DS 1 - 21 octobre 2021

département Mesures Physiques - IUT1 - Grenoble

1. **six questions courtes :** (1 point par question)

(a) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ donner l'angle entre $\vec{\imath}$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-2, \sqrt{12})$.

L'angle vaut $\arctan(-\sqrt{12}/2) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = -\pi/3 + \pi = 2\pi/3$.

(b) Développer et simplifier l'expression $(1 - \sqrt{5})^4$

On obtient en utilisant la formule du binôme (coefficients 1 4 6 4 1 pour le triangle de Pascal) :
$1+4(-\sqrt{5})^1+6(-\sqrt{5})^2+4(-\sqrt{5})^3+(-\sqrt{5})^4 = 1-4\sqrt{5}+30-20\sqrt{5}+25 = 56-24\sqrt{5}$

(c) Résoudre l'équation $\cos(x) = -1/\sqrt{2}$

C'est l'équation $\cos(x) = \cos(3\pi/4)$, qui a pour solution $x = \pm 3\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Donner la forme algébrique du nombre complexe $(1 - 3i)(-2 + 5i)$

C'est $13 + 11i$

(e) Mettre $3\cos(x) + \sin(x)$ sous la forme $A\cos(\omega x - \varphi)$, en précisant les valeurs de A, ω et φ.

On factorise $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. L'expression devient $\sqrt{10}(3\cos(x)/\sqrt{10} + \sin(x)/\sqrt{10})$.
Si pose $\varphi = \arctan(1/3)$ alors l'expression est bien $A\cos(\omega x - \varphi)$ avec $A = \sqrt{10}$, $\omega = 1$.

(f) Résoudre l'équation $\ln|x - 1| = 0$

$|x - 1| = 1$ donc $x - 1 = \pm 1$ donc $x = 2$ ou $x = 0$.

2. **quatre questions un peu moins courtes :** (2 points par question)

(a) Donner, sous la forme la plus simplifiée possible, la dérivée de $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

La dérivée est $\dfrac{1 + 2x/(2\sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}$, soit $\dfrac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$ soit enfin $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(b) Linéariser l'expression $\sin^3(x)$.

$\sin^3(x) = (e^{ix} - e^{ix})^3/(2i)^3 = (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})/(-8i) =$
$(2i\sin(3x) - 6i\sin(x))/(-8i) = (-\sin(3x) + 3\sin(x))/4$

(c) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

$\cos(3x)$ est la partie réelle de
$(\cos(x) + i\sin(x))^3 = \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i^3\sin^3(x)$, soit
$\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$

(d) On définit pour tout x réel, $f(x) = xe^{-x}$.
Déterminer les extrema de f.

f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable et de dérivée $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$. La dérivée s'annule pour $x = 1$.

De plus f est de limite $-\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$. La fonction, prenant des valeurs strictement positives (par exemple pour $x = 1$) admet donc un maximum, et pas de minimum.

Le maximum est atteint pour la valeur de x qui annule la dérivée soit $x = 1$, la valeur maximale est $1/e$.

3. **relation entre valeurs de** $arctan$ (6 points) :

(a) Pour $x > 0$ on définit $g(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$.
Que vaut $g(1)$?
Donner, sous la forme la plus simplifiée possible, la dérivée $g'(x)$.
En déduire une expression très simple de $g(x)$.

(b) Calculer **de deux manières différentes** l'argument de $\dfrac{1+i}{1+2i}$.

(c) Déduire des deux questions précédentes une relation entre $\arctan(1)$, $\arctan(2)$ et $\arctan(3)$.

(a) $g(1) = 2\arctan(1) = \pi/2$

$g'(x) = 1/(x^2+1) + (-1/x^2)((1/x^2)+1) = 1/(x^2+1) - 1/(x^2+1) = 0$, la dérivée est nulle.

La fonction est donc constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ donc pour tout $x > 0$, $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$.

(b) Un argument vaut $\arg(1+i) - \arg(1+2i) = \arctan(1) - \arctan(2)$.

Par ailleurs, la forme algébrique du nombre est $(3-i)/5$ donc un argument, $-\arctan(1/3)$.

(c) L'argument est défini à deux π près, donc en identifiant les deux expressions on obtient $\arctan(1) - \arctan(2) = -\arctan(1/3)$ à $2k\pi$ près. Mais $\arctan(1)$ et $\arctan(2)$ sont dans $[0,\pi/2]$ donc la différence est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. De même $-\arctan(1/3)$, et les deux expressions sont bien égales.

Par ailleurs d'après la première question, $\arctan(3) + \arctan(1/3) = \pi/2$ donc $-\arctan(3) = \arctan(3) - \pi/2$.

Finalement, $-\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi/2$.

(meilleure note 20 , plus basse 1, moyenne 10.2)