Introduction : quatre questions

1. On place de l'argent sur un compte qui rapporte 3% la première année et 5% la deuxième ; quel est le rendement moyen ? (autrement dit : quel est le taux annuel qui rapporterait autant sur deux ans ?)

2. Si l'on dispose d'un rectangle de côtés 2 et 5, quel est le côté du carré de même aire ?

3. Une voiture effectue le trajet aller de Grenoble à Lyon à la vitesse de 120km/h, puis, à cause des embouteillages, le trajet retour à la vitesse de 82km/h.

   Quelle est la vitesse moyenne durant le trajet ? (autrement dit : si un autre véhicule se déplace à vitesse constante, quelle doit être sa vitesse pour qu'il mette le même temps de trajet pour parcourir l'aller-retour ?)

4. On dispose d'un circuit avec deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle.

   Quelle est la résistance moyenne correspondante ? (autrement dit : quelle est la valeur R telle que monter en parallèle deux résistances de valeur R donne une résistance équivalente au circuit initial ?)

Différentes moyennes

Moyennes arithmétiques : rappel.

Si a et b sont deux nombres réels, on appelle moyenne arithmétique de a et b le nombre

$$A = \frac{a+b}{2}.$$

C'est la moyenne habituelle ; nous allons voir que dans certains cas ce n'est pas la bonne notion pour calculer une quantité « moyenne ».

Moyennes géométriques : une autre moyenne.

Un exemple : On place de l'argent sur un compte qui rapporte 3% la première année et 5% la deuxième ; quel est le rendement moyen ? (autrement dit : quel est le taux annuel qui rapporterait autant sur deux ans ?)

Définition : On constate que le taux cherché n'est pas la moyenne arithmétique "classique", mais une autre quantité que l'on appelle « moyenne géométrique » : la moyenne géométrique G de deux nombres positifs a et b est

$$G = \sqrt{ab}.$$

Un autre exemple :
Si l'on dispose d'un rectangle de côtés 2 et 5, quel est le côté du carré de même aire ?

Moyennes harmoniques : encore une.

Un exemple : Une voiture effectue le trajet aller de Grenoble à Lyon à la vitesse de 120km/h, puis, à cause des embouteillages, le trajet retour à la vitesse de 82km/h.

Quelle est la vitesse moyenne durant le trajet ? (autrement dit : si un véhicule se déplace à vitesse constante, quelle doit être sa vitesse pour qu'il mette le même temps de trajet pour parcourir l'aller-retour ?)

Définition : La moyenne harmonique H de deux nombres strictement positifs a et b est l'inverse de la moyenne (arithmétique) des inverses des nombres :

$$H = \frac{2}{1/a+1/b}.$$

Un autre exemple :
On dispose d'un circuit avec deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle.

Quelle est la résistance moyenne correspondante ? (autrement dit : quelle est la valeur R telle que monter en parallèle deux résistances de valeur R donne une résistance équivalente au circuit initial ?)

Comparaison des moyennes On veut maintenant prouver la relation suivante entre les moyennes A, G et H de deux nombres réels strictement positifs a et b :

$$H \leq G \leq A.$$

Montrer que $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$, et en déduire que $G \leq A$. Dans quel cas a-t-on $G = A$?

Montrer que $H = \frac{G^2}{A}$. En déduire que $H \leq G$. Dans quel cas a-t-on $H = G$?

La moyenne arithmético-géométrique : encore une moyenne...plus compliquée à déterminer !

Définition :

On fixe deux nombres strictement positifs a et b, et on définit deux suites de valeurs a_n et b_n ainsi : $a_0 = \sqrt{ab}$, $\quad b_0 = \frac{a+b}{2}$, et si a_n et b_n sont définies,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Cela permet de calculer de proche en proche toutes les valeurs de a_n et b_n.

Première expérience avec une calculatrice ou un tableur :

On part des valeurs $a = 2$ et $b = 3$.
Calculer les arrondis à 10^{-3} des 10 premiers termes de chaque suite.
Que constate-t-on ?

Deux autres expériences :

Faire de même avec les valeurs $a = 1$ et $b = 10$, avec $a = 5$ et $b = 8$.

Démonstration de ces propriétés :

Montrer successivement :

1. pour tout n, $a_n \leq b_n$,
2. (a_n) est croissante (c'est à dire que pour tout n, $a_{n+1} \geq a_n$),
3. (b_n) est décroissante (c'est à dire que pour tout n, $b_{n+1} \leq b_n$),
4. (a_n) et (b_n) convergent,
5. (a_n) et (b_n) ont la même limite

Cette limite commune est la « moyenne arithmético-géométrique » de a et b.

Si l'on a pu voir sur les exemples que la convergence est très rapide (on constate sur les quelques exemples ci-dessus qu'il suffit de quelques termes pour que a_n et b_n soient des valeurs approchées à 10^{-10} près de l), il n'y a pas de moyen simple d'exprimer en fonction de a et b la valeur de leur moyenne arithmético-géométrique.