Produit scalaire, produit vectoriel

département Mesures Physiques - IUT1 - Grenoble

1 Rappels sur les vecteurs

Un vecteur $\vec{u} = \vec{AB}$ est défini par :
– sa **direction** (la direction de la droite (AB)),
– son **sens** (de A vers B),
– sa **norme** (la longueur AB).

Le physicien rajoute souvent une **origine** : si le vecteur représente une force, l'origine A de $\vec{AB}$ correspond au point d'application ; en revanche, pour le mathématicien, si $ABDC$ est un parallélogramme, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux.

Deux vecteurs qui ont même direction sont dits **colinéaires**.
Deux vecteurs dont les directions sont des droites orthogonales sont dits **orthogonaux**.

Entre deux vecteurs, on peut considérer :
- **l'angle géométrique** (ou non orienté), compris entre 0 et π (ou 0 et 180°),
- ou bien **l'angle orienté**, dans $]-\pi,\pi]$ (ou plus généralement, réel, défini à 2π près).
Les angles géométriques formés par $(\vec{u},\vec{v})$ et par $(\vec{v},\vec{u})$ sont égaux, alors que les angles orientés sont opposés.
Deux vecteurs sont **colinéaires** si leur angle orienté est multiple de π.
Deux vecteurs sont **orthogonaux** si leur angle orienté vaut $\pm\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On sait additionner et soustraire deux vecteurs géométriquement ; on sait multiplier un vecteur $\vec{v}$ par un nombre réel λ : $\lambda\vec{v}$ est de même direction que $\vec{v}$, de même sens (si $\lambda > 0$) ou de sens opposé (si $\lambda < 0$), et de norme multipliée par $|\lambda|$.

2 Bases et repères

Deux vecteurs non colinéaires du plan $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (ou trois vecteurs non coplainaires de l'espace $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$) forment une **base**.
Alors tout vecteur peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$: (a,b,c) sont les coordonnées de u dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
De même, la donnée d'un point O et d'une base de vecteurs définit un **repère** de l'espace : les coordonnées d'un point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont alors celles du vecteur $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Un repère est dit **orthogonal** si les vecteurs $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont deux à deux orthogonaux, et **orthonormé** si les vecteurs $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont deux à deux orthogonaux et sont de norme 1.

3 Le produit scalaire

On définit le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par la formule

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u},\vec{v}).}$$

cos étant paire, on a pour tous $\vec{u},\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (le produit scalaire est **commutatif**).
On voit que le produit $\vec{u}.\vec{v}$ est nul si et seulement si $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$ ou $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$, ce que l'on peut résumer en :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = 0 \text{ si et seulement si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}}$$

On admet que le produit scalaire est distributif par rapport aux combinaisons linéaires : $(a\vec{u} + b\vec{v}).\vec{w} = a\vec{u}.\vec{w} + b\vec{v}.\vec{w}$.
Si une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est fixée, on peut ainsi calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées (a,b,c) et (a',b',c') : on a $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ et $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$, donc $\vec{u}.\vec{v} = aa'\vec{i}.\vec{i} + ab'\vec{i}.\vec{j} + ac'\vec{i}.\vec{k} + ba'\vec{j}.\vec{i} + bb'\vec{j}.\vec{j} + bc'\vec{j}.\vec{k} + ca'\vec{k}.\vec{i} + cb'\vec{k}.\vec{j} + cc'\vec{k}.\vec{k}$.
Si la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est quelconque, le calcul s'arrête là. Mais si la base est orthonormée, $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$, et l'expression se simplifie :

> si dans une base orthonormée on a
> $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$,
>
> alors $\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb' + cc'$.
>
> en particulier, en prenant $\vec{u} = \vec{v}$,
> $||\vec{u}||^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Il existe donc deux méthodes pour calculer un produit scalaire : une méthode géométrique utilisant la définition (il faut connaître la norme de chaque vecteur et l'angle qu'ils forment entre eux) et une méthode analytique basée sur les coordonnées des vecteurs.

application : déterminer l'équation du plan (P) de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ et passant par un point $A(x_0,y_0,z_0)$.

$M(x,y,z)$ est dans le plan normal à $\vec{n}$ passant par A si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{AM}.\vec{n}=0$.

On obtient donc l'équation (P) : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

4 le produit vectoriel

Comme son nom l'indique, le produit scalaire de deux vecteurs est un réel. On va définir un autre produit de deux vecteurs, le produit vectoriel, dont le résultat est cette fois un vecteur ; pour cela il suffit de définir sa direction, son sens et sa norme :

> si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs,
> on définit leur **produit vectoriel** $\vec{u}\wedge\vec{v}$ par :
>
> $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est de direction orthogonale à celles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
> le sens de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que le trièdre $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ soit direct,
> $||\vec{u}\wedge\vec{v}||=||\vec{u}||.||\vec{v}||.|\sin(\vec{u},\vec{v})|$.

remarque : le trièdre formé par trois vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est dit **direct** si, au choix :

- quand on place le majeur de la main droite dans le sens de $\vec{u}$, la paume de la main tournée dans le même sens que $\vec{v}$, alors le vecteur $\vec{w}$ a le même sens que le pouce.

- quand on place (sur la main droite) le pouce dans le sens de $\vec{u}$, l'index dans le sens $\vec{v}$, alors le majeur indique le sens de $\vec{w}$.

Comme pour le produit scalaire, la condition de nullité du produit vectoriel est simple :

> $\vec{u}\wedge\vec{v}=0$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Citons une application pratique du produit vectoriel :

> $||\vec{u}\wedge\vec{v}||$ est l'aire du parallélogramme dont les côtés sont construits sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Si l'on échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ni la direction ni la norme ne changent, en revanche le sens est changé en son opposé : $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$ (le produit vectoriel est **anti-commutatif**).

On admet que le produit vectoriel est distributif par rapport aux combinaisons linéaires : $(a\vec{u}+b\vec{v})\wedge\vec{w}=a\vec{u}\wedge\vec{w}+b\vec{v}\wedge\vec{w}$. Alors si une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est fixée, on peut ainsi calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées (a,b,c) et (a',b',c') : $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ et $\vec{v}=a'\vec{i}+b'\vec{j}+c'\vec{k}$, donc $\vec{u}\wedge\vec{v}=aa'\vec{i}\wedge\vec{i}+ab'\vec{i}\wedge\vec{j}+ac'\vec{i}\wedge\vec{k}+ba'\vec{j}\wedge\vec{i}+bb'\vec{j}\wedge\vec{j}+bc'\vec{j}\wedge\vec{k}+ca'\vec{k}\wedge\vec{i}+cb'\vec{k}\wedge\vec{j}+cc'\vec{k}\wedge\vec{k}$.

Si la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est quelconque, le calcul s'arrête là. Mais le plus souvent on travaille dans une base orthonormée directe, et alors comme $\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$, $\vec{i}\wedge\vec{j}=-\vec{j}\wedge\vec{i}=\vec{k}$, $\vec{k}\wedge\vec{i}=-\vec{i}\wedge\vec{k}=\vec{j}$ et $\vec{j}\wedge\vec{k}=-\vec{k}\wedge\vec{j}=\vec{i}$, l'expression se simplifie en $(bc'-b'c)\vec{i}+(ca'-ac')\vec{j}+(ab'-ba')\vec{k}$. Ainsi,

> si dans une base orthonormée directe on a
> $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$,
>
> alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=(bc'-b'c)\vec{i}+(ca'-ac')\vec{j}+(ab'-ba')\vec{k}$.

calcul pratique : pour calculer une coordonnée de $\vec{u}\wedge\vec{v}$, on « oublie » les coordonnées correspondantes dans les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on calcule le déterminant $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma$ des coordonnées restantes, **en rajoutant un signe - pour la deuxième coordonnée**.

Par exemple, si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-2\\7\end{pmatrix}$, on a $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & 7\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 2\\5 & 7\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 2\\3 & -2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31\\3\\-8\end{pmatrix}$

5 Le produit mixte

Comme son nom l'indique, le produit mixte est un produit entre trois vecteurs qui fait intervenir à la fois le produit scalaire et le produit vectoriel :

> Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs,
> on définit leur **produit mixte** $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ par $\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})$.

Le produit mixte ne change pas si l'on permute circulairement les vecteurs : $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]=[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]$. En revanche, si l'on échange deux vecteurs, le signe change : $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$. Pour les autres règles de calcul, on se ramènera à la définition et aux règles de calculs des produits scalaire et vectoriel. On retiendra surtout la propriété :

> $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$ est le volume du pavé dont les côtés sont construits sur les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$.
>
> En particulier, $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ si et seulement si le pavé est plat,
> c'est-à-dire si $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.