standard de K.

Mais à l'inverse, si K est un sous-groupe de H, tout plongement standard de K se prolonge en un plongement standard de H : soit $\alpha : K \to G$; il existe par ce qui précède $\beta : H \to G$ tel que $\beta_{|K}$ est un plongement standard, et par la propriété d'unicité, $\theta \in G$ tel que $\beta_{|K} = \theta^{-1}\alpha\theta$, donc $\alpha = \theta\beta_{|K}\theta^{-1}$, et $\theta\beta\theta^{-1}$ est un plongement standard de H qui prolonge α.

Le résultat annoncé est alors immédiat ; soit un groupe L dénombrable localement fini, qui est réunion croissante de groupes finis H_i. On se donne un plongement standard de H_1. Celui-ci se prolonge en un plongement de H_2, qui se prolonge en un plongement standard de H_3 et ainsi de suite, pour donner finalement un plongement de L dans G.

7.4 Groupes $H\mathcal{F}$.

On va définir une classe de groupes, $H\mathcal{F}$, reliée aux groupes de Thompson par le fait que F est fondamentalement le seul groupe connu qui ne soit pas dans $H\mathcal{F}$.

Définition .9 *$H_1\mathcal{F}$ est la classe de tous les groupes qui ont une action sur un complexe cellulaire contractile de dimension finie telle que le stabilisateur de chaque cellule soit fini.*

$H\mathcal{F}$ est la plus petite classe de groupes contenant tous les groupes finis telle que $G \in H\mathcal{F}$ ssi G a une action sur un complexe cellulaire contractile de dimension finie telle que le stabilisateur de chaque cellule soit dans $H\mathcal{F}$.

Le théorème suivant permet d'illustrer l'intérêt de cette classe en homologie des groupes, sachant que la classe $H\mathcal{F}$ est très large : elle contient tous les groupes finis, les groupes de dimension cohomologique virtuellement finie, les groupes dénombrables résolubles, et est stable par extension et sous-groupes.

Théorème 7.4.1 *Si $G \in H\mathcal{F}$ est sans torsion et de type FP_∞, alors G est de dimension cohomologique finie.*

Mais nous allons nous en servir au contraire pour montrer que le groupe de Thompson F n'est pas dans $H\mathcal{F}$. En effet, F agit sur l'intervalle $[0,1]$ en préservant l'ordre, donc F est sans torsion. D'autre part, F est de type FP_∞. Par conséquent, si F était dans $H\mathcal{F}$, F serait de dimension cohomologique finie. Mais F contient des groupes abéliens de rang (donc de dimension cohomologique) arbitrairement grand, et $\mathrm{cd}(A) < \mathrm{cd}(F)$ pour un tel sous-groupe, d'où la contradiction.

Donc F n'est pas dans $H\mathcal{F}$, et c'est le seul groupe connu qui ait cette propriété.

Table des matières

Références

[1] Bestvina M, Brady N. **Morse theory and finiteness properties of groups**, Invent.math.129, 445-470 (1997)

[2] Brown K.S. **Cohomology of groups**, GTM 87, Springer-Verlag, New-York, 1982.

[3] Brown K.S. **Presentation for groups acting on simply connected complexes**, Journal of Pure and Applied Algebra 32 (1984), 1-10.

[4] Brown K.S. **Finiteness properties of groups**, Journal of Pure and Applied Algebra 44 (1987), 45-75.

[5] Brown K.S. **The geometry of finitely presented infinite simple groups**, Algorithms and classification in combinatorial group theory, G.Baumslag, C.F Miller III editors, Springer-Verlag.

[6] Brown K.S et Geoghegan. **An infinite dimensional torsion-free FP_∞ group**, Invent.Math. 77 (1984), 367-381.

[7] Cannon J.W, Floyd W.J, Parry W.R. **Introductory notes on Richard Thompson's groups**, L'enseignement mathématique, t.42 (1996), p.215-256.

[8] Higman G. **Finitely presented infinite simple groups**, Notes on Pure Mathematics 8, Australian National University, Canberra, 1974.

[9] Imbert M. **Sur l'isomorphisme du groupe de Richard Thompson avec le groupe de Ptolémée**, Geometric Galois Actions (tome 2), edited by L.Schneps & P.Lochak, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 243 (1997) 313-324.

[10] Kropholler P.H. **Cohomological finiteness conditions**, Proceeding of the international conference held at university college, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 212 (1995) 274-304.

[11] Quillen D. **Homotopy properties of the poset of non-trivial p-subgroups of a group**, Advances in Math.28 (1978), 101-128.

[12] Serre J.P. **Arbres, amalgames,** SL_2, Astérisque 46, 1997.