TD 1 : Fonctions usuelles - corrigé

exercices théoriques

1. **Fonctions usuelles :**

(a) vérifier que $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

(b) développer $(e^x + e^{-x})^4$

(c) résoudre $e^x - 2e^{-x} = -2$

(d) résoudre $\ln|x-1| + \ln|x+1| = 0$

(e) si $f(x) = x^2+2$ et $g(x) = 2x-3$, calculer $f \circ g$, $g \circ f$, et leurs dérivées

(f) si $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ et $k(x) = x-3$, calculer $h \circ k$, $k \circ h$, et leurs dérivées

corrigé succinct :

(a) Il suffit de mettre e^x en facteur au numérateur comme au dénominateur, puis de simplifier : $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

(b) On développe par la formule du binôme $(e^x)^4 + 4(e^x)^3 e^{-x} + 6(e^x)^2(e^{-x})^2 + 4e^x(e^{-x})^3 + (e^{-x})^4$ et on obtient $e^{4x} + 4e^{2x} + 6 + 4e^{-2x} + e^{-4x}$.

(c) Quand une équation fait apparaître uniquement des exponentielles de l'inconnue on peut souvent se ramener à une équation polynômiale en posant $e^x = X$. Ainsi, l'équation devient ici $X - 2/X = -2$ avec $X > 0$ (car $X = e^x > 0$). Elle est donc équivalente à $X^2 + 2X - 2 = 0$ dont le discriminant est 12, et les solutions $\dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$. L'unique solution $X > 0$ est donc $X = -1 \pm \sqrt{3}$, qui correspond à $\boxed{x = \ln(\sqrt{3} - 1).}$

(d) L'équation est définie pour $x \neq \pm 1$. On peut donc, pour $x \neq \pm 1$ transformer l'équation en les équations équivalentes $\ln|x^2 - 1| = 0$, $|x^2 - 1| = 1$, $x^2 - 1 = \pm 1$, soit finalement $x^2 = 0$ ou $x^2 = 2$ dont les trois solutions sont $\boxed{x = 0, x = \sqrt{2} \text{ et } x = -\sqrt{2}.}$

(e) On trouve $(f \circ g)(x) = (2x-3)^2 + 2 = 4x^2 - 12x + 11$ et sa dérivée est $8x - 12$. De même $(g \circ f)(x) = 2(x^2+2) - 3 = 2x^2 + 1$, et sa dérivée est $4x$.

(f) On trouve $(h \circ k)(x) = \sqrt{(x-3)^2 + 1}$ et sa dérivée est $\dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+1}}$.
De même $(k \circ h)(x) = \sqrt{x^2+1} - 3$ et sa dérivée est $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2. Calculer $\cos\frac{5\pi}{8}$, $\sin\frac{5\pi}{8}$, et $\tan\frac{5\pi}{8}$.

corrigé succinct : On utilise la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ avec $x = \frac{5\pi}{8}$ pour obtenir $2\cos^2\frac{5\pi}{8} = 1 + \cos\frac{5\pi}{4} = 1 - \sqrt{2}/2$, d'où finalement $\cos^2\frac{5\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$. Comme $\frac{5\pi}{8}$ est entre $\pi/2$ et π, son cosinus est négatif, et donc $\boxed{\cos\frac{5\pi}{8} = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$

Avec la formule $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, on obtient alors $\boxed{\sin\frac{5\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}},}$

et par conséquent $\boxed{\tan\frac{5\pi}{8} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.}$

3. Quels angles font avec $\vec{i}$ les vecteurs $\vec{u}(\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $\vec{v}(-1, 3)$, $\vec{w}(-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$?

corrigé succinct : $(\vec{i}, \vec{u}) = \pi/3$, $(\vec{i}, \vec{v}) = -\arctan(3) + \pi$, $(\vec{i}, \vec{w}) = -5\pi/6$.

4. **équations trigonométriques :** Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $\cos x = \frac{1}{2}$

(b) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(d) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

(e) $\sin x = \cos x$

(f) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

(g) $2\cos x + 0.5\sin x = 1.5$

(h) $\cos x + 0.2\sin x = 6$

(i) $-3\cos x - 4\sin x = 5$

corrigé succinct :

(a) Il suffit d'écrire $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ pour trouver : $\boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.}$

(b) De même on écrit $\frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3})$, et donc x est solution si et seulement si $2x$ vaut $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc finalement : $\boxed{x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.}$

(c) $\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$ équivaut à : $3x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ soit : $\boxed{x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.}$

(d) On résoud d'abord $2X^2 + X - 1$, dont les solutions sont $X = -1$ et $X = \frac{1}{2}$.
En remplaçant X par $\sin\ x$, on obtient donc deux équations trigonométriques, dont les solutions sont les $\boxed{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

(e) Un raisonnement géométrique permet d'éviter les calculs : l'angle x est solution si et seulement si l'abscisse et l'ordonnée du point correspondant du cercle trigonométrique sont égales. Donc $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, soit encore $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

On peut aussi traiter l'équation comme une équation $a\cos + b\sin = c$, de la même manière que les exercices qui suivent.

(f) L'équation équivaut successivement à $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\ x - \frac{1}{2}\sin\ x = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}\cos\ x - \sin\frac{\pi}{6}\sin\ x = \cos\frac{\pi}{3}$, $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{3}$. Ainsi $x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, et les solutions sont donc les $\boxed{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } \frac{-\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

(g) On transforme d'abord l'équation en l'équation $\frac{4}{\sqrt{17}}\cos\ x + \frac{1}{\sqrt{17}}\sin\ x = \frac{3}{\sqrt{17}}$.
On peut alors écrire $\frac{4}{\sqrt{17}} = \cos\arctan\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin\arctan\frac{1}{4}$, et donc en posant $\alpha = \arctan\frac{1}{4}$, l'équation devient $\cos\ \alpha\ \cos\ x + \sin\ \alpha\ \sin\ x = \frac{3}{\sqrt{17}}$, soit $\cos(x - \alpha) = \cos(\arccos\frac{3}{\sqrt{17}})$. Ainsi, $x - \alpha = \pm\arccos(\frac{3}{\sqrt{17}}) + 2k\pi$; les solutions sont donc les $\boxed{\arctan\frac{1}{\sqrt{4}} \pm \arccos\frac{3}{\sqrt{17}} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$ (remarque : $x \simeq 1$, mais $x \neq 1$)

(h) On transforme l'équation en $\frac{5}{\sqrt{26}}\cos\ x + \frac{1}{\sqrt{26}}\sin\ x = \frac{6}{\sqrt{26}}$. Mais on remarque alors que le membre de gauche est de la forme $\cos(x - \beta)$ (cf.le cours, et l'équation précédente), alors que le membre de droite est strictement supérieur à 1 : $\boxed{\text{l'équation n'admet pas de solution.}}$

(i) $-\frac{3}{5}\cos\ x - \frac{4}{5}\sin\ x = 1$, donc si $\gamma = \arctan(\frac{4}{3}) + \pi$, l'équation devient $\cos\gamma\cos\ x + \sin\gamma\sin\ x = 1$, d'où et $\cos(x - \gamma) = 1$. Ainsi, $x - \gamma = 2k\pi$, donc les solutions sont les $\boxed{\arctan\frac{4}{3} + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

exercices pratiques

1. **Mesure du rayon de la Terre par Eratosthène, vers -200 av.J.C :** Lors du solstice d'été, à midi, le soleil est au zénith dans la ville de Syène (Assouan). A Alexandrie, située à 800km au nord sur le même méridien, les rayons du soleil font un angle de 7°avec la verticale.
   (a) Avec ces données, déterminer le rayon de la Terre.
   (b) Comparer à la valeur aujourd'hui mesurée, 6378km.

corrigé succinct :

(a) D'après les données, si d est la distance le long d'un méridien entre Syène et Assouan et si $\theta = 7^\circ = 7 * \pi/180$rad est l'angle correspondant, on a $R \times \theta = d$, donc $R = d/\theta \simeq 6548$km.

(b) Le calcul d'Eratosthène donne une erreur de 170km, soit une erreur relative de l'ordre de $2,7\%$...la mesure est très correcte.

2. **Une histoire de pentes**
   « Petite randonnée tranquille ce matin, une belle pente à 30°régulière. Par contre, la voiture a trouvé la descente de Laffrey sur Vizille un peu raide : une longue pente à 12% ! ». Comment comparer ces valeurs ?

corrigé succinct :

12% de pente signifie que si le trajet horizontal (la distance parcourue en projection) est d, la voiture est descendue de $d \times 0,12$, et l'angle correspondant est donc caractérisé par $\tan\theta = 0,12$ soit $\theta \simeq 0,119$ rad $\simeq 6,84^\circ$.

A l'inverse, 30° de pente correspondent à $57,7\%$.

3. **Sensibilité relative d'une thermistance :** la résistance R d'une thermistance est liée à sa température absolue T par $R = R_0\exp(a(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}))$.
   Donner les dimensions et les unités des quantités qui interviennent dans l'énoncé.
   Déterminer la sensibilité relative $\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}$. Quelle est sa dimension ?

corrigé succinct :

R et R_0 sont des résistances en $\Omega = V.A^{-1} = m^2kgs^{-3}A^{-2}$.

a est l'inverse d'une température, en K^{-1}.

Et après dérivation et simplification on trouve $-a/T^2$.

4. **Nombre de chiffres :** le plus grand nombre premier connu à ce jour est $2^{57\ 885\ 161} - 1$. Combien de chiffres sont nécessaires pour l'écrire ?

corrigé succinct :

Le nombre de chiffres n est caractérisé par la double inégalité $10^{n-1} \leq 2^{57\ 885\ 161} - 1 < 10^n$, soit encore $10^{n-1} < 2^{57\ 885\ 161} < 10^n$ (l'inégalité de droite est stricte car une puissance de 2 n'est pas divisible par 5, donc a fortiori ne peut être une puissance de 10).

Si l'on peut écrire $2^{57\ 885\ 161}$ sous la forme 10^x, le nombre de chiffre sera donc égal à la partie entière de x plus un.

On détermine alors x en prenant le logarithme népérien de cette égalité, soit $x = \ln 10 = 57\ 885\ 161 \ln 2$, donc $x = 57\ 885\ 161 \ln(2)/\ln 10 \simeq 17\ 425\ 169,76$...

Le nombre premier s'écrit donc avec 17 425 170 chiffres.

5. **Électricité**

On considère deux signaux trignométriques, d'amplitudes A_1 et A_2 et de même pulsation ω : $y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. On définit alors le déphasage du second signal par rapport au premier comme $\varphi_2 - \varphi_1$.

Un générateur G_1 fournit une tension $u_1 = A \cos \omega t$ et un générateur G_2 une tension $u_2 = A \sin \omega t$. Quel est le déphasage par rapport à u_1 de la tension obtenue en plaçant G_1 et G_2 en série ?

corrigé succinct : La tension étudiée est $(u_1 + u_2)(t) = A \cos \omega t + A \sin \omega t$.

On peut donc transformer cette expression en l'écrivant $\sqrt{2}A(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega t)$,

soit $\sqrt{2}A \cos(\omega t - \pi/4)$. Ainsi, le déphasage cherché vaut $\boxed{-\pi/4}$.

6. * **Graduation d'une cuve cylindrique**

Une cuve cylindrique de rayon $R = 1$m et de longueur $L = 5$m est posée sur le sol selon sa longueur. On souhaite déterminer le volume V de liquide en fonction de sa hauteur h, $0 \leq h \leq 2$.

(a) Calculer $V(0)$, $V(1)$, $V(2)$.

(b) En décomposant la surface de liquide comme différence entre la surface d'un secteur circulaire et celle d'un triangle isocèle, donner $V(h)$ pour $0 \leq h \leq 1$.

(c) En déduire la valeur de $V(h)$ pour $1 \leq h \leq 2$.

(d) Peut-on facilement graduer la cuve, c'est à dire exprimer la hauteur du liquide en fonction de son volume ?

corrigé succinct :

(a) On a $\boxed{V(0) = 0,}$ $\boxed{V(1) = \pi R^2 L/2 = 5\pi/2}$ et $\boxed{V(2) = \pi R^2 L = 5\pi.}$

(b) On considère un des disques qui ferment la cuve. Soit O son centre, et A et B les points du cercle correspondant tel que le liquide soit situé sous $[AB]$. Soit enfin θ l'angle $\widehat{AOB}$ et C le milieu de $[AB]$.

Alors $V(h) = L \times S(h)$, où $S(h)$ est la surface de liquide sur le disque. Et on peut calculer $S(h)$ comme différence entre l'aire d'un secteur d'angle θ et l'aire du triangle AOB.

Le triangle AOC étant rectangle en C, $AC^2 = AO^2 - OC^2 = 1 - (1-h)^2 = 2h - h^2$, donc $AC = \sqrt{2h - h^2}$. L'aire de AOC est $OC \times AC/2$, et l'aire de AOB est donc égale à $OC \times AC$, soit $(1-h)\sqrt{2h - h^2}$.

L'aire du secteur angulaire est simplement égale à $\theta R^2/2$, donc ici $\theta/2$, et on peut calculer $\theta/2$ grâce à la trigonométrie dans le triangle rectangle en C AOC : $OC = OA \cos(\theta/2)$ donc $1 - h = \cos(\theta/2)$, $\theta/2 = \arccos(1-h)$.

Finalement, on obtient donc $V(h) = 5(\arccos(1-h) - (1-h)\sqrt{2h - h^2})$, d'où

$$\boxed{V(h) = 5(\arccos(1-h) - (1-h)\sqrt{2h - h^2}).}$$

(c) Si h est compris entre 1 et 2, c'est l'air qui occupe un volume correspondant à une hauteur $2 - h$ (comprise entre 0 et 1), et l'on peut calculer ce volume grâce à la question précédente. Ainsi, $V(h) = V(2) - V(2-h) = 5(\pi - \arccos(-1+h) + (-1+h)\sqrt{2(2-h) - (2-h)^2})$, et donc

$$\boxed{\text{si } 1 \leq h \leq 2, V(h) = 5(\pi - \arccos(-1+h) + (-1+h)\sqrt{2h - h^2}).}$$

On peut même démontrer que cette expression est égale à celle déterminée pour $0 \leq h \leq 1$. En effet, un peu de géométrie (ou une utilisation des dérivées) montre que la fonction $x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$ est constante sur $[-1; 1]$, de valeur π. Par conséquent, $\pi - \arccos(-1+h) = \arccos(1-h)$. Comme $-1 + h = -(1-h)$ on a donc pour $1 \leq h \leq 2$, $V(h) = 5(\arccos(h-1) - (1-h)\sqrt{2h - h^2})$, et on retrouve bien la formule précédente.

Ainsi, pour tout h compris entre 0 et 2, $\boxed{V(h) = 5(\arccos(1-h) - (1-h)\sqrt{2h - h^2}.}$

(d) Non, il n'est pas possible d'inverser cette formule donnant V en fonction de h pour obtenir h en fonction de V. Seuls des calculs numériques de h, pour un certain nombre de valeurs de V (tous les 100 litres, par exemple..), permettront de déterminer comment graduer la cuve.