TD 2 : Nombres complexes et polynômes - corrigé

exercices théoriques

1. Donner la forme algébrique, le module et l'argument des nombres :
$a = \sqrt{3}+i;\quad b=(1-i)(1+\sqrt{3}i);\quad c=\frac{1+i}{2-i};\quad d=-1-3i;$
$e=3-i;\quad f=\frac{3}{1-i};\quad g=(1-\sqrt{3}i)^{2013};\quad h=\frac{-2+4i}{1+3i}.$

corrigé succinct :

$a=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=2e^{i\frac{\pi}{6}}$: $\boxed{\text{le module de } a \text{ est } 2\text{, son argument est } \frac{\pi}{6}.}$

Pour b, en développant on trouve $\boxed{b=1+\sqrt{3}+(-1+\sqrt{3})i.}$ Pour déterminer sa forme trigonométrique, il est plus simple de calculer séparément celle de $1-i$ et celle de $1+\sqrt{3}i$ avant de multiplier les modules et d'additionner les arguments pour obtenir ceux de b : $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $\boxed{b=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.}$

Pour c on obtient la forme algébrique (cartésienne) avec la méthode de la quantité conjuguée : on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $2+i$ du dénominateur $2-i$: $c=\frac{(2+i)(1+i)}{(2+i)(2-i)}$, d'où $\boxed{c=\frac{1+3i}{5}.}$

On trouve alors directement son module $\sqrt{10}/5$ et son argument $\arctan(3)$: la forme exponentielle est donc $\boxed{c=\frac{\sqrt{10}}{5}e^{i\arctan(3)}.}$

Enfin on trouve directement $\boxed{d=\sqrt{10}e^{i(\arctan(\frac{-3}{-1})+\pi)}=-\sqrt{10}e^{i(\arctan(3))}.}$

Pour e, le module est $\sqrt{10}$ et l'argument $\arctan(-1/3)$.

Pour f, le module est $3/\sqrt{2}=3\sqrt{2}/2$ et l'argument est $\pi/4$.

Pour g, le module est 2^{2010} et l'argument est $-2010\pi/3$.

Pour h, le module est $\sqrt{2}$ et l'argument $\pi-\arctan(2)-\arctan(3)$ (si on le calcule comme différence des arguments) ou $\arctan(1)$ (si on met d'abord h sous sa forme algébrique $1+i$). Ce qui fournit au passage la relation $\arctan(1)+\arctan(2)+\arctan(3)=\pi$.

2. Calculer $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

corrigé succinct : On utilise la formule de Moivre : $\sin 5\theta = \mathrm{im}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \mathrm{im}\,(\cos^5\theta+5i\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta-10i\cos^2\theta\sin^3\theta+5\cos\theta\sin^4\theta+i\sin^5\theta)=5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta$. Il ne reste plus qu'à utiliser les relations $\cos^4\theta=(1-\sin^2\theta)^2=\sin^4\theta-2\sin^2\theta+1$ et $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ pour trouver, après simplification :

$$\boxed{\sin 5\theta = 16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta.}$$

3. Linéariser : (a) $\sin^2\theta$ (b) $\cos^4\theta$ (c) $\sin^3\theta\ \cos^2\theta$

corrigé succinct : on utilise les formules d'Euler...

(a) $\sin^2\theta=(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})^2=-\frac{1}{4}(e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta})$, $\boxed{\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta).}$

(b) De même en développant $\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4$, on trouve

$$\boxed{\cos^4\theta=\frac{\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3}{8}.}$$

(c) De même, $\sin^3\theta\ \cos^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$, donc

$$\boxed{\sin^3\theta\ \cos^2\theta=\frac{-\sin 5\theta+\sin 3\theta+2\sin\theta}{16}.}$$

4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les équations :
(a) $x^2+3=0$ (b) $x^2+x+1=0$ (c) $x^3=1$

corrigé succinct : On utilise les formules avec le discriminant :

(a) ici le discriminant est inutile : $x^2=-3$ a deux solutions non réelles conjuguées, $+\sqrt{3}i$ et $-\sqrt{3}i$

(b) le discriminant vaut -3, donc les racines non réelles conjuguées sont $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(c) on cherche les solutions sous la forme $x=re^{i\theta}$. On a donc $x^3=r^3e^{3i\theta}=1$ donc en identifiant module et argument : $r^3=1$ et $3\theta=2\pi+2k\pi$, soit $r=1$ et $\theta=2\pi/3+2k\pi/3$, ce qui donne les trois solutions $e^{i0/3}$, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$ soit

$$\boxed{1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\ \text{et}\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.}$$

5. * On considère pour $x \in]-\pi/2, +\pi/2[$ $f(x) = \dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$.

Donner les parties réelle et imaginaire, le module, l'argument de $f(x)$. En déduire l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\tan x$.

corrigé succinct : $f(x) = \dfrac{(1+i\tan x)^2}{1+\tan^2 x} = \dfrac{1-\tan^2 x + 2i\tan x}{1+\tan^2 x}$, donc $\mathrm{re}\,(f(x)) = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et $\mathrm{im}\,(f(x)) = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

$$|f(x)| = \frac{(1-\tan^2 x)^2 + (2\tan x)^2}{(1+\tan^2 x)^2} = \frac{1+\tan^4 x + 2\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)^2} = 1.$$

Mais on voit aussi, en multipliant numérateur et dénominateur par $\cos x$, que $f(x) = \dfrac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x} = \dfrac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{2ix} = \cos 2x + i\sin 2x$: $\arg(f(x)) = 2x$, et donc $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et de plus en comparant les deux expressions de $f(x)$, $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

6. Effectuer la division selon les puissances décroissantes de :
   (a) $X^4 - X^3 + 3X^2 + 1$ par $X^2 + 3X + 1$
   (b) $X^5 + 2X^3 - 3X - 2$ par $X^3 + X + 1$
   (c) $6X^5 - 7X^4 + 1$ par $(X-1)^2$

corrigé succinct :

(a) On pose la division :

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
X^4 & - & X^3 & + & 3X^2 & & & + \; 1 & X^2 + 3X + 1 \\
X^4 & + & 3X^3 & + & X^2 & & & & \hline X^2 - 4X + 14 \\
\hline
& - & 4X^3 & + & 2X^2 & & & + \; 1 & \\
& - & 4X^3 & - & 12X^2 & - & 4X & & \\
\hline
& & & & 14X^2 & + & 4X & + \; 1 & \\
& & & & 14X^2 & + & 42X & + \; 14 & \\
\hline
& & & & & - & 38X & - \; 13 &
\end{array}$$

donc $\boxed{X^4 - X^3X + 1 = (X^2+3X+1)(X^2-4X+14) - 38X - 13.}$

(b) De même on trouve $\boxed{X^5 + 2X^3 - 3X - 2 = (X^3+X+1)(X^2+1) - X^2 - 4X - 3.}$

(c) De même $\boxed{6X^5 - 7X^4 + 1 = (X^2 - 2X + 1)(6X^3 + 5X^2 + 4X + 3) + 2X - 2.}$

7. Factoriser sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ les polynômes :
   (a) $X^2 + 2X - 3$ (b) $X^4 + 2X^2 - 3$ (c) $X^3 - X^2 + 2X - 2$
   (d) $2X^4 + 2$ (e) $X^4 - 2X^3 + X - 2$ (f) $2X^3 - 3X^2 - 3X + 2$

corrigé succinct : (a) Le discriminant de ce polynôme du second degré est 16, et ses racines sont -3 et 1. Ainsi, $\boxed{X^2 + 2X - 3 = (X-1)(X+3).}$

(b) On utilise le résultat précédent $X^4 + 2X^2 - 3 = (X^2-1)(X^2+3)$. Il reste à factoriser chacun de ces deux facteurs.

On a $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, et $X^2 + 3$ est irréductible sur $\mathbb{R}$, et vaut $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i)$ sur $\mathbb{C}$.

Ainsi, $\boxed{\text{sur } \mathbb{R},\ X^4 + 2X^2 - 3 = (X-1)(X+1)(X^2+3)}$, et $\boxed{\text{sur } \mathbb{C},\ X^4 + 2X^2 - 3 = (X-1)(X+1)(X-\sqrt{3}i)(X+\sqrt{3}i)}$.

(c) On commence par déterminer une racine "évidente", à chercher parmi les diviseurs du terme constant -2 : on teste donc $2, -2, 1, -1$, pour constater que 1 est effectivement racine (et pas les trois autres nombres).

Alors on effectue la division de $X^3 - X^2 + 2X - 2$ par $X - 1$ (on sait à l'avance que le reste doit être nul) : $X^3 - X^2 + 2X - 2 = (X-1)(X^2+2)$. $X^2 + 2$ étant irréductible sur $\mathbb{R}$, la décomposition est : $\boxed{\text{sur } \mathbb{R},\ X^3 - X^2 + 2X - 2 = (X-1)(X^2+2)}$, et $\boxed{\text{sur } \mathbb{C},\ X^3 - X^2 + 2X - 2 = (X-1)(X+\sqrt{2}i)(X-\sqrt{2}i)}$.

(d) Il est plus simple de commencer par factoriser ce polynôme sur $\mathbb{C}$. Pour cela on doit trouver ses racines, ce qui revient à déterminer les racines quatrièmes de -1 : ce sont $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{5i\pi/4} = e^{-3i\pi/4}$ et $e^{7i\pi/4} = e^{-i\pi/4}$ (utiliser la méthode de résolution de $X^3 = 1$ vue plus haut, en cherchant des solutions sous la forme $re^{i\theta}$).

Ainsi, $\boxed{\text{sur } \mathbb{C},\ 2X^4 + 2 = 2(X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})}$

(attention à bien laisser un 2 en facteur devant !)

Pour obtenir la décomposition sur $\mathbb{R}$, on développe les deux produits correspondants aux racines conjuguées :
$(X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4}) = X^2 - 2\cos(\pi/4)X + 1 = X^2 - \sqrt{2}X + 1$ et
$(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4}) = X^2 - 2\cos(3\pi/4)X + 1 = X^2 - \sqrt{2}X + 1$. Ainsi,

$\boxed{\text{sur } \mathbb{R},\ X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).}$

(e) On trouve -1 et 2 comme "racines évidentes". On peut alors diviser le polynôme par $(X+1)(X-2) = X^2 - X - 2$ et obtenir
$X^4 - 2X^3 + X - 2 = (X+1)(X-2)(X^2 - X + 1)$.

Le polynôme $X^2 - X + 1$ n'a pas de racines réelles : la factorisation sur $\mathbb{R}$ est donc $X^4 - 2X^3 + X - 2 = (X+1)(X-2)(X^2 - X + 1)$.

Ses racines complexes (calculées à l'aide du discriminant) sont $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$, donc la factorisation sur $\mathbb{C}$ est $X^4 - 2X^3 + X - 2 = (X+1)(X-2)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})$.

(f) On commence par déterminer une "racine évidente" en cherchant parmi les diviseurs du terme constant 2. On constate que -1 est racine et 2 aussi : le polynôme est donc divisible par $(X+1)(X-2) = X^2 - X - 2$: $2X^3 - 3X^2 - 3X + 2 = (X+1)(X-2)(2X-1)$ soit encore $2(X - 1/2)(X+1)(X-2)$.

exercices pratiques

1. **TPs « circuits RC » (électricité S1) et « filtrage » (électronique S2)**

On considère un circuit composé d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C, montés de sorte que la fonction de transfert du circuit soit $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$.

(a) calculer le module $|\underline{H}|$ et le gain en décibels $G_{\text{dB}} = 20\log_{10}|\underline{H}|$

(b) calculer l'argument de $\underline{H}$

(c) calculer la valeur de ces fonctions pour la pulsation de coupure $\omega_c = 1/RC$

(d) déterminer les limites de ces fonctions quand ω tend vers 0^+

(e) déterminer les limites de ces fonctions quand ω tend vers l'infini