S4 - compléments de mathématiques

1 - Analyse numérique

département Mesures Physiques - IUT1 - Grenoble

Nous allons passer en revue plusieurs méthodes permettant de déterminer des valeurs approchées des solutions d'équations du type $f(x) = 0$.

Il sera parfois plus pratique de résoudre $g(x) = x$: il suffit de poser $f(x) = g(x) - x$ pour voir que les deux types d'équations sont équivalents.

1 Dichotomie

La méthode la plus élémentaire et la plus simple à comprendre est l'algorithme de dichotomie.

Il est simple à mettre en oeuvre et présente l'avantage de n'exiger que la continuité (et pas la dérivabilité) de la fonction étudiée. Mais il a l'inconvénient de n'être utilisable que pour des solutions d'équations réelles.

On rappelle cette conséquence directe du théorème des valeurs intérmédiaires :

proposition : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.

Si $f(a)f(b) < 0$ (c'est-à-dire si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés), f s'annule une fois et une seule sur $]a,b[$.

On fixe donc $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone telle que $f(a)f(b) < 0$, et on note x son unique zéro sur $]a,b[$. On peut donner un encadrement de x aussi précis que l'on souhaite par l'algorithme de dichotomie :

- on part d'un intervalle contenant x ($[a,b]$ par exemple)
- on calcule le milieu $c = \dfrac{a+b}{2}$ de $[a,b]$, puis $f(c)$
  - si $f(c) = 0$, c'est que $x = c$ et on a terminé
  - si $f(a)$ et $f(c)$ sont de signes opposés, $x \in]a,c[$,
  - sinon, c'est que $f(c)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, et $x \in]c,b[$
- on dispose donc d'un nouvel intervalle contenant x, de longueur divisée par deux par rapport à l'intervalle initial.

Il suffit alors de répéter l'opération plusieurs fois pour obtenir un encadrement de x aussi précis que souhaité.

exemple : montrer que $x^2 = 2$ admet une unique solution entre 1 et 2, et en déterminer un encadrement de largeur 10^{-1}.

Il s'agit de trouver un zéro de $f(x) = x^2 - 2$. Comme $f'(x) = 2x$ est strictement positif sur $[1,2]$, f est strictement monotone.

Comme par ailleurs $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 2 > 0$, on sait que f s'annule une fois et une seule entre 1 et 2.

Mais $f(1,5) = 1,5^2 - 2 = 0,25 > 0$, donc le zéro est entre 1 et $1,5$,
$f(1,25) \simeq -0,43 < 0$ donc le zéro est entre $1,25$ et $1,5$,
$f(1,375) \simeq -0,1 < 0$ donc le zéro est entre $1,375$ et $1,5$,
$f(1,4375) \simeq 0,06$ donc le zéro est entre $1,375$ et $1,4375$, et ainsi de suite.
On obtient ainsi un encadrement aussi précis que souhaité de ...$\sqrt{2}$.

exercice : déterminez (en fonction de a, b et n) le nombre d'étapes nécéssaires pour obtenir un encadrement de x de largeur 10^{-p}.

corrigé succint : La largeur de l'intervalle au bout de l'itération n est $(b-a)/2^n$, et on veut donc $(b-a)/2^n \leq 10^{-p}$, soit encore $2^n \geq (b-a)10^p$, soit encore $n \geq \dfrac{p\ln(10) + \ln(b-a))}{\ln 2}$.
Par exemple, si $b - a = 1$ et $p = 2$, il suffit de 7 itérations, de 10 pour $p = 3$, de 14 pour $p = 4$, ...

exercice : on considère l'équation $x^4 + x - 1 = 0$.

Montrer qu'elle admet exactement deux solutions réelles, et déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune de ces solutions.

corrigé succint : On pose $f(x) = x^4 + x - 1$. $f'(x) = 4x^3 + 1$ s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ en $(-1/4)^{1/3}$ (entre -1 et 0), f est décroissante avant et croissante après cette valeur : elle au plus deux zéros.
On remarque que $f(-2) > 0$ et $f(-1) = -1 < 0$: f admet un zéro entre -2 et -1. De même $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ donc l'autre zéro est entre 0 et 1.

On applique la méthode de dichotomie :
$f(-1.5) > 0$ donc le zéro est entre -1.5 et -1.
$f(-1.25) > 0$ donc le zéro est entre -1.25 et -1.
$f(-1.125) < 0$ donc le zéro est entre -1.25 et -1.125.
$f(-1.1875) < 0$ donc le zéro est entre -1.25 et -1.1875.
$f(-1.21875) < 0$ donc le zéro est entre -1.25 et -1.21875.
$f(-1.234375) > 0$ donc le zéro est entre -1.234375 et -1.21875.
$f(-1.234375) > 0$ donc le zéro est entre -1.234375 et -1.21875.
$f(-1.2265625) > 0$ donc le zéro est entre -1.2265625 et -1.21875, et on a trouvé un encadrement de largeur inférieure à 8.10^{-3} en 8 itérations.

De même, on trouve pour l'autre zéro l'encadrement $[0.71875, 0.7265625]$.

exercice : on admet (voir TD de S1...) que le premier maximum local strictement positif de la fonction $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ est dans l'intervalle $]\pi/2, 3\pi/2[$ et est solution de $\tan(x) = x$.

Expliquer pourquoi cette équation admet effectivement une unique solution sur $]\pi/2, 3\pi/2[$.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution.

En déduire une valeur approchée de la valeur de $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ en ce point.

corrigé succint : sur l'intervalle $]\pi/2, 3\pi/2[$, $f(x) = \tan(x) - x$ est dérivable de dérivée $\tan^2 x > 0$, et a pour limite $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite. Par conséquent, f s'annule une fois et une seule.
Si on part de $a = \pi/2$ et $b = 3\pi/2$, on trouve ainsi successivement les les encadrements : $]3.1415927, 4.712389[$, $]3.92699085, 4.712389[$, $]4.319689925, 4.712389[$, $]4.319689925, 4.5160394625[$, $]4.41786469375, 4.5160394625[$, $]4.466952078125, 4.5160394625[$, $]4.4914957703125, 4.5160394625[$, $]4.4914957703125, 4.50376761640625[$, $]4.4914957703125, 4.49763169335938[$, donc un encadrement à 10^{-3} est par exemple $]4.491; 4.498[$.
Enfin le sinus cardinal au carré en ce point est compris entre 0.0472.

2 Méthode du point fixe

Cette méthode permet de résoudre numériquement des équations du type $g(x) = x$, autrement dit de déterminer les points fixes de g.

Elle est basée sur l'utilisation d'une suite définie par une récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$. En effet, si une telle suite admet une limite x, $x_n \to x$, alors $x_{n+1} \to x$, et si g est continue, en passant à la limite on obtient $g(x) = x$: la limite d'une telle suite est forcément un des points fixes de g.

Toute la difficulté est de s'assurer que la suite converge...et vers le "bon" point fixe : une suite $x_{n+1} = f(x_n)$ peut ne pas converger, ou converger vers un autre point fixe que celui cherché.

On dispose néanmoins d'une
proposition : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que :
— il existe s dans I tel que $g(s) = s$,
— I est stable par g (i.e $g(I) \subset I$),
— il existe $a < 1$ tel que pour tout x de I, $|g'(x)| < a \leq 1$.
Alors si on prend x_0 un élément de I quelconque et si on définit pour tout n $x_{n+1} = g(x_n)$, alors x_n converge vers s.

démonstration : par l'inégalité des accroissements finis, on peut écrire $|x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| \leq a|x_n - s|$ donc en réitérant, $|x_{n+1} - s| \leq a^n|x_0 - s|$ et comme $0 < a < 1$, cette suite tend bien vers 0.

exemple : on veut résoudre sur $[0, 1]$ l'équation $e^{-x}/2 = x$ à 10^{-2} près. On pose pour cela $g(x) = e^{-x}/2$.

On prend $I = [0, 1]$. Alors g est décroissante sur I, $g(0) = 1/2$ et $g(1) > 0$, donc I est stable par g. Sur I, $|g'| \leq 1/2$. Donc la suite définie par $x_0 = 0$ (ou toute autre valeur de I) et $x_{n+1} = g(x_n)$ va converger vers la solution de l'équation $g(x) = x$.

De fait on trouve $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.303265329856317$, $x_3 = 0.369201574987365$, $x_4 = 0.345643025214076$, $x_5 = 0.353882548155$, $x_6 = 0.350978704353309$, $x_7 = 0.351999372902275$, $x_8 = 0.351640281500922$, $x_9 = 0.351766575176508, \ldots$, $x_{20} = 0.351733710914178, \ldots$

x_7 est donc une valeur approchée de la solution à 10^{-2} près.

exercice : donner, en fonction de p, de la largeur l de I et de a le nombre d'étapes nécessaires pour être sûr d'obtenir une approximation à 10^{-p} près de s par cette méthode.

corrigé succint : On repart de la relation $|x_{n+1} - s| \leq a^n|x_0 - s|$.
En particulier, $|x_{n+1} - s| \leq la^n$, il suffit donc de prendre $la^n \leq 10^{-p}$ soit $n \geq \dfrac{-p\ln(10) - \ln(l)}{\ln(a)}$.
Ainsi si $l = 1$, $p = 3$ et $a = 1/2$ on trouve par exemple $n = 10$.
L'efficacité de cette méthode est comparable à celle de la dichotomie.

Les conditions de la proposition ci-dessus ne sont pas faciles à vérifier en pratique. Mais, si x_0 est "assez proche" de s et si $|g'(s)| < 1$, la suite a de bonnes chances d'être convergente vers s. On dit que s est un point fixe attractif.

Mais en revanche si $|g'(s)| > 1$, il ne peut y avoir convergence : on dit que s est un point fixe répulsif.

point fixe répulsif si $|g'(s)| > 1$, la suite (x_n) ne converge vers s que si elle est stationnaire (si toutes ses valeurs sont égales à s à partir d'un certain rang).

En effet, s'il y a convergence, $\dfrac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|}$ tend vers $f'(s)$ et reste plus grand qu'un certain $e > 1$. On aurait donc, par récurrence, une relation de la forme $|x_n - s| > Ke^n$, qui tend vers l'infini : ainsi, x_n ne peut tendre vers s.

exemple : si on pose $g(x) = \tan(x)$, on a $g'(x) = 1 + \tan^2(x)$ donc tous les points fixes (sauf 0) seront répulsifs...

exercice : posons $g(x) = x + x^2 - 2$. Peut-on espérer trouver des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ par la méthode du point fixe ?

Et en prenant $g(x) = x - (x^2 - 2)/2$?

Si oui, au bout de combien d'itérations obtient-on une valeur approchée à 10^{-3} ?

corrigé succint :
$g'(x) = 1 + 2x$, on est donc sûr que le point fixe positif ($\sqrt{2}$) sera répulsif...
$g'(x) = 1 - x$, donc si $\sqrt{2}$ est entre 1.1 et 1.9, on sait que ce point fixe sera attractif.

En partant de $x_0 = 1.5$, on trouve donc successivement : $x_1 = 1.375$, $x_2 = 1.4296875$, $x_3 = 1.40768432617188$, $x_4 = 1.41689674509689$, $x_5 = 1.41309855196381$ et enfin $x_6 = 1.4146747931827$ valeur approchée à 4.10^{-4} près.

exercice : déterminer de même une valeur approchée de e, l'unique solution de $\ln(x) = 1$, en choisissant bien votre fonction g.

corrigé succint :
On pose $g(x) = x - (\ln(x) - 1)$ et on prend $x_0 = 2$.
On trouve successivement $x_0 = 2$, $x_1 = 2.30685281944005$, $x_2 = 2.47096863966544$, $x_3 = 2.56635840409302$, $x_4 = 2.62387047341577$, $x_5 = 2.65921996581762$, $x_6 = 2.68118713196223$, $x_7 = 2.69492747582975$, $x_8 = 2.7035561824692$, $x_9 = 2.70898817146211$, $x_10 = 2.71241297475403$, $x_11 = 2.71457433944211$, $x_12 = 2.71593917940028$, $x_13 = 2.71680136340071$, $x_14 = 2.71734614442528$, $x_15 = 2.71769042260167$.

D'autres valeurs de x_0 (par exemple, 0.5, 1, 3, 7, ..) aboutissent elle aussi à une convergence rapide de la suite vers e.

remarque : l'efficacité de la méthode du point fixe est, en général, comparable à la dichotomie, alors que sa mise-en-oeuvre est plus délicate.

Elle présente néanmoins deux avantages :

- si $g'(s) = 0$, alors la convergence est bien plus rapide...on peut donc parfois essayer de transformer l'équation $g(x) = x$ en une équation équivalente $h(x) = x$ avec $h'(s) = 0$.

- elle n'utilise pas la notion d'ordre et peut plus facilement se généraliser à des équations dont les inconnues ne sont pas des réels mais des vecteurs, des matrices, voire des fonctions.

3 Méthode de Newton

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et l'équation $f(x) = 0$.

On suppose que cette équation admet une solution s, et que l'on dispose d'une valeur x_0 "pas trop éloignée" de s.

On définit alors par récurrence une suite (x_n) en définissant x_{n+1} comme l'abscisse du point de la tangente en x_n à (C_f) d'ordonnée nulle. La tangente a pour équation $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$, donc x_{n+1} vérifie $0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$, soit encore

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

Alors si $f'(s) \neq 0$, on constate que, "souvent", la suite (x_n) converge vers s. Et dans ce cas, cette convergence est très rapide.

exemple : si on applique la méthode de Newton pour trouver le zéro de la fonction $\tan x - x$ compris entre $\pi/2$ et $3\pi/2$, on constate que la méthode est très sensible au choix de x_0. Avec par exemple $x_0 = 1.6$, 2, 3, 4 ou 5 la suite ne converge pas.

Mais si on utilise une approximation donnée par la troisème étape de la méthode de dichotomie, $]4.319689925, 4.712389[$, pour prendre par exemple pour valeur initiale 4.32, on trouve successivement $x_0 = 4.32$, $x_1 = 4.64604505293987$, $x_2 = 4.60011341709112$, $x_3 = 4.54584263629223$, $x_4 = 4.50619913010943$, $x_5 = 4.49417804044126$, $x_6 = 4.49341224308124$, $x_7 = 4.49340945794565$, $x_8 = 4.49340945790906$, $x_9 = 4.49340945790906$, autrement dit au bout de 9 itérations le résultat est exact à 10^{-13} !

En prenant de même $x_0 = 4.7$, on obtient le même résultat en 10 itérations.

Cette convergence rapide s'explique quand on calcule $x_{n+1} - s$ en fonction de $x_n - s$. En effet on a (développement limité d'ordre 2 de f en s) :

$f(x_n) = f(s) + f'(s)(x_n - s) + f''(s)(x_n - s)^2/2 + \ldots$ (car $f(s) = 0$)

et aussi (développement limité d'ordre 1 de f' en s) :

$f'(x_n) = f'(s) + f''(s)(x_n - s) + \ldots$

par conséquent, $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x_n - s) - \dfrac{f''(s)}{2f'(s)}(x_n - s)^2 + \ldots.$

Ainsi, finalement, $x_{n+1} - s = x_n - s - ((x_n - s) - \dfrac{f''(s)}{2f'(s)}(x_n - s)^2 + \ldots) \simeq \dfrac{f''(s)}{2f'(s)}(x_n - s)^2$. Donc $|x_{n+1} - s| \simeq K|x_n - s|^2$: cette relation est bien plus intéressante que la relation $|x_{n+1} - s| \simeq a|x_n - s|$ donnée par la méthode du point fixe. On parle de **convergence quadratique**.

exercice : déterminer par la méthode de Newton une valeur approchée à 10^{-12} de la solution de l'équation $\cos x = x$.

corrigé succint : La solution est forcément entre 0 et 1...
on trouve en seulement 4 itérations à partir de $x_0 = 1$: $x_1 = 0.750363867840244$, $x_2 = 0.739112890911362$, $x_3 = 0.739085133385284$, $x_4 = 0.739085133215161$.

A partir de $x_0 = 0$ de même, 5 itérations suffisent !

remarque : méthode de la sécante on ne dispose pas toujours d'une expression "algébrique" de f mais seulement de la possibilité de calculer ses valeurs. Il est alors impossible de calculer une expression de f', mais on peut remplacer l'expression de $f'(x_n)$ par sa valeur approchée $\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$...Cette méthode est un peu moins efficace mais reste néanmoins intéressante.