calculatrice et documents interdits, à l'exception d'une feuille A4 recto-verso manuscrite ; durée : 1h30

Les exercices sont **totalement indépendants** les uns des autres. Merci de soigner la rédaction et les justifications.

Dans tout le sujet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

Exercice A (barème indicatif : 4 points)

Soit λ un nombre réel. On considère le système :

$$\begin{cases} \lambda\, x + y - z = 2\lambda - 1 \\ x - 2\lambda y + \lambda z = \lambda \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

1. pour quelles valeurs de λ le système admet-il une solution (x, y, z) unique ? Donner alors la valeur de z (on ne demande pas x ni y).
2. dans le cas où le système n'admet pas de solution unique, montrer que l'ensemble des solutions est une droite dont on précisera un point et un vecteur directeur.

Exercice B (barème indicatif : 6 points)

On considère le champ de vecteurs $\vec{A} = (x^2 - z)\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} + xz\vec{k}$.

1. Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{A}$.
2. $\vec{A}$ est-il un champ de gradients ?
   Si oui, déterminer une fonction f telle que $\vec{A} = \vec{\mathrm{grad}}(f)$.
3. Calculer le flux sortant de $\vec{A}$ à travers le cube $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
4. Reconnaître la courbe d'équations $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, $z(t) = 0$, avec $t \in [-\pi/2; \pi/2]$.
   Calculer la circulation de $\vec{A}$ le long de cette courbe.

Exercice C (barème indicatif : 3 points)

Une spire circulaire C horizontale de rayon 1 et de centre $O(0, 0, 0)$ est placée dans un champ magnétique d'expression $\vec{B}(r, t) = B_0\, r\, t\, \vec{k}$ en coordonnées cylindriques.

On note D le disque intérieur à la spire.

1. Calculer l'intégrale $I = \int\int_D r\, \mathrm{d}^2 S$.
2. En utilisant la relation $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (loi de Faraday-Henry, l'une des équations de Maxwell) exprimer la circulation du champ $\vec{E}$ le long de C en fonction de I, puis donner sa valeur.
3. Le résultat change-t-il si $\vec{B}(r, t) = B_0\, r\, t\, \vec{u_\theta}$?

Exercice D (barème indicatif : 4 points)

1. Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
   En déduire celui de $\arccos(x)$.
2. Déterminer l'asymptote en $+\infty$ à la courbe d'équation $y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$, et sa position relative par rapport à la courbe.

Exercice E (barème indicatif : 3 points)

On considère un demi-disque D de rayon R et de masse surfacique constante σ, dont on note $[AB]$ le diamètre.

Déterminer le moment d'inertie par rapport à (AB) de D.