3- Séries

1 Séries : définitions et premières propriétés

On appelle série de terme général (u_n), et on note $\sum u_n$, la suite des sommes partielles des u_n, soit la suite $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, ..., $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

u_n est le **terme général** de la série $\sum u_n$.

On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite S_n admet une limite finie, et on note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ cette limite.

Dans le cas contraire on dit que la série **diverge**.

exemple : la série de terme général constant égal à 1 diverge.

En effet, pour tout n la somme partielle vaut $S_n = n + 1$, de limite infinie.

exemple : la série de terme général $(-1)^n$ diverge.

En effet, les sommes partielles $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ valent alternativement 1 et 0 et n'ont pas de limite.

exemple - série géométrique : soit r un nombre complexe différent de 1.

Alors la série $\sum r^n$ converge si et seulement si $|r| < 1$.

En effet, on sait (somme des termes d'une suite géométrique de raison r) que $S_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$.

Si $|r| = 1$ (et $r \neq 1$ pour que la formule ait un sens), S_n n'a pas de limite. Si $|r| > 1$, $|S_n|$ tend vers l'infini. En revanche, si $|r| < 1$, S_n tend vers $\dfrac{1}{1-r}$, et on a donc

$$\boxed{\text{si } |r| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.}$$

exemple : la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et a pour somme 1.

En effet, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ donc $\sum_{n=1}^{N} = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + \ldots + (1/N - 1/(N+1)) = 1 - 1/(N+1)$ a pour limite 1 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

proposition : si $\sum u_n$ converge, (u_n) tend vers 0.

En effet, $u_n = S_n - S_{n-1}$, donc si S_n converge, S_{n-1} aussi et vers la même limite, et par conséquent u_n tend vers 0.

attention la réciproque est fausse : la série $\sum 1/n$ diverge.

En effet, $S_{2n} - S_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$ est une somme de n termes tous au moins égaux à $\dfrac{1}{2n}$, donc la somme dépasse $n\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Mais si S_n convergeait, S_{2n} aurait la même limite et donc $S_{2n} - S_n$ tendrait vers 0...

2 Série à termes positifs

Si les u_n sont positifs, la suite des sommes partielles S_n est croissante, donc elle converge si et seulement si elle est majorée. On obtient alors facilement trois propositions qui permettent d'étudier la convergence des séries à termes positifs :

comparaison : on considère deux suites telles que pour tout n, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :
si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,
si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

exemple : $\sum \dfrac{x^n}{n}$ converge si $0 < x < 1$.

En effet, si $n \geq 1$, $\dfrac{x^n}{n} \leq x^n$, et $\sum x^n$ converge.

exemple : $\sum nx^n$ converge si $0 < x < 1$.

En effet, si on fixe a tel que $x < a < 1$, alors $nx^n = na^n(x/a)^n$.

$n(x/a)^n$ tend vers 0 en l'infini, donc pour n assez grand cette quantité est plus petite que 1, et donc $0 \leq nx^n \leq a^n$. Comme $\sum a^n$ converge, $\sum nx^n$ converge aussi.

équivalence : on considère deux suites telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

exemple : la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge ; en effet, $\dfrac{1}{n^2}$ est positif et $\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n(n+1)}$, terme général d'une série convergente.

intégrales : on considère $f : [0, +\infty[$ continue décroissante et de limite nulle en $+\infty$.
Alors $\sum f(n)$ et $\int^{+\infty} f$ sont de même nature.

En effet, on peut écrire pour x dans $[n, n+1]$: $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$, donc en intégrant entre n et $n+1$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leq f(n)$. En sommant entre 0 et N on obtient donc $\sum_{n=1}^{N+1} f(n) \leq \int_0^N f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{n=0}^{N} f(n)$, donc $S_N + f(N+1) - f(0) \leq \int_0^N f(x)\mathrm{d}x \leq S_N$.

Ainsi : si la suite S_N converge, elle est bornée, et donc $\int_0^N f(x)\mathrm{d}x$ aussi : l'intégrale converge.

Si l'intégrale converge, $S_N + f(N+1) - f(0)$ est bornée donc (comme $f(N+1)$ tend vers 0), S_N aussi, donc la série converge.

séries de Riemann : on considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Si $\alpha \leq 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 en l'infini et la série diverge.

Si $\alpha > 0$, la fonction $1/x^\alpha$ est décroissante de limite nulle en l'infini. De plus elle admet pour primitive $\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ si $\alpha \neq 1$, $\ln(x)$ si $\alpha = 1$, et on voit ainsi que l'intégrale converge en l'infini si et seulement si $\alpha > 1$.

Donc

> la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$
> converge si et seulement si $\alpha > 1$

On retrouve en particulier le fait que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

3 séries à termes de signe quelconques ou complexes

Quand la série n'est pas à terme positifs, il peut être plus difficile d'étudier sa convergence. Néanmoins dans beaucoup de cas il suffit d'étudier la convergence de la série des valeurs absolues du terme général :

convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge, $\sum u_n$ converge.
On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente**.

exemple $\sum \dfrac{\sin n}{n^2}$ converge absolument, car $\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, donc elle converge.

Il existe des cas où une série n'est pas absolument convergente mais est convergente :

séries alternées on considère une suite (a_n) décroissante de limite nulle.
Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

exemple la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge (bien qu'elle ne soit pas absolument convergente).

4 séries entières

On appelle **série entière** une fonction définie par une série convergente du type $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

rayon de convergence : toute série entière admet un rayon de convergence $R \in [0; +\infty]$ tel que : si $|x| < R$, la série converge, et si $|x| > R$, la série ne converge pas.

exemple : $\sum \dfrac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1.
En effet, si $|x| > 1$, x^n/n ne tend pas vers 0, la série diverge.
Si $|x| < 1$, on a vu que $\sum |x|^n/n$ converge, donc $\sum x^n/n$ aussi.
Pour $|x| = 1$, on constate en particulier que la série converge pour $x = -1$ et diverge pour $x = 1$.

proposition : sur $]-R, R[$ on peut intégrer ou dériver terme à terme une série entière.

exemple : soit pour x réel, $x \in]-1, 1]$, $g(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-x)^n}{n}$.

Sur $]-1, 1[$ $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-x)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \dfrac{1}{1-(-x)} = \dfrac{1}{1+x}$, donc en primitivant, $g(x)$ est de la forme $\ln(1+x) + c$. Comme $g(0) = 0$, $c = 0$, et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-x)^n}{n} = \ln(1+x)$.

De plus, on peut justifier le passage à la limite $x \to 1$ qui permet de prolonger la relation en $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

exemple : soit $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.
On montre tout d'abord que cette expression est définie pour tout x.
On écrit : $\dfrac{|x|^n}{n!} = \dfrac{|x|}{n} \cdot \dfrac{|x|}{n-1} \cdot \dfrac{|x|}{n-2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{|x|}{2} \cdot \dfrac{|x|}{1}$.
Soit p un entier supérieur ou égal à $|x|$, et supposons n au moins égal à $p+2$. Alors $\dfrac{|x|^n}{n!} \leq \dfrac{|x|^2}{n(n-1)} \times 1 \times |x|^p$ (on garde les deux premiers termes, on majore les p derniers par $|x|$ et "ceux du milieu" par 1).
L'expression est donc majorée par une constante (qui dépend de x, mais pas de n) multipliée par $\dfrac{1}{n(n-1)}$, qui est le terme général d'une série convergente. Le rayon de convergence de cette série entière est donc infini.
Alors en dérivant on obtient $h'(x) = h(x)$ et $h(0) = 1$, donc $h(x) = e^x$.

exemple : en appliquant ce qui précède à ix (on remplace x par ix dans l'expression ci-dessus), on obtient les développements en série entière $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et

$\sin(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.