2- Algèbre linéaire

1 Espaces vectoriels

1.1 définition

définition : un **espace vectoriel** réel est un ensemble constitué de vecteurs, qui reste stable par addition des vecteurs et multiplication d'un vecteur par un **scalaire** (un élément de $\mathbb{R}$).

exemples :

1. le point O, la droite $\mathbb{R}$, le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$
2. dans $\mathbb{R}^2$, toute droite passant par $(0,0)$
3. dans $\mathbb{R}^3$, toute droite, tout plan, passant par $(0,0,0)$
4. plus abstrait : l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle, l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels, ...,
5. l'ensemble des solutions d'une équation différentielle $y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$
6. l'ensemble $E_{a,b,c}$ des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant, pour tout n, $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n = 0$

définition : une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, avec λ, μ réels.

On considère de même des combinaisons linéaires de 3, 4, ... vecteurs.

exemple : le vecteur $\vec{v} = (1, 2, -1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i} = \vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = \vec{e_2} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = \vec{e_3} = (0, 0, 1)$: il s'écrit $\vec{v} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$.

Plus généralement, dans $\mathbb{R}^3$, tout vecteur est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, et cela de façon unique.

1.2 bases et dimensions

définition : on appelle **base** d'un espace vectoriel une famille de vecteurs telle que tout autre vecteur s'écrive de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.

exemples :

1. $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, appelée **base canonique**
2. de même, $\vec{e_1} = (1, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$

exercice : on considère l'ensemble P des vecteurs orthogonaux au vecteur $(2, -1, 1)$.
Déterminer une équation et une base de P.

correction : $\vec{v}$ de coordonnées (x, y, z) est dans P si et seulement si il est orthogonal à $(2, -1, 1)$, donc si et seulement si $2x - y + z = 0$. C'est l'équation de P.

Mais si (x, y, z) est dans P, on a $z = -2x + y$, donc les vecteurs $(1, 0, -2)$ et $(0, 1, 1)$ sont dans P, et tout élément de P s'écrit bien $x(1, 0, -2) + y(0, 1, 1)$ de façon unique.

Ainsi, $(1, 0, -2)$ et $(0, 1, 1)$ forment une base de P : P est donc un plan (sous-espace de dimension 2) de l'espace.

définition : la **dimension** d'un espace vectoriel est le cardinal de ses bases.

exemples 1 : $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 ; le plan P est de dimension 2.

exemples 2 : (admis, et relativement difficile) l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre est de dimension 2.

exemples 3 : l'espace $E_{a,b,c}$ des suites définies par une relation de récurrence linéaire, si $a \neq 0$, est de dimension 2.

Application : si on note $aX^2 + bX + c = 0$ l'équation caractéristique associée, on remarque que si q est une racine de l'équation, la suite définie par q^n est une solution de $E_{a,b,c}$. Le même pour la suite nq^n si q est une racine double, et les suites $r^n \cos(n\theta)$ et $r^n \sin(n\theta)$ si $q = re^{i\theta}$ est une racine complexe.

On en déduit que l'ensemble des solutions est :

— si $\Delta > 0$, les suites de la formes $\lambda q_1^n + \mu q_2^n$ où λ et μ sont des réels quelconques et q_1, q_2 les deux racines réelles de l'équation.

— si $\Delta = 0$, les suites de la formes $\lambda q^n + \mu n q^n$ où λ et μ sont des réels quelconques et q l'unique racine réelle de l'équation.

— si $\Delta < 0$, les suites de la formes $\lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)$ où λ et μ sont des réels quelconques et $re^{i\theta}$ une racine non réelle de l'équation.

2 Matrices

2.1 définition

définition : On appelle **matrice** un tableau de nombres.

Si la matrice a n lignes et p colonnes, on dit que sa **taille** est (n, p).

Une matrice à n lignes et 1 colonne est un **vecteur-colonne**, une matrice à 1 ligne et n colonnes est un **vecteur-ligne**. Une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes est une matrice **carrée**.

2.2 addition

On peut additionner coefficient par coefficient des matrices de même taille.

exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

matrice nulle : on note 0 la matrice nulle, dont tous les coefficients sont nuls.

2.3 multiplication

On considère deux matrices A et B.

Si A a le même nombre de colonnes que B de lignes, on peut définir le produit de A par B en calculant chaque coefficient de AB comme un produit scalaire de la ligne de A et la colonne de B correspondants.

Le produit AB a donc le même nombre de ligne que A, et le même nombre de colonnes que B.

remarque : si A et B sont deux matrices carrées de même taille, les deux produits AB et BA existent, mais en général, $AB \neq BA$.

exemples :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose le calcul de AB ainsi :

$$\begin{array}{cccc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times -1 & 1 \times 1 + 2 \times 1 \\ -3 \times 1 + 1 \times -1 & -3 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le calcul de BA donne, lui :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \end{array},$$

différent de AB.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors AB vaut

$$\begin{array}{cccc} & \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \times -2 + 2 \times 1 \\ -3 \times -2 + 1 \times 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

et on ne peut calculer BA.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Alors on calcule AB :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times -1 + -1 \times -1 & 1 \times 1 + 2 \times 1 + -1 \times 2 & 1 \times 2 + 2 \times 3 + -1 \times 0 \\ 0 \times 0 + 2 \times -1 + 1 \times -1 & 0 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 2 & 0 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times -1 - 1 \times -1 & 1 \times 1 + 0 \times 1 - 1 \times 2 & 1 \times 2 + 0 \times 3 - 1 \times 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

soit

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 \\ -3 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On trouve de même $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, et une fois de plus $AB \neq BA$.

matrice identité : on note I_n la matrice carrée de taille (n, n) dont les coefficients sont des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs (on notera simplement I s'il n'y a pas d'ambiguïté sur n).

Ainsi, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$...

propriété : pour toute matrice ayant n colonnes, $AI_n = A$; pour toute matrice ayant n lignes, $I_nA = A$.

Et donc pour toute matrice carrée, $AI = IA = A$.

2.4 puissances

Pour calculer A^2, A^3, ..., la première méthode calculatoire mais élémentaire consiste à calculer des produits successifs : $A^2 = A \times A$, $A^3 = (A \times A) \times A, \ldots$

exemple : si $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ -2 & 8 & -2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, calculer A^3.

On trouve successivement $A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 54 & -45 & 45 \\ -36 & 72 & -36 \\ 54 & -27 & 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -4 & 8 & -4 \\ 6 & -3 & 7 \end{pmatrix}$,

puis $A^3 = A^2 \times A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 62 & -65 & 65 \\ -56 & 80 & -56 \\ 74 & -47 & 71 \end{pmatrix}$.

2.5 inverse d'une matrice

définition : une matrice carrée M est inversible s'il existe une matrice de même taille N telle que $MN = I$.

On note alors $N = M^{-1}$, et alors on a aussi $M^{-1}M = I$.

L'ensemble des matrices inversibles de taille n est noté $GL_n(\mathbb{R})$.

proposition : si A et inversible et si $Y = AX$, alors $X = A^{-1}Y$.

Cette propriété est utilisable de deux manières différentes :

1. pour calculer A^{-1}, en résolvant un système linéaire.
   En particulier, A est inversible si et seulement si le système admet une solution unique,
2. pour calculer X connaissant Y et A^{-1} (au lieu de résoudre le système) : il suffit d'effectuer une multiplication de la matrice A^{-1} par le vecteur Y pour trouver la solution X du système.

exemple : pour inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, on peut résoudre $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ -x_1 + 3x_2 = y_2 \end{cases}$
Les coefficients dans l'expression de $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ seront les coefficients de A^{-1}.

On résoud, par exemple par combinaisons linéaires : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 5x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$,

donc $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2\dfrac{y_1 + y_2}{5} = \dfrac{3y_1 - 2y_2}{5} \\ x_2 = \dfrac{y_1 + y_2}{5} \end{cases}$, ce qui montre que $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3 déterminant

On rappelle les éléments du cours de première année - S2 :

Le déterminant est une application $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vérifiant pour toutes matrices A, B $\det(AB) = \det(A)\,\det(B)$ et $\det(I) = 1$.

proposition : le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si la matrice n'est pas inversible.

On peut le calculer par récurrence en développant selon une ligne ou une colonne.

exemple 1 : le déterminant de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

exemple 2 :

$\det\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ -2 & 8 & -2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right) = \frac{2(8 \times 5 - (-2) \times 1) + 5(-2 \times 5 - (-2) \times 8) + 5(-2 \times 1 - 8 \times 8)}{27} = \frac{-216}{27} = -8.$

Avant ce développement il est possible d'effectuer des opérations sur les lignes ou les colonnes, de manière à faire apparaître des zéros :

- Ajouter un multiple d'une ligne ou colonne à une autre ($L_i \leftarrow L_i + kL_j$, $C_i \leftarrow C_i + kC_j$) ne change pas la valeur du déterminant,
- Permuter deux lignes ou deux colonnes ($L_i \leftrightarrow L_j$, $C_i \leftrightarrow C_j$) change le signe du déterminant,
- Multiplier une ligne par un scalaire k ($L_i \leftarrow kL_i$) multiplie le déterminant par k.

exemple : reprendre l'exemple 2 pour calculer plus simplement le déterminant.

lien entre déterminants et bases : Un système de n vecteurs dans un espace de dimension n est une base si et seulement si la matrice carrée formée par les n vecteurs est inversible, i.e si son déterminant est non nul. **exemple :** $\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc

les vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de l'espace

(obtenue par une rotation d'angle $\pi/4$ autour de $\vec{e_3}$ de la base canonique)

lien entre déterminants et solution d'un système linéaire : si on considère le système $AX = Y$, A et Y étant connus, et s'il admet une solution unique (i.e si $\det(A) \neq 0$), la coordonnée x_i de X peut se calculer par $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$, A_i étant la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par le vecteur Y.

exemple : à partir de $\begin{cases} (R+R_1)I_1 & + & R_2I_2 & + & R_3I_3 & = & E_1 \\ R_1I_1 & + & (R+R_2)I_2 & + & R_3I_3 & = & E_2 \\ R_1I_1 & + & R_2I_2 & + & (R+R_3)I_3 & = & E_2 \end{cases}$ on obtient par exemple $I_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} E_1 & R_2 & R_3 \\ E_2 & (R+R_2) & R_3 \\ E_3 & R_2 & (R+R_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R+R_1) & R_2 & R_3 \\ R_1 & (R+R_2) & R_3 \\ R_1 & R_2 & (R+R_3) \end{vmatrix}}$.

On peut calculer le dénominateur en enlevant la première ligne aux deux suivantes, puis en additionnant les deux dernières colonnes à la première : $\begin{vmatrix} R+R_1 & R_2 & R_3 \\ R_1 & R+R_2 & R_3 \\ R_1 & R_2 & R+R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R+R_1 & R_2 & R_3 \\ -R & R & 0 \\ -R & 0 & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R+R_1+R_2+R_3 & R_2 & R_3 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = R^2(R+R_1+R_2+R_3)$.

Pour le numérateur, on peut commencer par enlever la première ligne aux deux suivantes : $\begin{vmatrix} E_1 & R_2 & R_3 \\ E_2-E_1 & R & 0 \\ E_3-E_1 & 0 & R \end{vmatrix}$, puis développer par rapport à la troisième colonne : $R_3(-R(E_3-E_1)) + R(RE_1 - R_2(E_2-E_1))$.

lien entre déterminants et inverse d'une matrice : l'inverse de la matrice A est obtenu en calculant le coefficient de la ligne i et de la colonne j comme $(-1)^{i+j}\dfrac{\det \Gamma_{j,i}}{\det A}$, $\Gamma_{j,i}$ étant la matrice obtenue en enlevant la colonne i et la ligne j de la matrice A.

remarque 1 : ne pas essayer de calculer un déterminant de grande taille ainsi...

remarque 2 : mais on peut cependant calculer le déterminant d'une matrice carrée de taille 2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

4 applications linéaires

définition : si E et F sont des espaces vectoriels, f est linéaire si pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de E et tous réels λ, μ, on a $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

exemple 1 : une rotation de l'espace (d'axe passant par O).

exemple 2 : une symétrie orthogonale par rapport à un plan passant par O.

exemple 3 : l'application qui à un polynôme P associe sa dérivée est une application linéaire.

exemple 4 : l'application qui a une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ associe son intégrale sur $[a,b]$ est linéaire.

définition : si $B_1 = (\vec{e_i})$ est une base de E et $B_2 = (\vec{f_i})$ une base de F, on peut écrire pour tout i : $f(\vec{e_i}) = a_{i1}\vec{f_1} + \ldots + a_{ip}\vec{f_p}$.

La matrice des $[a_{ij}]$ est appelée **matrice de f dans les bases B_1 et B_2.**

Changement de bases

Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même est appelée **endomorphisme**. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $L(E)$.

Si on fixe une base B de E, on peut associer à tout endomorphisme $u \in L(E)$ sa matrice M dans la base B (en prenant $B_1 = B_2$ dans ce qui précède).

Par ailleurs, si B' est une autre base de E, on note $P = Mat_B(B')$: c'est la matrice dont les colonnes sont les coefficients dans la base B des vecteurs formant B'

Alors la matrice dans B' de u est la matrice $P^{-1}MP$.

L'opération de **conjugaison** par une matrice inversible correspond donc à l'opération de changement de base sur les applications linéaires.

Noyau et image Soit E, F deux espaces vectoriels et $u \in L(E,F)$.

On appelle **noyau** de u, et on note $\ker(u)$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $u(x) = 0$.

On appelle **image** de u, et on note $\mathrm{im}\,(u)$, l'ensemble des $y \in F$ tels qu'il existe x dans E tels que $y = u(x)$.

Par extension, on note aussi $\ker(A - \lambda I)$ l'ensemble des vecteurs X tels que $AX = \lambda X$.

5 polynôme caractéristique

définition : $\det(A - XI)$ est un polynôme, appelé **polynôme caractéristique** de A.

proposition : si P est le polynôme caractéristique de A, $P(A) = 0$.

applications :
$\to$ déterminer A^{-1}
$\to$ déterminer les puissances de A

exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique est $\begin{vmatrix} 1-X & 2 & -1 \\ 0 & 2-X & 1 \\ 1 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2-X & 1 \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)(-1-X) + 2 + 2 - X = -X^3 + 2X^2 + 2$.

Il est donc inutile de vérifier que $-A^3 + 2A^2 + 2I = 0$.

Et on obtient facilement :
$A^3 = 2A^2 + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 2 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

et en multipliant par A^{-1} : $-A^2 + 2A + 2A^{-1} = 0$, donc $A^{-1} = \dfrac{A^2 - 2A}{2} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour calculer A^p, on peut diviser le polynôme X^p par P : $X^p = QP + R$, avec R de degré strictement inférieur à celui de P. Alors $A^p = Q(A)P(A) + R(A)$, mais comme $P(A) = 0$, $A^p = R(A)$ et (pour une matrice 3×3) on est ramené du calcul d'une puissance p-ième au calcul de A^2 et à des additions de matrices.

Ainsi, par exemple, $X^5 = (-X^3 + 2X^2 + 2)(-X^2 - 2X - 4) + 10X^2 + 4X + 8$, donc $A^5 = 10A^2 + 4A + 8I = \begin{pmatrix} 12 & 68 & 16 \\ 10 & 56 & 14 \\ 4 & 20 & 4 \end{pmatrix}$.

6 Réduction des matrices

6.1 valeurs et vecteurs propres

définitions : un **vecteur propre** d'une matrice A est un vecteur X tel que AX et X sont colinéaires, i.e pour lequel il existe λ tel que $AX = \lambda X$.

Une valeur λ qui correspond à au moins un vecteur propre non nul est appelée **valeur propre** de A.

Ainsi, λ est une valeur propre de A si et seulement si le noyau de $A - \lambda I$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Les valeurs propres de A sont les λ pour lesquelles le système $AX = \lambda X$ a des solutions non nulles. Ce sont donc les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible, i.e $\det(A - \lambda I) = 0$.

On en déduit une méthode pour déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A :

$\to$ on calcule le polynôme $\det(A - \lambda I)$,
$\to$ on détermine ses racines : les valeurs propres de A,
$\to$ pour chaque racine λ on résoud le système $AX = \lambda X$, les solutions sont les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ

exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors le polynôme caractéristique est $-X^3 + 3X^2 - 2X$, donc les racines évidentes sont 0, 1 et 2. Ainsi, **les valeurs propres de A sont 0, 1, 2**.

On résoud alors $AX = 0$: on trouve pour solutions les $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

De même, $AX = X$ admet pour solutions les $\mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $AX = 2X$ les $\nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nu \in \mathbb{R}$.

En particulier, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

6.2 diagonalisation

proposition : si une matrice A carrée de taille n admet une base formée de vecteurs propres, si P est la matrice formée par ces vecteurs, alors $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, dont les coefficients sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

exemple 1 : si l'on reprend l'exemple précédent, on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut calculer $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, et on n'a pas besoin de faire le calcul pour affirmer que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

exemple 2 : soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

0 est la seule valeur propre de B, et les vecteurs propres sont les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On ne peut trouver une base de vecteurs propres, et B n'est pas diagonalisable.

(autre manière de voir : si B était diagonalisable, la matrice diagonale, n'ayant que des 0 sur la diagonale, serait nulle, et donc B aussi)

application aux calculs de puissances : si on sait diagonaliser A, on peut alors facilement calculer A^n.

En effet, $D = P^{-1}AP$, donc $PDP^{-1} = A$, donc $A^n = PD^nP^{-1}$.

Mais D^n est immédiat à calculer, et on en déduit facilement la valeur de A^n.

exemple : en reprenant l'exemple ci-dessus, on voit que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2^n & -2^n & 2-2^n \\ 1-2^n & 2^n & -1+2^n \\ -3+2^n & -2^n & 3-2^n \end{pmatrix}.$$

critères de diagonalisabilité : en général, la méthode évoquée ci-dessus est la plus simple pour savoir si une matrice est diagonalisable. On peut cependant donner deux cas, assez fréquents, qui assurent qu'une matrice est diagonalisable :

— une matrice carrée de taille n qui a n valeurs propres distinctes est diagonalisable,

— une matrice symétrique est diagonalisable.

recherche des valeurs propres : on peut citer deux astuces pour déterminer les valeurs propres :

— leur somme est égale à la **trace** de la matrice, c'est-à-dire la somme des termes de la diagonale,

— leur produit est égal au déterminant de la matrice.

6.3 quelques exemples concrets

6.3.1 matrice d'inertie

Si S est un solide, on peut définir ses moments d'inertie I_x, I_y et I_z par rapport aux axes (Ox), (Oy), (Oz) et de même les produits d'inertie : P_{xy}, par rapport aux axes (Ox) et (Oy), P_{yz} par rapport aux axes (Oy) et (Oz), P_{xz} par rapport aux axes (Ox) et (Oz).

On rappelle que, par exemple, $I_x = \int\int\int_S d(M,(Ox))^2\rho(M)\ dV = \int\int\int_S (y^2 + z^2)\,\rho(M)\ dx\,dy\,dz$, et $P_{xy} = \int\int\int_S xy\,\rho(M)\ dx\,dy\,dz$.

La matrice $I = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}$ est appelée **matrice d'inertie** du système.

La matrice d'inertie est symétrique, donc elle est diagonalisable. Ses vecteurs propres indiquent les directions par rapport auxquelles la rotation est équilibrée. Et les valeurs propres correspondantes sont les moments d'inertie par rapport à ces axes.

6.3.2 matrice de covariance

Si X et Y sont deux variables aléatoires, on définit leur **matrice de covariance** $\begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) \end{pmatrix}$.

La matrice, symétrique, est diagonalisable, et les vecteurs propres correspondent aux **composantes principales** ; ils indiquent des axes représentant l'étirement des valeurs.

Si on tire au hasard des points du plan selon la loi de (X,Y), le nuage de points obtenus aura deux axes privilégiés qui correspondent aux vecteurs propres, et les valeurs propres correspondront à l'étirement des valeurs selon ces axes.

6.3.3 système oscillant

On considère sur une droite un ressort de raideur k et longueur au repos $2L$ au bouts duquels sont fixées deux masses m_1 et m_2, d'abscisses x_1 et x_2.

Alors la force sur la première masse est $k(x_2 - x_1 - 2L)$, celle sur la seconde est $-k(x_2 - x_1 - 2L)$.

On a donc, si on note $u_1 = x_1 + L$ et $u_2 = x_2 - L$, les équations $\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 &= -ku_1 + ku_2 \\ m_2\ddot{u}_2 &= ku_1 - ku_2 \end{cases}$, d'où sous forme matricielle :

$$\ddot{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{k}{m_1} & \dfrac{k}{m_1} \\ \dfrac{k}{m_2} & -\dfrac{k}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice, symétrique, est diagonalisable, et ses valeurs propres correspondent aux pulsations propres du système : les valeurs propres sont 0 et $-k(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2})$, les pulsations 0 et $\sqrt{k(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2})}$.

Ces pulsations propres correspondent à deux solutions particulières : des oscillations conjointes des masses, qui laissent le ressort à sa longueur au repos, et d'autre part des oscillations des masses de part et d'autres du centre d'inertie qui reste fixe.

L'avantage de cette méthode est qu'elle est généralisable à un nombre quelconque de masses et de ressorts : le problème de la détermination des valeurs propres de la matrice ne se complique guère quand la taille de la matrice augmente, alors qu'une résolution directe du système devient vite très laborieuse.

6.4 application aux systèmes différentiels du premier ordre

6.4.1 système différentiels diagonal

Soit le système différentiel vérifié par des fonctions $X(t), Y(t), Z(t)$ $\left\{\begin{array}{l} X'=0 \\ Y'=Y \\ Z'=2Z \end{array}\right.$.

On peut bien entendu résoudre séparément chacune des équations : $X(t)=a$, $Y(t)=be^t$, $Z(t)=ce^{2t}$.

6.4.2 système différentiel à matrice diagonalisable

Soit le système différentiel vérifié par des fonctions $x(t), y(t), z(t)$: $\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& -2y \\ y' &=& -x+2y+z \\ z' &=& -x-2y+z \end{array}\right.$.

Il s'écrit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et l'on retrouve la matrice A précédemment diagonalisée.

Si on pose $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et aussi $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Par conséquent, en le multipliant par P^{-1} le système devient $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, et on est ramené au cas précédent.

On a $X(t)=a$, $Y(t)=be^t$, $Z(t)=ce^{2t}$, et par conséquent $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ be^t \\ ce^{2t} \end{pmatrix}$, donc les solutions sont de la forme $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) &=& a+2be^t+ce^{2t} \\ y(t) &=& -be^t-ce^{2t} \\ z(t) &=& a+3be^t+ce^{2t} \end{array}\right.$, a, b, c étant des constantes réelles quelconques.

6.4.3 système différentiel à matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$

La vitesse $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ d'une particule dans un champ magnétique vertical uniforme $\vec{B} = B\vec{k}$ vérifie les équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} m\frac{dv_x}{dt} &=& qBv_y \\ m\frac{dv_y}{dt} &=& -qBv_x \\ m\frac{dv_z}{dt} &=& 0 \end{array}\right.,$$

ce qui peut s'écrire $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qB}{m}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{v}$.

La matrice $\frac{qB}{m}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 0, $\frac{qB}{m}i$ et $-\frac{qB}{m}i$: deux sont complexes, et elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais sur $\mathbb{C}$.

On retrouve un résultat du même type : les solutions complexes sont des combinaisons linéaires d'exponentielles $t \mapsto e^{Ot}$, $t \mapsto e^{i\frac{qB}{m}t}$ et $t \mapsto e^{-i\frac{qB}{m}t}$.

Si l'on repasse en réel, il ne sera donc pas surprenant de trouver des solutions en $t \mapsto \cos\frac{qB}{m}t$ et $t \mapsto \sin\frac{qB}{m}t$, ce qui permet de prouver que les trajectoires sont des hélices.

6.4.4 système différentiel à matrice non diagonalisable

Si on cherche à résoudre un système différentiel dont la matrice n'est pas diagonalisable (même sur $\mathbb{C}$) on verra apparaître pour certaines valeurs propres λ, en plus des exponentielles $t \mapsto e^{\lambda t}$, d'autres solutions du type $t \mapsto te^{\lambda t}$, $t \mapsto t^2e^{\lambda t}$, ...

exemple : soit le système $\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& y \\ y' &=& 0 \end{array}\right.$.

Alors on voit directement que $y(t)=a$ et $x(t)=at+b$, a et b étant des constantes réelles : l'unique valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est 0, et les solutions sont des combinaisons linéaires de $t \mapsto e^{0t}$ et $t \mapsto te^{0t}$.