

# Travaux pratiques de Mécanique

Responsable de la salle de TP : Guillaume Laget, Guillaume.Laget@univ-grenoble-alpes.fr

Enseignants :

groupe A, Wanda Kellouai, wanda.kellouai@univ-grenoble-alpes.fr

groupes B1, Loïc Rolland, loic.rolland@ac-grenoble.fr ; B2, Lydie Bonal, Lydie.Bonal@univ-grenoble-alpes.fr

groupe C, Mehdi Abbasi, mehdi1abbasi@gmail.com

groupe D, Guillaume Laget, Guillaume.Laget@univ-grenoble-alpes.fr

**Organisation des TPs :** l'enseignement comporte 5 TPs de 4h : TP1, Cinématique sur table à coussins d'air ; TP2, Pendule tournant ; TP3, Pendule de torsion ; TP4, Frottements solides ; TP5, Frottements visqueux.

Chaque (bi | tri)nôme fera durant la première séance le TP dont le numéro est égal à celui de son numéro de (bi | tri)nôme, puis le TP suivant à la séance suivante et ainsi de suite (par exemple en séance 2 : le (bi | tri)nôme 1 fait le TP2, le (bi | tri)nôme 2 le TP3, ... et le (bi | tri)nôme 5 le TP1).

**Préparation des TPs :** chaque TP doit être préparé **individuellement** avant la séance : lecture intégrale du sujet, et réponse aux questions de la partie préparatoire sur la feuille correspondante. Les questions les plus difficiles (marquées d'un astérisque) pourront être traitées en séance avec l'enseignant.

En début de séance, cette partie préparatoire est à présenter à l'enseignant qui la corrigera et complètera, puis à rendre avec votre compte-rendu. **Une absence de préparation aboutira à un malus de 2 points, une préparation superficielle à un malus de 1 point.**

Sans y être recopiée de manière intégrale, cette partie préparatoire sera utile pour la compréhension et la rédaction du CR.

**Évaluation :**

— Chaque TP fait l'objet d'un compte-rendu par (bi | tri)nôme. Les étudiants mettront en oeuvre la méthodologie expliquée lors des enseignements de semestre 1 et résumée par la fiche-méthode distribuée (et disponible sur Chamilo).

Il est (sauf exception) corrigé par l'enseignant et montré aux étudiants pour la séance suivante, puis rendu en fin de semestre.

Une grille d'évaluation est remplie par l'enseignant pour aider les étudiants à identifier les points à améliorer de leurs CR.

— Un partiel d'une heure est organisé en fin de semestre, et porte sur l'ensemble des compétences et connaissances acquises et mises-en-oeuvre lors des 5 TPs.

**Principe fondamental de la dynamique :**

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le centre d'inertie de tout objet qui ne subit pas de force extérieure est immobile ou en translation rectiligne uniforme.

Un système est dit isolé s'il ne subit aucune force extérieure, pseudo-isolé si la somme des forces extérieures qu'il subit est nulle.

Le principe fondamental de la dynamique exprime que, dans un référentiel galiléen, le produit de la masse d'un système par son vecteur accélération est égal à la somme vectorielle des forces extérieures exercées sur le système.

**Quelques exemples de mouvements du centre de masse d'un objet :**

rectiligne : la direction de la vitesse est constante.

rectiligne uniforme : la direction de la vitesse et sa norme sont constantes.

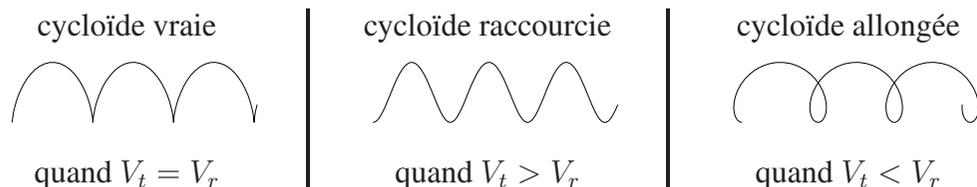
circulaire : la trajectoire est un cercle. La vitesse est orthoradiale dans un système de coordonnées polaires adapté.

circulaire uniforme : la trajectoire est un cercle de rayon  $R$ . La vitesse est orthoradiale et sa norme  $v$  est constante. L'accélération est centripète (c'est-à-dire dirigée vers le centre de la trajectoire) et sa norme vaut  $v^2/R$ .

cycloïdal : composition d'une translation et d'une rotation.

Un mouvement cycloïdal est le mouvement d'un point d'un cercle qui est en rotation uniforme par rapport à son centre et dont le centre est en translation uniforme (par exemple, le mouvement d'un point sur le pneu d'un vélo en déplacement).

Soit  $V_t$  la vitesse de translation et  $V_r$  celle de rotation. On distingue les :

**Loi de composition des mouvements :**

Si le référentiel  $R_2$  est en translation à la vitesse  $\vec{v}_{R_2/R_1}$  par rapport au référentiel  $R_1$ , la vitesse d'un point  $P$  dans  $R_2$  est liée à la vitesse de  $P$  dans  $R_1$  par  $\vec{v}_{P/R_1} = \vec{v}_{P/R_2} + \vec{v}_{R_2/R_1}$

**Quantité de mouvement :**

La quantité de mouvement d'un objet ponctuel de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  vaut  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

La quantité de mouvement d'un système est la somme vectorielle des quantités de mouvement de ses composants.

Dans le cas d'un système (pseudo)-isolé, la quantité de mouvement se conserve.

**Énergie cinétique :**

L'énergie cinétique d'un objet ponctuel de masse  $m$  et vitesse  $v$  vaut  $\frac{1}{2}mv^2$ .

L'énergie cinétique d'un système est la somme des énergies cinétiques de ses composants.

On dit que le choc entre les deux objets composant un système est élastique si l'énergie cinétique du système total est égale avant le choc et après le choc. Sinon il est dit inélastique.

**Centre de masse :**

On considère deux solides de centres de masse  $A$  et  $B$  et de masses  $m_A$  et  $m_B$ .

Le centre de masse  $I$  du système  $\{A + B\}$  est défini par

$$m_A \vec{IA} + m_B \vec{IB} = \vec{0}.$$

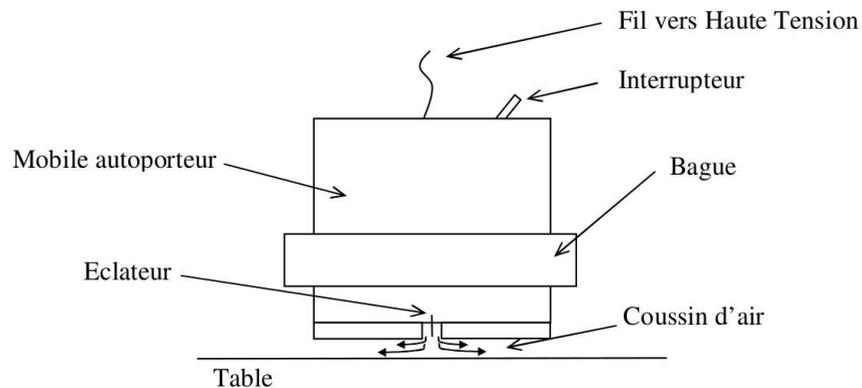
Il est situé sur le segment  $[AB]$ , et plus proche du solide le plus lourd.

## Mobile autoporteur :

Une pompe située à l'intérieur de chaque mobile génère un souffle d'air. Sur une table horizontale, l'évacuation de l'air compense l'effet de l'attraction terrestre et élimine les forces de frottements. La somme des forces extérieures subies par le mobile est donc nulle, il est pseudo-isolé.

Les mobiles peuvent être équipés de surcharges et/ou de bagues à ressorts ou à scratch.

Au niveau du centre de masse du mobile, comme sur les bagues, des éclateurs (fines pointes conductrices) permettront le marquage de leur trajectoire sur une feuille.



## Représentation d'une vitesse, d'une accélération :

• Dans ce TP, la vitesse  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$  d'un point mobile sera approchée par la vitesse moyenne sur un intervalle  $2\tau = 120\text{ms}$ , suffisamment petit pour que l'approximation soit bonne.

Pour 3 points successifs  $M_{i-1}$ ,  $M_i$ ,  $M_{i+1}$ , la vitesse instantanée en  $M_i$  sera ainsi identifiée au vecteur  $\vec{v}_i = \frac{\vec{M_{i-1}M_{i+1}}}{2\tau}$ .

En pratique pour représenter  $\vec{v}_i$  on se contentera de tracer le vecteur  $\vec{M_{i-1}M_{i+1}}$  sur la feuille, et on mesurera sa norme en cm. Dans le compte-rendu on exprimera les valeurs de vitesse en  $\text{cm}_{\text{UPV}}$  (unité pratique pour la vitesse) en indiquant une fois pour toutes le facteur de conversion qu'il faudrait appliquer pour obtenir des  $\text{cm/s}$ .

• De même pour 5 points successifs  $M_{i-2}$ ,  $M_{i-1}$ ,  $M_i$ ,  $M_{i+1}$ ,  $M_{i+2}$  avec un intervalle de temps  $\tau$  entre les points, l'accélération en  $M_i$  est approchée par le vecteur  $\vec{a}_i = \frac{\vec{v_{i+1}} - \vec{v_{i-1}}}{2\tau}$ .

En pratique pour représenter  $\vec{a}_i$  on représentera les vecteurs  $\vec{v_{i+1}}$  et  $\vec{v_{i-1}}$  et on construira géométriquement la somme de  $\vec{v_{i+1}}$  avec  $-\vec{v_{i-1}}$ .

Dans le compte-rendu on exprimera les valeurs d'accélération en  $\text{cm}_{\text{UPA}}$  (unité pratique pour l'accélération) en indiquant une fois pour toutes le facteur de conversion qu'il faudrait appliquer pour obtenir des  $\text{m/s}^2$ .

• Dans ce TP, on cherche à comparer des vitesses ou des accélérations entre elles. La période  $\tau$  est supposé constante.

Pour cette raison, on travaillera en unités pratiques : on exprimera directement les vitesses et les accélérations en  $\text{cm}_{\text{UPV}}$  et  $\text{cm}_{\text{UPA}}$ , correspondant directement à la mesure des vitesses et accélération tracées.

## Partie pratique I

### Mouvement d'un mobile autoporteur (2 heures)

On veut étudier la trajectoire d'un mobile autoporteur animé simultanément d'un mouvement de translation et de rotation sur une table horizontale.

En plus de la trajectoire de son centre de masse  $G$ , on enregistre celle d'un point périphérique  $P$ , grâce à une bague équipée d'un éclateur.

#### Enregistrement de la trajectoire :

Afin de visualiser les trajectoires des points  $P$  et  $G$ , on effectue un marquage ponctuel et synchrone de leurs positions à des intervalles de temps réguliers sur une feuille de papier ordinaire.

Un générateur d'impulsions délivre une haute tension de période réglable ; on choisira 60 ms ici. Deux fils permettent de relier le générateur aux éclateurs.

On place sous le papier ordinaire une feuille spéciale qui ferme le circuit électrique. Cette feuille est composée de trois couches (du bas vers le haut) : un support isolant, une couche d'encre conductrice, puis une couche isolante composée de microcapsules de gélatine. Le côté noir de la feuille spéciale doit être sur le dessus.

On ajoute des poids aux quatre coins des feuilles superposées afin qu'elles ne bougent pas pendant le mouvement.

À chaque impulsion du générateur, un courant circule entre les éclateurs à travers la feuille spéciale conductrice. Une étincelle jaillit alors entre les éclateurs et la couche d'encre, ce qui fait fondre la couche de gélatine et laisse simultanément deux traces d'encre quasi ponctuelles sur le dessous de la feuille de papier ordinaire.

- Installer les feuilles, le mobile, les fils. Vérifier l'horizontalité de la table : si la pompe du mobile est allumée, le mobile placé au centre de la table sans vitesse initiale ne bouge quasiment pas.

- Procéder à quelques essais de lancement, en impulsant au mobile un mouvement de translation et de rotation sur lui-même depuis l'un des coins de la table en direction du coin opposé. Appeler l'enseignant pour vérification avant d'utiliser le générateur d'impulsions.

- Une fois l'enregistrement effectué, les taches d'encre sont apparues sur le dessous de la feuille ordinaire. Identifier le début et la fin du mouvement et les trajectoires respectives des points  $G$  et  $P$ . Numérotter les points chronologiquement, en affectant le même indice aux points synchrones (utiliser le fait que la

distance entre  $G$  et  $P$  est constante au cours du mouvement).

#### Mouvement du centre de masse du mobile $G$ :

- Décrire la trajectoire de  $G$  dans le référentiel du laboratoire  $R_L$ .
- Tracer le vecteur vitesse de  $G$  dans  $R_L$  pour 4 points régulièrement répartis le long de la trajectoire. Mesurer les normes de ces vitesses en unités pratiques ( $\text{cm}_{\text{UPV}}$ ), en rappelant le facteur de conversion vers les unités réelles ( $\text{cm/s}$ ).
- Quelles sont les sources d'incertitudes sur ces mesures ? Avec quelle précision pensez-vous mesurer la norme de  $\vec{v}_G$  en unités pratiques ?
- Quelle est la nature du mouvement de  $G$  enregistré sur la feuille ?
- Si le mobile était parfaitement pseudo-isolé et si la table était parfaitement horizontale, quelle serait la nature du mouvement de  $G$  dans  $R_L$  ? Comparer votre conclusion expérimentale à ce résultat théorique.

#### Mouvement d'un point périphérique $P$ , dans deux référentiels :

- Quel type de cycloïde décrit  $P$  dans le référentiel du laboratoire  $R_L$  ?
- Pour obtenir la trajectoire du point  $P$  dans le référentiel du centre de masse  $R_G$  :
  - tracer sur une feuille de papier calque le point  $G$  au centre, et une droite passant par ce point,
  - faire coïncider le point  $G$  du calque et un point  $G_i$  sur l'enregistrement, de même faire coïncider la droite tracée sur le calque et la trajectoire de  $G$  dans  $R_L$ ,
  - tracer alors sur le calque le point  $P_i$  correspondant,
  - puis de même, faire glisser le calque, de manière à faire successivement superposer  $G$  à chaque point  $G_i$  et placer sur le calque chaque point  $P_i$ .
- Une fois le tracé réalisé : décrire la trajectoire de  $P$  dans  $R_G$ . Tracer les vitesses de  $P$  dans  $R_G$  pour deux points, décrire la direction de ces vecteurs, mesurer leur norme en unités pratiques.
  - Quelles sont les sources d'incertitudes sur ces mesures ? Avec quelle précision pensez-vous les effectuer ?
  - Ces valeurs sont-elles cohérentes avec le type de cycloïde observé plus haut ?
  - Conclure sur la nature du mouvement de  $P$  dans  $R_G$ .

- Tracer l'accélération en deux points. Sa direction est-elle cohérente avec la nature du mouvement de  $P$  dans  $R_G$ .

- Si le mobile était parfaitement pseudo-isolé et si la table était parfaitement horizontale, quel serait la nature du mouvement de  $P$  dans  $R_G$ ?

Comparer votre conclusion expérimentale à ce résultat théorique.

### Compléments :

Les deux questions suivantes sont complètement indépendantes du reste et entre elles. Passer directement à la suite si 2 heures se sont déjà écoulées :

- Vérifier en un point de votre choix la loi de composition des vitesses, en comparant les vitesses de  $P$  dans  $R_L$ , de  $P$  dans  $R_G$  et de  $G$  dans  $R_L$ .

- Dans un mouvement circulaire uniforme de rayon  $R$ , la norme de l'accélération vérifie  $a = v^2/R$ .

Mesurer en unités pratiques, puis convertir en unités réelles, les normes de  $\vec{v}_{P/G}$  et  $\vec{a}_{P/G}$ . Mesurer le rayon  $R$  de la trajectoire de  $P$  dans  $R_G$ .

La relation est-elle vérifiée? (pour répondre proprement à cette question, il faut faire des calculs d'incertitude)

## Partie pratique II

### Choc entre deux mobiles autoporteurs (2 heures)

Sur une nouvelle feuille, vous allez maintenant réaliser une collision entre deux mobiles de centres de masse  $A$  et  $B$ , et dont les masses  $m_A$  et  $m_B$  sont différentes (pour cela, l'un des mobiles sera muni d'une bague de surcharge). Les deux mobiles seront munis de bagues, soit à ressorts, soit à scratch.

Les grandeurs concernant le mouvement après le choc sont notées avec un prime. Par exemple,  $\vec{v}'_A$  est la vitesse de  $A$  avant le choc et  $\vec{v}'_{A'}$  celle après le choc.

### Enregistrements :

On lancera les deux mobiles depuis les coins inférieurs de la table, en faisant en sorte que le choc ait lieu vers le centre de la table (et ainsi, que le centre de masse du système  $\{A + B\}$  se déplace au cours du mouvement).

Identifier les mobiles  $A$  et  $B$ . Déterminer leurs masses  $m_A$  et  $m_B$ .

- Procéder à quelques essais puis réaliser l'enregistrement.

Attention : au moment où la feuille sera retournée, il faut bien identifier chaque trajectoire des mobiles lourd et léger, ainsi que leur sens.

- Numéroter les points en affectant le même indice aux points synchrones.

### Trajectoire du centre de masse $I$ :

- Rappeler l'expression de  $\vec{AI}$  en fonction de  $m_A$ ,  $m_B$  et  $\vec{AB}$ .

Pour chaque couple de points  $(A_i, B_i)$ , tracer le point  $I_i$  correspondant. Quelle est la nature de la trajectoire du centre de masse  $I$ ?

- Faire le bilan des forces exercées sur le système  $\{A + B\}$ .

En déduire la nature du mouvement théorique de  $I$ .

- Tracer la vitesse de  $I$  dans  $R_L$  pour 2 instants (un avant le choc, un après le choc).

- Évaluer les incertitudes associées.

- Conclure sur la nature du mouvement expérimental de  $I$  dans  $R_L$ .

### Étude énergétique :

- Calculer les énergies cinétiques de  $A$  et de  $B$  pour un instant choisi avant le choc, et pour un point choisi après le choc. On exprimera ces énergies en Joules. L'énergie cinétique de chacun des mobiles se conserve-t-elle?

- Calculer, avant et après le choc, l'énergie cinétique totale du système.

- Si cette dernière ne se conserve pas, quel est le sens de sa variation?

A-t-on réalisé un choc élastique ou inélastique?

### Étude de la quantité de mouvement :

- Pour les deux instants (un avant le choc, un après le choc) choisis plus haut, tracer les quantités de mouvement  $\vec{p}_{A_i}$ ,  $\vec{p}_{B_i}$ .

- Par deux constructions différentes, tracer la quantité de mouvement du centre de masse du système.

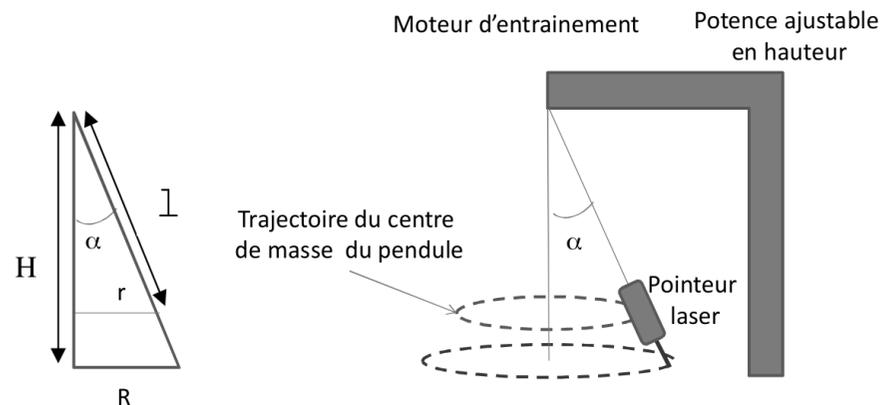
Les deux constructions donnent-elles le même résultat?

- Que peut-on dire de l'évolution de la quantité de mouvement avant et après le choc?

On pourra exprimer ici les quantités de mouvement en  $\text{cm}_{\text{UPQdM}}$ , en donnant une fois pour toute le facteur de conversion vers les  $\text{kg.m.s}^{-1}$ .

**Pendule tournant :**

Un pendule est composé d'une corde au bout de laquelle est attaché un pointeur laser, qui tourne dans un plan horizontal.



Représentation schématique du pendule

Un petit moteur permet d'éviter l'amortissement du mouvement du pendule et de garder une vitesse de rotation constante (régime stationnaire ou permanent).

La corde est attachée à l'axe du moteur, qui est fixé sur une potence de hauteur ajustable. Des cordes de différentes longueurs sont à disposition.

Le pointeur laser permet de visualiser une trajectoire sur la table. Même si sa puissance est limitée, il faut impérativement éviter une exposition directe des yeux à cette source de lumière, on prendra donc garde à ce que l'angle  $\alpha$  ne soit pas trop grand. **Toute personne surprise à jouer avec le pointeur sera exclue de la séance de TP, avec la note 0.**

En régime permanent le pendule tourne autour d'un axe vertical et la corde fait un angle  $\alpha$  constant avec cet axe. On note :

- $r$  le rayon de la trajectoire du centre de masse du pointeur
- $R$  le rayon de la trajectoire dessinée par le laser sur la table
- $H$  la distance entre la table et le point d'intersection entre l'axe de rotation du pendule et l'axe de la corde.

- $l$  la longueur du pendule, c'est-à-dire la distance entre le centre de masse du pointeur laser et le point d'intersection entre de l'axe du pendule et l'axe de la corde.

**Repère cylindrique :**

On travaillera dans un repère cylindrique, dont la direction  $\vec{u}_z$  est l'axe de rotation du pendule. On distinguera bien l'angle  $\theta$  des coordonnées cylindriques (qui repère la position du laser dans son mouvement de rotation horizontal) de l'angle  $\alpha$ , constant, défini plus haut.

**Formule de propagation des incertitudes :**

Si  $f$  est une quantité dépendant de  $x$  et de  $y$ , l'incertitude sur  $f$  est

$$u(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 u(x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 u(y)^2}$$

**Partie pratique****Mesures :**

- Choisir une des cordes fournies (commencer par exemple par la plus courte). Accrocher ses deux extrémités aux deux crochets situés sous le moteur. Pendre le pointeur laser au milieu de la corde.

Ajuster la hauteur de la potence pour faire en sorte que le pointeur laser soit le plus proche possible de la table mais sans risquer de toucher des obstacles pendant le mouvement (faire des lancers à la main pour évaluer vos réglages).

- Mesurer la hauteur  $H$ . On indiquera soigneusement le protocole de mesure. Évaluer l'incertitude associée.
- Mesurer la longueur  $l$ . On indiquera soigneusement le protocole de mesure. Évaluer l'incertitude associée.
- Allumer le laser et centrer la cible graduée posée sur la table.
- Lancer le mouvement à la main et allumer le moteur quasi simultanément.

Régler la tension d'alimentation. On indiquera soigneusement le protocole utilisé pour s'assurer que le mouvement de rotation uniforme est installé.

- Mesurer le rayon  $R$  de la trajectoire dessinée par le laser sur la table.

On indiquera soigneusement le protocole de mesure, tenant compte d'une lecture de la position sur les trois axes représentés sur la cible. Évaluer l'incertitude associée.

- Mesurer la période  $T$  au chronomètre. On indiquera soigneusement le protocole de mesure. Évaluer l'incertitude associée.

Puis recommencer toute la procédure, pour différentes vitesses de rotation et différentes longueurs de cordes (en ajustant la hauteur de la potence si nécessaire) de manière à obtenir au moins 8 mesures différentes des valeurs  $(R, H, l, T)$  pour des angles  $\alpha$  les plus différents possibles.

### Exploitation des résultats :

On indiquera dans le compte-rendu tous les calculs de la partie préparatoire permettant de justifier les formules utilisées.

Pour chaque série de mesures, dans une feuille de tableur :

- Calculer les  $y = \cos(\alpha)$  à partir des distances  $R$  et  $H$ .
- Calculer la vitesse angulaire  $\omega$  à partir de la période  $T$ , puis les valeurs  $x = \frac{1}{l\omega^2}$ .
- Etablir (d'après la partie préparatoire) la relation théorique entre  $y$  et  $x$ .
- Tracer  $y$  en fonction de  $x$ . Comparer votre résultat à la courbe théorique.
- En déduire une valeur expérimentale de  $g$  l'accélération de la pesanteur. Quel est l'écart relatif avec la valeur exacte  $9.81\text{m.s}^{-2}$  ?

### Incertitudes :

- En utilisant l'expression de  $y(R, H)$  et les dérivées partielles calculées en partie préparatoire, ainsi que la formule de propagation des incertitudes, donner une expression de  $u(y)$ .

- Calculer dans le tableur les dérivées partielles utiles puis les valeurs de  $u(y)$  et enfin de  $u(y)/y$  pour chaque série de mesures. Commenter.

- Montrer que  $x = \frac{T^2}{4\pi^2 l}$ .

- Montrer que  $\frac{\partial x}{\partial T} = \frac{T}{2\pi^2 l}$  et que  $\frac{\partial x}{\partial l} = -\frac{T^2}{4\pi^2 l^2}$ .

- En utilisant la formule de propagation des incertitudes, exprimer  $u(x)$  en fonction de  $u(T)$  et  $u(l)$ .

- Montrer que l'on peut écrire assez simplement  $\frac{u(x)}{x}$  en fonction de  $\frac{u(T)}{T}$  et de  $\frac{u(l)}{l}$ .

- Calculer dans le tableur les dérivées partielles utiles puis les valeurs de  $u(x)$  et enfin de  $u(x)/x$  pour chaque série de mesures. Commenter.

- La pente de la courbe de tendance linéaire est calculée par le tableur avec la formule  $\frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$ . Vérifier que cette formule vous redonne la valeur déterminée précédemment.

- La formule de propagation des incertitudes appliquée à cette expression (fonction de  $2n$  variables) montre que l'incertitude associée est alors

$$\frac{\sqrt{\sum_i y_i^2 u^2(x_i) + x_i^2 u^2(y_i)}}{\sum_i x_i^2}$$

- Déterminer l'incertitude sur la valeur de  $g$  associée à votre mesure. Conclure.

**Pendule de torsion :**

Le pendule de torsion est constitué d'un fil métallique vertical fixé à une potence. Un objet est fixé à l'extrémité inférieure du fil et peut osciller autour de l'axe du fil en tordant celui-ci.

**Moments d'inertie :**

Le moment d'inertie  $I$  d'un solide autour d'un axe mesure la résistance à la mise-en-rotation de ce solide : plus il est élevé, et plus il sera difficile de le mettre en mouvement autour de cet axe. Il dépend de la masse du solide, de sa géométrie, et de la distance entre ce solide et l'axe.

En cours et TD de mathématiques, on démontre les formules suivantes pour les moments d'inertie de quelques objets simples de masse  $M$ .

- Moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  d'un objet ponctuel :  $I = MR^2$ , avec  $R$  la distance entre l'axe et l'objet.
- Moment d'inertie par rapport à son axe d'un cylindre plein (ou disque) de rayon  $R$  :  $I = \frac{MR^2}{2}$ .
- Moment d'inertie par rapport à son axe d'un cylindre creux de rayon extérieur  $R_e$  et rayon intérieur  $R_i$  :  $I = \frac{M(R_e^2 + R_i^2)}{2}$ .
- Moment d'inertie d'un cylindre plein de rayon  $R$  et hauteur  $L$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire à l'axe du cylindre en son milieu :  $I = \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12}$ .
- Moment d'inertie d'un cylindre creux de rayon extérieur  $R_e$ , rayon intérieur  $R_i$  et hauteur  $L$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire à l'axe du cylindre en son milieu :  $I = \frac{M(R_e^2 + R_i^2)}{4} + \frac{ML^2}{12}$ .
- Théorème des axes parallèles : soient un objet de masse  $M$ , de moment d'inertie  $I$ , un axe  $\Delta'$  passant par le centre de masse de l'objet, un axe  $\Delta$  paral-

lèle à  $\Delta'$  et  $d$  la distance entre  $\Delta$  et  $\Delta'$ . Alors, on a  $I_\Delta = I_{\Delta'} + Md^2$ .

**Constante de torsion :**

Un fil métallique, soumis à une torsion d'angle  $\theta$  autour de son axe, subit un couple de rappel proportionnel à l'angle (tant que l'on ne dépasse pas la limite d'élasticité du matériau).

La constante de proportionnalité  $C$  dépend du matériau du fil (caractérisé par une constante  $K$ ) et de ses caractéristiques géométriques (longueur  $l$ , diamètre  $d$ ) en suivant la relation  $C = K \frac{d^4}{l}$ .

**Équation du mouvement :**

Dans le cas d'un pendule oscillant autour d'un axe de rotation orienté positivement par le vecteur  $\vec{k}$ , le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}}).$$

Si la masse en oscillation est un solide, elle peut être caractérisée par son moment d'inertie  $I$  par rapport à l'axe de rotation, qui dépend de sa géométrie.

Le moment cinétique s'exprime alors en fonction de  $I$  :  $\vec{L} = I \frac{d\theta}{dt} \vec{k}$ , et le théorème du moment cinétique prend donc pour expression :  $I \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{k} = \sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}})$ .

Les différentes forces appliquées à l'objet qui oscille au bout du pendule sont la tension du fil  $\vec{T}$ , le poids  $\vec{P}$ , le couple de rappel liée à la torsion du fil, les forces de frottement.

Le moment de la tension et du poids par rapport à l'axe de rotation sont nuls. Le couple de rappel dû à la torsion du fil est  $-C\theta \vec{k}$ , le signe  $-$  indiquant que la force s'oppose à la rotation selon l'axe  $+\vec{k}$ .

En l'absence de frottements l'équation différentielle devient  $I \frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta = 0$ .

Sa solution est de la forme  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$  où  $\omega = \sqrt{\frac{C}{I}}$ , et  $\theta_0$  est l'angle

initial. La période des oscillations est donc  $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$ .

## Partie pratique I - moments d'inertie

(2 heures)

Dans cette première partie on fixera différents objets ou assemblages d'objets au bas du fil. La mesure de la période des oscillations du pendule suffit à déterminer le moment d'inertie de l'objet suspendu au fil de torsion, si on a précédemment caractérisé le système avec un objet de référence.

- L'objet de référence est un disque plein.

Mesurer son diamètre et sa masse en utilisant les outils de précision à votre disposition. Calculer son moment d'inertie  $I_{\text{ref}}$ .

- Mesurer sa période d'oscillation  $T_{\text{ref}}$ , en précisant le protocole de mesure.

Pour la barre, puis pour la barre équipée de deux cylindres placés verticalement à la même distance de l'axe, et si vous avez le temps pour d'autres assemblages, suivre la démarche suivante en présentant les résultats dans un tableau :

- Mesurer la période d'oscillation de l'objet  $T_{\text{objet}}$  de façon la plus précise possible.
- Déterminer, en utilisant les résultats sur l'objet de référence, le moment d'inertie expérimental de l'objet  $I_{\text{objet}}$ .
- Peser l'objet, mesurer ses dimensions et déterminer grâce à une formule son moment d'inertie calculé  $I_{\text{calc}}$ .
- Comparer les valeurs expérimentales et calculées, à l'aide de leur écart relatif. Commenter en réfléchissant aux incertitudes de mesures.
- Comparer les moments d'inertie des différents objets. De quels paramètres physiques d'un objet dépend son moment d'inertie ?

## Partie pratique II - torsion du fil

(2 heures)

On pourra ainsi étudier l'influence de ses caractéristiques (longueur, diamètre et matériau) sur la période d'oscillation du pendule.

On dispose de fils de diamètres différents et de matériaux différents. On peut choisir la longueur du fil soumise à torsion grâce au mandrin supérieur qui peut coulisser sur la potence.

On pourra ainsi étudier l'influence des caractéristiques du fil (longueur, diamètre et matériau) sur la période d'oscillation du pendule.

Dans toute cette partie, au bout du pendule, on placera le disque de référence.

**Influence de la longueur du fil de torsion :** Choisir un fil d'acier, mesurer son diamètre.

Pour différentes longueurs  $l$  (que l'on mesurera) d'un fil d'acier soumis à torsion :

- Réaliser 4 ou 5 mesures de période. Représenter  $T(l)$ . Commenter. Comparer à la loi théorique.
- Pour vérifier si la relation entre  $T$  et  $l$  est suivie expérimentalement, il faut la linéariser. D'après cette relation, quelle variable dépendant uniquement de  $T$  suit une relation linéaire avec  $l$  ?
- Tracer cette variable en fonction de  $l$ , et commenter le résultat.

**Influence du diamètre du fil de torsion :**

Appliquer la même démarche, à partir de 4 ou 5 mesures de période, pour les différents fils d'acier de diamètres différents et pour une même longueur  $l$  bien choisie et que l'on mesurera.

**Influence du matériau du fil de torsion :**

- Sur chaque fil de cuivre, effectuer deux mesures de périodes pour 2 longueurs différentes.
- Choisir des quantités  $y$  et  $x$ , fonctions des quantités mesurées  $d, l, T, I$ , de sorte qu'elles vérifient une relation théorique  $y = Kx$ ,
- Tracer les courbes nécessaires à la détermination et à la comparaison des coefficients  $K$  du cuivre et de l'acier dans un même graphique. Commenter le résultat.

Le dispositif expérimental permet de mesurer les forces d'appui et de frottement exercées par un patin de frein sur une roue d'aluminium, entraînée par un moteur.

Plusieurs patins de frein sont disponibles.

## Partie pratique I - mesure de coefficients de frottement solide dynamique (3 heures 30)

### Mesures :

- Choisir un patin de frein et l'installer dans le sabot. Fermer le capot. Tourner la vis pour assurer un appui à minima du patin sur le disque.
- Allumer les alimentations des capteurs. Allumer et régler sur 5V l'alimentation du moteur.
- Dans le dossier "Salle 406" lancer le logiciel "Frottement solides VI - Raccourci". Laisser un cycle ou deux d'acquisition pour que la tension des capteurs soient stabilisées, puis cliquer sur "Acquérir tensions".

Une mesure de chaque tension, du capteur de force d'appui et du capteur de force de frottement, est réalisée.

- Serrer de 3/4 de tour la vis, pour augmenter la force d'appui, effectuer une autre acquisition de tension.
  - Procéder ainsi jusqu'au serrage maximal.
  - Récupérer ainsi une dizaine de couple de tensions.
  - Enregistrer les points, dans un fichier d'extension .lvm qui est un fichier au format texte.

### Étalonnage des capteurs de forces :

Pour étalonner les deux capteurs de force on a réalisé une série de mesures :

force Transversale		force d'appui	
charge (g)	tension (mV)	charge (g)	tension (mV)
50	390	176	300
100	776	400	520
200	1470	600	740
300	2235	800	1140
400	3028	1000	1500
500	3776	1200	1760
600	4515	1400	2060
700	5322	1400	2060
800	6065		
900	6817		
1000	7582		

En déduire la loi d'étalonnage de chaque capteur.

### Coefficient de frottement :

Calculer pour chaque point de mesure la force d'appui et la force de frottement.

En déduire le coefficient de frottement solide de ce patin de frein.

### Effet de la surface de frottement :

Recommencer les mesures pour des patins constitués de même matériau, et de surfaces différentes.

Comment varie le coefficient de frottement quand le matériau varie ?

Pour tout ce qui précède on présentera les mesures et les résultats (tensions, forces, ...) dans un tableau soigneusement présentant. Les coefficients permettant l'étalonnage seront indiqués en constante du tableau.

Le tableau pourra ensuite être recopié en changeant juste les valeurs de mesures dans les questions suivantes.

### Effet du matériau :

Recommencer les mesures pour des patins constitués de matériaux différents.

Comparer l'efficacité de freinage de ces matériaux.

**Effet de la vitesse :**

Recommencer les mesures pour une vitesse de rotation plus élevée, en augmentant la tension d'alimentation.

Le coefficient de frottement varie-t-il ?

**Répétabilité :**

Pour l'un des patins déjà utilisé, recommencer deux fois les mesures, dans des conditions identiques. En déduire une valeur de coefficient de frottement et l'incertitude de type  $A$  associée.

**Partie pratique II - passage du frottement statique au frottement dynamique**

(30 minutes)

Lancer un cycle d'acquisition avec le capot ouvert, et fermez le au début du cycle.

Qu'observez-vous ?

## TP5 : ETUDE DES FROTTEMENTS VISQUEUX

### DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Le pendule étudié dans le TP est similaire à celui du TP4 (sans le système de plaquettes de frein).

On a en plus la possibilité d'accrocher sous la masse  $m_3$  différents objets (qu'on appellera par la suite objets 4) de masses  $m_4$  centrés en  $O_4$ . Ici, les frottements solides seront négligés.

L'électroaimant et le logiciel d'acquisition sont identiques à ceux du TP4.

#### Valeurs numériques

$m_1 = 0,900$  kg ;  $r = 70$  mm

$m_2 = 0,850$  kg ;  $L = 1415$  mm ;  $O_1O_2 = 777,5$  mm

$m_3 = 0,980$  kg ; hauteur de la masse  $m_3$  :  $e = 70$  mm ;  $O_1O_3 = 1520$  mm.

Palettes rectangulaires : hauteur = 15 cm, largeur = 10 cm, 20 cm, 30 cm ou 40 cm.

Palette circulaire : rayon = 13,8 cm

Les masses des objets 4 sont écrites dessus.

### PARTIE THEORIQUE : Frottement visqueux

#### Force de frottement visqueux

Dans le cadre de ce TP, la force de frottement visqueux subie par l'objet 4 peut s'écrire :

$$\boxed{f = C_x K S V} \quad \text{où } V \text{ est la vitesse de } O_4 \text{ telle que } V = O_1O_4 \frac{d\theta}{dt}$$

$S$  est la surface du maître-couple de l'objet 4, égale à sa surface transversale dans le plan perpendiculaire au mouvement.

$K$  est un coefficient de proportionnalité

et  $C_x$  est le coefficient de traînée de l'objet 4.

$C_x$  est aussi appelé coefficient de pénétration dans l'air ou coefficient de forme. Il est lié au pouvoir de pénétration dans l'air de l'objet et prend des valeurs entre 0 et 1. La référence  $C_x = 1$  correspond à un objet plan.  $C_x$  est inférieur à 1 pour des objets volumiques car ils facilitent l'évacuation de l'air par rapport à une surface complètement plane.

#### Moment de la force de frottement visqueux

Par définition, la norme du moment de la force de frottement visqueux est  $M = f \cdot O_1O_4$ . On peut montrer que ce moment peut se mettre sous la forme  $M = B \frac{d\theta}{dt}$  où  $B$  est un coefficient qui dépend de l'objet 4.

### PARTIE THEORIQUE : Equation du mouvement

Dans le cas d'un pendule oscillant autour d'un axe de rotation orienté positivement par le vecteur  $\vec{k}$ , le théorème du moment cinétique par rapport à un point  $O$  de l'axe de rotation s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \Sigma \vec{M}_O(\vec{F})$$

Si la masse en oscillation est un solide (ou objet étendu), elle peut être caractérisée par son moment d'inertie  $I$ , qui dépend de sa géométrie. Le moment cinétique s'exprime alors en fonction de  $I$  :

$$\vec{L}_O = I \vec{\omega} = I \frac{d\theta}{dt} \vec{k}$$

et le théorème du moment cinétique prend pour expression :  $I \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{k} = \Sigma \vec{M}_O(\vec{F})$

Les différentes forces appliquées à l'objet (de masse  $m$ ) qui oscille au bout du pendule sont :

- la tension de la tige  $\vec{T}$
- le poids  $\vec{P}$
- la force de frottement visqueux  $\vec{f}$ , qui est modélisable en première approche par une force s'opposant au mouvement de la masse et de norme proportionnelle à sa vitesse.

Le calcul des moments de ces forces donne :

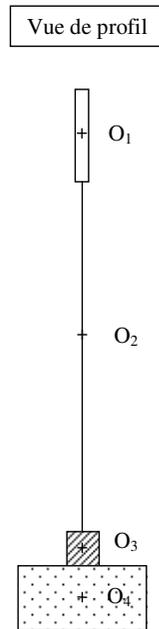
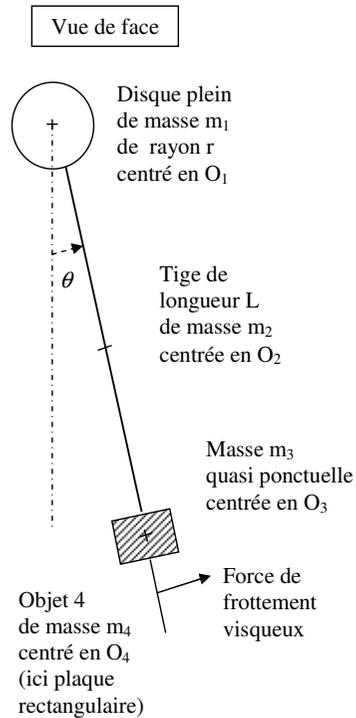
- $\vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{0}$
- $\vec{M}_O(\vec{P}) \approx -mgl\theta \vec{k} = -C\theta \vec{k}$  où  $l$  est la distance du centre de gravité de l'objet au centre de rotation et  $C = mgl$  une constante
- $\vec{M}_O(\vec{f}) = -B \frac{d\theta}{dt} \vec{k}$  avec  $B$  constante.

L'équation différentielle à résoudre est finalement  $I \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0$ .

Cette équation est caractéristique d'un oscillateur harmonique amorti. Sa solution en régime pseudo-périodique s'écrit quand  $B$  est constant (ce qui est rarement le cas dans la pratique...)

$$\theta(t) = \theta_i e^{-\frac{B}{2I}t} \cos(\omega t)$$

où  $\omega$  la pseudo-période du mouvement.



Attention : ces schémas ne sont pas à l'échelle.

## PARTIE PRATIQUE

- Lister dans un tableau tous les objets 4 à votre disposition dans un tableau Excel.
- Calculer le moment d'inertie  $I_4$  par rapport à l'axe de rotation du pendule de chacun d'entre eux, puis le moment d'inertie total du pendule  $I$  lorsque cet objet y est accroché.

### 1- Prise en main du dispositif

- Observer l'ensemble mécanique. Ouvrir le fichier Labview *Pendule VI* (depuis le bureau Windows ouvrir le dossier *Salle 406* puis *Pendule* puis *frottements visqueux*). Lire les indications et faire des essais de lancer le pendule et d'enregistrement des oscillations.
- Choisir l'onglet de détection de l'enveloppe approprié. Lire les indications et comprendre à quoi correspondent les valeurs enregistrées.
- Expliquer clairement tout ce que fait le logiciel.

### 2 - Enregistrements des données

Pour chaque objet 4 disponible, enregistrer les oscillations du pendule et relever les valeurs fournies par le logiciel. Réaliser également un enregistrement à vide.

### 3 - Analyse des données

- Comment évolue la fréquence des oscillations avec la force de frottement ?
- Calculer les valeurs de  $B$  pour chaque objet.
- Pour l'enregistrement à vide et les palettes rectangulaires, tracer  $B = f(S)$  où  $S$  est la surface de la palette. Commenter la courbe obtenue. En déduire la valeur du coefficient  $K$  pour les palettes rectangulaires.
- Montrer qu'on peut obtenir la valeur du  $C_x$  d'un volume en faisant le rapport  $\frac{B_{volume}}{B_{plaque}}$  où  $B_{plaque}$  est le coefficient  $B$  de la plaque ayant même maître-couple que le volume considéré.
- Calculer les  $C_x$  des formes volumiques. Comparer leur aérodynamisme.
- Afin d'améliorer la précision des résultats sur une forme volumique, répéter 3 fois les mesures de  $B_{plaque}$  et  $B_{volume}$ . Calculer les incertitudes de type A associées. En déduire l'incertitude sur  $C_x$ .
- Répéter les mesures nécessaires pour obtenir une incertitude sur les  $C_x$  de chaque forme volumique. Comparer leur aérodynamisme.

## Partie préparatoire TP 1

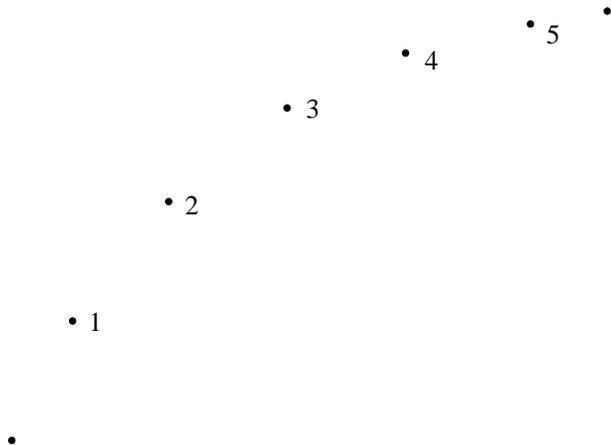
Nom prénom :

Date :

1. Un mobile autoporteur est-il un système pseudo-isolé ou un système isolé ? Pourquoi ?

Quel est le mouvement attendu pour son centre de masse ?

2. On considère les 5 points suivants.



Représenter la vitesse en 2, et la vitesse en 4.

Mesurer, en unités pratiques puis en unités réelles, leurs normes.

(\* Évaluer l'incertitude sur la mesure de la norme (on suppose qu'il n'y a pas d'incertitude sur la période des impulsions)

(\* Mêmes questions (construction, mesure, incertitudes) pour l'accélération en 3.

3. Soit  $I$  le centre de masse du système  $\{A + B\}$ , défini par la relation vectorielle  $m_A \vec{IA} + m_B \vec{IB} = \vec{0}$ .

• Utiliser la relation de Chasles  $\vec{IB} = \vec{IA} + \vec{AB}$  pour exprimer  $\vec{AI}$  en fonction de  $\vec{AB}$  et des masses  $m_A$  et  $m_B$ .

• À partir de la relation  $m_A \vec{IA} + m_B \vec{IB} = \vec{0}$ , utiliser deux fois la relation de Chasles pour intercaler un point fixe  $O$  dans les vecteurs  $\vec{IA}$  et  $\vec{IB}$ .

En dérivant la relation obtenue par rapport au temps, quelle relation obtient-on entre les vitesses des points  $A$ ,  $B$  et  $I$  ?

En déduire une relation entre la quantité de mouvement  $\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A$  du mobile  $A$ , la quantité de mouvement  $\vec{p}_B = m_B \vec{v}_B$  du mobile  $B$ , et la quantité de mouvement du centre de masse du système  $\{A + B\}$ ,  $\vec{p}_I = (m_A + m_B) \vec{v}_I$ .

4. (\*) Expliquer, à partir du PFD, pourquoi la quantité de mouvement d'un système isolé se conserve.

## Partie préparatoire TP 2

Nom prénom :

Date :

1. Déterminer la relation entre  $r$ ,  $l$  et  $\alpha$ .
2. En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que  $\cos \alpha = H(R^2 + H^2)^{-1/2}$ .

Montrer que la dérivée partielle de cette expression par rapport à  $H$  est  $R^2(R^2 + H^2)^{-3/2}$  et que la dérivée partielle par rapport à  $R$  est  $-RH(R^2 + H^2)^{-3/2}$ .

3. Rappeler la relation entre la période du mouvement  $T$  et la vitesse angulaire  $\omega = \dot{\theta}$ .

4. Faire deux schémas du système : un premier en vue de dessus, dans le repère  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . Et un second en vue de côté dans le repère  $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ .

Représenter sur ses schémas  $r$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$ , et les forces mises-en-jeu.

5. Donner l'expression du poids du pointeur laser dans le repère cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

6. Donner l'expression de la tension du fil dans le repère cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

7. Rappeler l'expression générale de l'accélération dans le repère cylindrique.

Simplifier cette expression en identifiant tous les termes nuls lorsque le mouvement du pendule est en régime permanent (c'est-à-dire que  $\omega = \dot{\theta}$  est constante).

8. Écrire le PFD vectoriel, puis les trois égalités obtenues en le projetant successivement sur  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_z$ .

9. Remplacer  $r$  par l'expression obtenue à la première question, et en déduire que  $\cos \alpha = \frac{g}{l\omega^2}$ .

## Partie préparatoire TP 3

Nom prénom :

Date :

1. Résoudre l'équation différentielle  $I \frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta = 0$  sachant que  $\theta(t = 0) = \theta_0$  et  $\theta'(t = 0) = 0$ .

2. Pour un fil de matériau, longueur et diamètre fixés, on a les relations entre période et moment d'inertie :

$$T_{\text{ref}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{ref}}}{C}} \text{ pour l'objet de référence, et}$$

$$T_{\text{objet}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{objet}}}{C}} \text{ pour un objet quelconque.}$$

Combiner ces relations pour obtenir une expression de  $I_{\text{objet}}$  en fonction de  $T_{\text{ref}}$ ,  $I_{\text{ref}}$  et  $T_{\text{objet}}$ .

3. Donner l'expression de  $T$  en fonction de  $l$ ,  $d$ ,  $K$  et  $I$ .

Si on considère que  $K$ ,  $I$  et  $d$  ne varient pas : en déduire une expression de  $T$  en fonction de  $l$ .

Si on considère que  $K$ ,  $I$  et  $l$  ne varient pas : en déduire une expression de  $T$  en fonction de  $d$ .

4. Quelle sont les sources d'incertitude sur la mesure d'une durée à l'aide d'un chronomètre ? Évaluer cette incertitude.

5. En utilisant les rappels de l'énoncé concernant les moments d'inertie, donner le moment d'inertie d'une barre de masse  $M$ , de longueur  $L$  et de rayon  $R$ , par rapport à un axe perpendiculaire à l'axe de la barre en son milieu.

6. (\*) On considère un assemblage formé d'une barre horizontale de masse  $M$ , de longueur  $L$  et de rayon  $R$ , équipée de cylindres verticaux de longueur  $h$ , de diamètre  $d$  et de masse  $m$ , situés de chaque côté et à la distance  $l$  du centre de la barre.

En utilisant le fait que le moment d'inertie est une grandeur additive, donner le moment d'inertie de cet assemblage par rapport à un axe verticale perpendiculaire à l'axe de la barre en son milieu.

## Partie préparatoire TP 4

Nom prénom :

Date :

1. Dans une situation de frottement solide **statique**, quelle est la relation entre force normale (force d'appui) notée  $F$ , et la force tangente (force de frottement) notée  $f$  ? (la réponse est dans votre cours)
  
2. Dans une situation de frottement solide **dynamique**, quelle est la relation entre force normale (force d'appui) notée  $F'$  et force tangente (force de frottement) notée  $f'$  ? (la réponse est dans votre cours)
  
3. Pour un même couple de surfaces en contact, quel sera le coefficient le plus élevé entre le coefficient de frottement statique et le coefficient de frottement dynamique ? Donner un sens physique à cette inégalité.



## Partie préparatoire TP 5

Nom prénom :

Date :

1. Rappeler l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'expression de l'angle  $\theta$  en fonction du temps. Définir chacun des termes et son unité.

Tracer l'allure de  $\theta(t)$ . Tracer l'enveloppe supérieure des oscillations et donner son équation.

2. Montrer que le moment de la force de frottement peut se mettre sous la forme  $M = B \frac{d\theta}{dt}$ .

Donner l'expression de  $B$  et son unité.

3. En utilisant les éléments sur les moments d'inertie de l'énoncé du TP3, exprimer les moments d'inertie suivants puis calculer leur valeur numérique :

- le moment d'inertie  $I_1$  de l'objet 1 (disque plein de masse  $m_1$  et de rayon  $r$ ) par rapport à l'axe  $\Delta$  perpendiculaire au disque en  $O_1$ .

- le moment d'inertie  $I'_2$  de l'objet 2 (une tige de masse  $m_2$ , de rayon  $r_2$  inférieur à 1 centimètre, et de longueur  $L$ ) par rapport à un axe perpendiculaire à la tige en son milieu  $O_2$ .

Puis le moment d'inertie  $I_2$  de l'objet 2 par rapport à l'axe  $\Delta$ .

- expliquer pourquoi l'expression du moment d'inertie  $I_3$  de l'objet 3 (cylindre de rayon  $r_3$ , de masse  $m_3$  et de hauteur  $e$ ) par rapport à l'axe  $\Delta$  est  $m_3 r_3^2 / 4 + m_3 e^2 / 12 + m_3 O_1 O_3^2$ .

