documents et calculatrices interdits | durée : 1h30

Nom : | Prénom : | Place :

mathématiques M1105 - S1

DS 1 - 20 novembre 2014

département Mesures Physiques - IUT1 - Grenoble

1. **cinq questions courtes :** (1 point par question)

   (a) Exprimer $\cos(x+\pi/2)$ en fonction de $\sin(x)$.

   $\cos(x+\pi/2) = -\sin(x)$

   (b) Donner la valeur de $\arctan(\sqrt{3})$

   c'est l'unique angle compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont la tangente vaut $\sqrt{3}$: c'est $\pi/3$.
   attention : la question n'est pas de résoudre $\tan x = \sqrt{3}$, il y a une seule valeur ! Pas de $\pi/3 + k\pi$ ici...

   (c) Donner la dérivée de la fonction définie par $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ (A, ω et φ étant des constantes).

   $f'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

   (d) Donner le module et un argument du nombre complexe $\dfrac{3}{-2+i}$.

   noté finalement sur 1.5
   le module est le quotient de celui de 3 par celui de $-2+i$, donc il vaut $3/\sqrt{(-2)^2+1^2} = 3/\sqrt{5}$.
   l'argument est l'opposé de celui de $-2+i$ (car le numérateur est réel positif donc d'argument nul) donc il vaut $-(\arctan(-1/2)+\pi) = \arctan(1/2) - \pi = \arctan(1/2) + \pi$.
   attention : beaucoup d'oubli du π (ou $-\pi$) pourtant nécessaire...

   (e) On considère la relation $y = \ln(x)$. **noté finalement sur 1.5**
   Déterminer $\mathrm{d}x$ en fonction de y et de $\mathrm{d}y$.

   on a $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y = e^y\mathrm{d}y$

2. **cinq questions un peu moins courtes :** (2 points par question)

   (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $3\cos(x) + 4\sin(x) = 2.5$.

   On normalise l'équation en divisant par $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. L'équation devient $\dfrac{3}{5}\cos(x) + \dfrac{4}{5}\sin(x) = 1/2$.
   On pose $\varphi = \arctan(4/3)$. Alors $\cos(x-\varphi) = \cos(\pi/3)$ donc $x = \pm\pi/3 + \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

   (b) Linéariser l'expression $\cos^2\theta\sin\theta$.

   $(\cos\theta)^2\sin\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta})(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{8i}$, soit encore en développant $\dfrac{e^{3i\theta}+e^{i\theta}-e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}}{8i}$, soit encore $\dfrac{\sin(3\theta)+\sin(\theta)}{4}$.

   (c) Factoriser sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ le polynôme $2X^3 - 2X^2 + 4X - 4$.

   1 est une racine "évidente". En divisant le polynôme par $X-1$ on trouve un reste nul et un quotient $2X^2+4$, donc $X^3 - X^2 + 4X - 4 = (X-1)(2X^2+4) = 2(X-1)(X^2+2)$, ce qui est la factorisation sur $\mathbb{R}$ (car X^2+2 est un polynôme de degré 2 sans racine réelle).
   Sur $\mathbb{C}$ on peut factoriser $X^2+2 = (X-\sqrt{2}i)(X+\sqrt{2}i)$ donc $X^3 - X^2 + 4X - 4 = 2(X-1)(X-\sqrt{2}i)(X+\sqrt{2}i)$.
   (beaucoup d'oublis du coefficient 2 dans la décomposition complexe)

   (d) Déterminer la différentielle de $f(x,y) = \dfrac{x^2}{(3y+2)^3}$.

   $\mathrm{d}f = 2x(3y+2)^{-3}\mathrm{d}x - 9x^2(3y+2)^{-4}\mathrm{d}y = \dfrac{(6xy+4x)\mathrm{d}x - 9x^2\mathrm{d}y}{(3y+2)^4}$.

   (e) Déterminer la valeur exacte de $\cos(13\pi/12)$.

   On a $\cos(2\times 13\pi/12) = 2\cos^2(13\pi/12)^2 - 1$ donc
   $\cos^2(13\pi/12) = \dfrac{1+\cos(13\pi/6)}{2} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$.
   Comme $13\pi/12$ est entre π et $3\pi/2$, $\cos(13\pi/12) < 0$.
   Ainsi, $\cos(13\pi/12) = -\sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$.
   (beaucoup d'oubli du signe -...)

3. **exercice** (5 points) **finalement sur 4 points : 1.5+1.5+0.5+0.5**
Les questions a et b sont totalement indépendantes l'une de l'autre.
Aucune connaissance en électricité n'est nécessaire dans cet exercice.

(a) On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{1+(x-1/x)^2}$.

Déterminer les extrema de f s'ils existent (c'est à dire : maximum et valeur maximale, minimum et valeur minimale).

On peut éviter ici tout calcul de dérivée : $(x-1/x)^2$ est un carré, toujours positif, qui vaut 0 en $x=1$ et tend vers l'infini si x tend vers 0 ou $+\infty$. Le dénominateur admet donc un minimum en $x=1$ et pas de maximum. f étant un inverse, elle admet donc un maximum en $x=1$ (valeur maximale 1) et tend vers 0 en 0 et l'infini : pas de minimum. Autre solution plus calculatoire : $f'(x) = -2(1+1/x^2)(x-1/x)/(1+(x-1/x)^2)$ est du signe de $1/x-x$ donc positif pour $0 < x < 1$ et négatif pour $x > 1$. f est donc croissante avant 1 puis décroissante : $f(1)$ est la valeur maximale. $f(x)$ tendant vers 0 en 0 et $+\infty$ il n'y a pas de minimum.

(b) R, L, C, ω sont des constantes réelles strictement positives.
On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\pi/2$, avec $j^2 = -1$ (notation "électrique" du nombre habituellement noté i).

Déterminer le module H et l'argument φ de $\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+jC\omega+\dfrac{1}{jL\omega}}$.

Le module H est l'inverse du module de $\dfrac{1}{R}+jC\omega+\dfrac{1}{jL\omega} = \dfrac{1}{R}+j(C\omega-\dfrac{1}{L\omega})$ donc
$$H = \frac{1}{\sqrt{1/R^2+(C\omega-1/(L\omega))^2}}.$$
L'argument est l'opposé de celui de $\dfrac{1}{R}+j(C\omega-\dfrac{1}{L\omega})$ soit $\arctan(RC\omega - R/(L\omega))$.

(c) Soit $G = 20\log_{10}(H)$. On prend ici, dans les unités de base du système international, $R = 1000$, $C = 10^{-3}$, $L = 1000$. Exprimer alors G en fonction de ω.

Avec les valeurs numériques données on trouve que
$$H = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}+(10^{-3}\omega-10^{-3}/\omega)^2}} = \frac{10^3}{\sqrt{1+(\omega-1/\omega)^2}} = 10^3\sqrt{f(\omega)}$$ donc
$G = 20(3+\log_{10} f(\omega)/2)$.

(d) En utilisant la question a, déterminer la valeur de ω pour laquelle G est maximale.

$\log_{10}$ étant strictement croissante, les maximum et minimum de G sont ceux de f, donc G n'admet pas de minimum, et admet un maximum pour $\omega = 1$.

(meilleure note 19, plus basse 1.75, moyenne 10.16, écart-type 4.15)