exercices théoriques

1. Calculer la dérivée des fonctions définies par :

$a(x) = -(2x-3)^4$, $b(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $c(x) = x\ln(x+2)$,

$d(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $e(x) = \arccos x$, $f(x) = \arcsin\sqrt{1+x}$.

corrigé succinct :

$a'(x) = -2\times 4\times(2x-3)^{4-1} = -8(2x-3)^3$ (surtout ne pas développer l'expression pour la dériver ! ! !)

$b'(t) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

$c'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2}$

On peut dériver d en exprimant $d(x)$ comme le produit $x(x^2+1)^{-1/2}$:

$d'(x) = (x^2+1)^{-1/2} + x(-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-3/2}\times 2x)$.

Pour simplifier l'expression, on factorise le x^2+1 qui intervient avec le plus bas degré :

ainsi, $\boxed{d'(x) = (x^2+1)^{-3/2}(x^2+1-x^2) = (x^2+1)^{-3/2}.}$

La dérivée de arccos est une dérivée de cours, à connaître. Pour démontrer cette formule on part de la relation $\cos\arccos x = x$, que l'on dérive : on obtient $\arccos' x\times(-\sin\arccos x) = 1$, et comme $\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}$, on obtient

$\boxed{e'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.}$ (on rappelle que de même $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ce qui sera utile pour dériver f à la question suivante.

$D_f = [-1;0]$, $D_{c'} =]-1;0[$, et sur $D_{f'}$, et par dérivation de fonctions composées

$f'(x) = \dfrac{\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x})}{\sqrt{1-\sqrt{1+x}^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{1-(1+x)}}$, donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{-x}}.}$

2. Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions :

$a(x) = \cos x$, $b(x) = \frac{1}{x}$, $c(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

corrigé succinct : La dérivée de $x\mapsto\cos(x)$ est $-\sin(x) = \cos(x+\pi/2)$ (utiliser un cercle trigonométrique !). Donc par récurrence immédiate,

$\boxed{a^{(n)}(x) = \cos^{(n)}(x) = \cos(x+n\pi/2).}$

De même $\dfrac{d^n}{dx^n}(\dfrac{1}{x}) = (-1)(-2)\times\ldots\times(-n)x^{-n+1}$, donc $\boxed{b^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.}$

On procède de même pour c : $c'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $c''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, et

finalement : $\boxed{c^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}.}$

3. (a) Étudier la fonction **cosinus hyperbolique** $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
   (b) Montrer en particulier que ch réalise une bijection entre $[0;+\infty[$ et $[1;+\infty[$. On appelle **argument cosinus hyperbolique** et on note argch sa réciproque.
   (c) Etudier argch ; préciser en particulier sa dérivée.
   (d) Montrer que pour tout $x\geq 1$, $\operatorname{argch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

(a) On définit de même la fonction **sinus hyperbolique** $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Alors on constate que ces fonctions sont définies, continues, dérivables sur $\mathbb{R}$, et que $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$ (et de même $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$.)
De plus, le signe de sh est facile à déterminer : $(e^x-e^{-x})/2 > 0$ si et seulement si $e^x > e^{-x}$ soit en prenant le logarithme, qui est une fonction strictement croissante : $x > -x$, donc $2x > 0$: sh est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
(on remarque aussi que ch est paire, et sh est impaire).

(b) Comme ch est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, que $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim_{+\infty}\operatorname{ch} = +\infty$, on en déduit que ch réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$: tout élément $y\in[1,+\infty[$ est l'image par ch d'un unique élément x de $[0,+\infty[$.
On note cet élément argch y.

(c) On a donc par définition $\operatorname{ch}\operatorname{argch} y = y$, et en dérivant cette relation on en déduit $\operatorname{ch}'(\operatorname{argch} y)\times\operatorname{argch}' y = 1$, donc $\operatorname{argch}' y = 1/\operatorname{sh}(\operatorname{argch} y)$.
Mais il est facile de vérifier, en développant les formules définissant ces fonctions par des exponentielles, que $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ pour tout x. Alors en remplaçant x par argch y on obtient donc $y^2 - \operatorname{sh}^2\operatorname{argch} y = 1$, et donc $\operatorname{sh}^2\operatorname{argch} y = y^2-1$. Comme sh est positive sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\operatorname{sh}\operatorname{argch} y = \sqrt{y^2-1}$, et finalement pour tout $y > 1$,

$\boxed{\operatorname{argch}' y = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}.}$: argch est strictement croissante de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

(d) Le plus simple, pour prouver que $\operatorname{argch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ si $x\geq 1$, est de montrer que ces deux fonctions ont la même dérivée et même valeur en 0 : la dérivée de

$\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ est $\dfrac{1+2x/2\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} =$ argch'(x), et les valeurs en 1 sont toutes les deux nulles.

4. Calculer les dérivées partielles et les différentielles des fonctions :
(a) $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (b) $\theta(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ (c) $f(\lambda,a)=\frac{\lambda}{2a}$
(d) $p(V,T)=nRT/V$ (e) $P(U,I,\varphi)=UI\cos(\varphi)$

corrigé succint :

(a) on calcule $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, la différentielle est donc
$$\mathrm{d}r=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y.$$
(b) $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, donc $\mathrm{d}\theta=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}=\dfrac{1}{2a}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial a}=\dfrac{-\lambda}{2a^2}$, donc $\mathrm{d}f=\dfrac{1}{2a}\mathrm{d}\lambda-\dfrac{\lambda}{2a^2}\mathrm{d}a$.

(d) $\dfrac{\partial p}{\partial V}=-nRT/V^2$ et $\dfrac{\partial p}{\partial T}=nR/V$ donc $\mathrm{d}p=-nRT\mathrm{d}V/V^2+nR\mathrm{d}T/V$.

(e) $\dfrac{\partial P}{\partial U}=I\cos(\varphi)$, $\dfrac{\partial P}{\partial I}=U\cos(\varphi)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial\theta}=-UI\sin(\varphi)$, et donc
$\mathrm{d}P=I\cos(\varphi)\mathrm{d}U+U\cos(\varphi)\mathrm{d}I-UI\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

5. Montrer que, si $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, on a $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=1/r$.

corrigé succint :

les dérivées d'ordre 1 ont été calculées plus haut. On les redérive (il peut être intéressant d'écrire $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sous la forme $x(x^2+y^2)^{-1/2}$...)
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=y^2(x^2+y^2)^{-3/2} \text{ et } \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=x^2(x^2+y^2)^{-3/2}, \text{ donc}$$
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{-3/2}=(x^2+y^2)^{-1/2}=r^{-1}.$$

6. (a) Si on pose pour $x>0$ $y=x^2$, déterminer la différentielle dy en fonction de x et dx, puis exprimer dx en fonction de y et dy.
(b) Mêmes questions avec $y=\tan x$ pour $-\pi/2<x<\pi/2$.

corrigé succinct : ces calculs se ramènent à des calculs de dérivées :

(a) si $y=x^2$, $\dfrac{dy}{dx}=y'(x)=2x$, donc $\boxed{dy=2xdx.}$ Mais comme $x>0$, $x=\sqrt{y}$ et donc $dx=dy/2x$, donc $\boxed{dx=\dfrac{dy}{2\sqrt{y}}.}$

(b) De même $\boxed{dy=(1+\tan^2 x)dx=\dfrac{dx}{\cos^2 x},}$ et par conséquent $\boxed{dx=\dfrac{dy}{1+y^2}.}$

7. Les formes différentielles suivantes sont-elles exactes ?
Si oui, déterminer une fonction dont elles sont la différentielle totale.
(a) $\omega=2x\mathrm{d}x+3y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$ (b) $\omega=(1+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$
(c) $\omega=\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}$ (d) $\Omega=uv^2e^w\mathrm{d}u+u^2ve^w\mathrm{d}v+uv^2w\mathrm{d}w$
(e) $\omega=(y-x)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$ $\omega=\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$

corrigé succint :

8. Existence et valeur des extrema des fonctions : $a(x)=x(3-x)$,
$b(x)=\dfrac{4x^2-3x-1}{4x^2+1}$, $c(x)=\sqrt{1+\sin x}$, $d(x)=\arctan(x^2)$

corrigé succinct : il est possible de traiter ces trois exercices par une étude complète de ces fonctions et tableau de variations, en utilisant les dérivées premières et seconde. Le corrigé qui suit propose des rédactions "minimales", ne donnant que les arguments strictement nécessaires.

a : a tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$, elle n'a donc pas de minimum global, et le maximum est atteint pour une valeur de x qui annule la dérivée $3-2x$. Comme la dérivée ne s'annule qu'en $x=3/2$, $\boxed{\text{le maximum est atteint en } 3/2 \text{ et vaut } 9/4.}$

b : les limites de b en $+\infty$ et $-\infty$ valent 1. La dérivée s'annule pour $x=-3/2$ et $x=1/6$, les valeurs correspondantes $5/4$ et $-5/4$ sont donc respectivement les maximum et minimum :
$\boxed{\text{le maximum de } b \text{ vaut } 5/4, \text{ atteint en } -3/2\,; \text{ le minimum vaut } -5/4, \text{ atteint en } 1/6.}$

c : sans calcul... sin est compris entre -1 et 1, donc $\sqrt{1+\sin x}$ est compris entre 0 et $\sqrt{2}$, et ces valeurs sont atteintes : en les $-\pi/2+2k\pi$ pour 0 et en les $\pi/2+2k\pi$ pour le $\sqrt{2}$. Ainsi, $\boxed{\text{le minimum de } c \text{ est 0 et le maximum } \sqrt{2}.}$

d : x^2 est postif donc $d(x)$ est à valeurs dans $[0,\pi/2[$. La dérivée $d'(x)=2x/(1+x^4)$ ne s'annule qu'en 0, donc le seul extrema est $d(0)=0$ (c'est bien un minimum). La limite en $+\infty$ et $-\infty$ n'est pas un maximum car la valeur $\pi/2$ n'est pas une valeur prise par d.

9. * On considère trois variables liées par une relation du type $f(x,y,z)=0$.
En considérant z comme fonction de x et y, calculer dz, et en déduire dy en fonction de dx et dz. Puis en considérant y comme fonction de x et z, exprimer dy.
En combinant ces deux expressions de dy montrer que
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x=1 \text{ puis que } \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z=-1$$

corrigé succint :

(a) $\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$ donc $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}z - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$.

(b) $\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x$.

(c) En identifiant, dans les expressions obtenues aux deux questions précédentes, les coefficients devant $\mathrm{d}z$ on trouve la relation $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \dfrac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$, ce qui est la première relation demandée.

Les relations symétriques en permutant les rôles de x, y et z sont vérifiées de même.

En identifiant de même les coefficients devant $\mathrm{d}x$, on trouve la relation $\dfrac{-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_y$, d'où le résultat en utilisant les relations précédemment montrées entre les paires de dérivées partielles inverses l'une de l'autre.

10. * On définit le « sinus cardinal » par $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, et $\operatorname{sinc} 0 = 1$

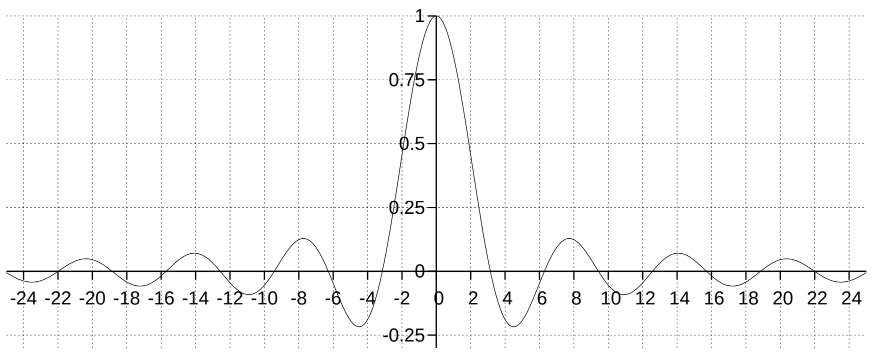
(a) Quel est le maximum de f ?

(b) Démontrer que $\tan x = x$ admet une unique solution a_k sur chaque intervalle $](2k-1)\pi/2; (2k+1)\pi/2[$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) En déduire que sinc' s'annule une fois et une seule sur chacun de ces intervalles.

(d) Calculer sinc'' en fonction de sinc et sinc'. En déduire que les a_k sont alternativement des maxima et des minima locaux.

corrigé succinct : sinc est continue sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
On admet qu'elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la dérivée n-ième en 0 est la limite de la dérivée n-ième autour de 0.
On calcule les dérivées $\operatorname{sinc}'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ et $\operatorname{sinc}''(x) = -\operatorname{sinc}(x) - \dfrac{2}{x}\operatorname{sinc}'(x)$.
$\operatorname{sinc}'(x) = 0$ équivaut à $x = \tan x$: sinc' a donc un unique zéro a_k dans chaque intervalle de largeur π $](2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}[$. De plus, sinc étant paire, $a_k = a_{-k}$ pour tout $k \neq 0$,.
On note que $a_0 = 0$, $\operatorname{sinc}(0) = 1$; $a_1 = -a_{-1} \simeq 4,4934$, $\operatorname{sinc}(a_1) \simeq -0,2172$; $a_2 = -a_{-2} \simeq 7,7253$, $\operatorname{sinc}(a_2) \simeq 0,1284$.
On constate que $\operatorname{sinc}''(a_k)$ est non nul (car $\operatorname{sinc}(a_k) \neq 0$), donc en chaque a_k la dérivée s'annule et change de signe : chaque a_k est un extrema local strict. Plus précisément, a_0, a_2, ..., a_{2k} sont des maxima locaux et a_1, a_3, ..., a_{2k+1} sont des minima locaux.



exercices pratiques

1. **Optimisation :** un fabricant produit des boîtes de conserve cylindriques, de volume 1 litre. Quelles dimensions doit-il choisir pour utiliser le moins de métal possible ?

corrigé succinct : $1l = 1$ dm^3, donc si h et r sont la hauteur et le rayon de la boîte, exprimés en décimètres, ils vérifient la relation $\pi r^2 h = 1$.
La surface de métal nécessaire est donc $2\pi r h + 2\pi r^2$ (le corps de la boîte, le couvercle et le fond), que l'on peut exprimer en fonction de r uniquement, en remplaçant h par son expression en fonction de r : $S(r) = 2/r + 2\pi r^2$.
On voit que si r tend vers 0 ou vers l'infini, $S(r)$ tend vers l'infini. Le minimum de la fonction est donc donné par $S'(r) = 0$ soit $-1/r^2 + 4\pi r = 0$, soit encore $2\pi r^3 = 1$, et $r = (2\pi)^{-1/3}$. Donc $h = (\frac{4}{\pi})^{1/3}$. A.N :

$$\boxed{r = 0.54 \text{ dm} = 5.4 \text{ cm},\ h = 1.08 \text{ dm} = 10.8 \text{ cm}.}$$

2. **Calcul d'erreur :** si l'on mesure à 1cm près 20cm pour rayon d'une boule, quel est le volume estimé ? Quelles sont les imprécisions absolue et relative sur le volume ?

corrigé succinct :
On sait que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Les incertitudes sur R et V étant "petites", on les assimile aux différentielles dR et dV, que l'on peut relier par la formule $dV = 4\pi R^2 dR$.
Par conséquent, le volume estimé est $\boxed{V \simeq 33510 \text{ cm}^3 \simeq 33.5 \text{ l},}$ avec une incertitude de $\boxed{dV = 5027 \text{ cm}^3 \simeq 5 \text{ l}.}$ L'incertitude relative sur la mesure du rayon est $\frac{dR}{R} = 1/20 = 5\%$, et l'incertitude relative sur la mesure du volume est par conséquent

$$\boxed{\tfrac{dV}{V} = 3\tfrac{dR}{R} = 15\%.}$$

3. **longueurs, surface, volume d'un pavé :** si la longueur de chacun des trois côtés d'un pavé augmente de 1%, de combien augmentent son volume et sa surface ?

corrigé succint : si les côtés sont x, y et z, le volume est $V(x,y,z) = xyz$ et la surface $S(x,y,z) = 2(xy + yz + xz)$.

Par conséquent, $\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z}{xyz} = \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mathrm{d}z}{z}$. L'énoncé exprime que $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z} = 1\%$, donc finalement l'accroissement relatif du volume est de 3%.

Par des calculs analogues on montre que l'accroissement relatif de la surface est de 2%.

4. **Validité de l'approximation des petits angles :**

   (a) Montrer que pour tout θ, $|\sin\theta - \theta| \leq |\theta|^3/6$ (utiliser la fonction $\sin\theta - \theta + \theta^3/6$)

   (b) Pour quels angles l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$ est-elle valable à 10^{-2} près ?

corrigé succinct :

(a) on sait déjà que pour tout $\theta > 0$, $\sin\theta \leq \theta$ donc $\sin\theta - \theta \leq 0$.
par ailleurs soit $g(\theta) = \sin\theta - \theta + \theta^3/6$, on a $g'(\theta) = \cos\theta - 1 + \theta^2/2$, $g''(\theta) = -\sin(\theta) + \theta$, $g'''(\theta) = -\cos\theta + 1$. Ainsi, g''' est positive, donc g'' est croissante et comme $g''(0) = 0$, g'' est positive sur $[0, +\infty[$.
Donc g' est croissante sur $[0, +\infty[$, et comme $g'(0) = 0$, g' est positive sur $[0, +\infty[$. Donc g est croissante sur $[0, +\infty[$, et comme $g(0) = 0$, g est positive sur $[0, +\infty[$.
Par conséquent sur $[0, +\infty[$ on a $\sin\theta - \theta + \theta^3/6 \geq 0$ donc $\sin\theta - \theta \geq -\theta^3/6$.
On a donc prouvé que pour tout $\theta > 0$, $-\theta^3/6 \leq \sin\theta - \theta \leq 0$ donc on a bien $|\sin\theta - \theta| \leq \theta^3/6$, d'où le résultat pour $\theta > 0$.
$\sin\theta - \theta$ étant impaire, on a bien le résultat demandé pour tout θ.

(b) il suffit de choisir θ tel que $\theta^3 = 6.10^{-2}$, soit $\theta = 0,391$ rad, soit en degrés : $\theta = 22,43^\circ$
(ATTENTION : pour pouvoir écrire $\sin x = x$ l'angle x doit être exprimé en radians ! ! !)

5. **gaz de van der Waals :** on considère l'équation d'état d'un gaz de van der Waals $(p + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) = nk_B T$.

   (a) Exprimer p en fonction de V et T, puis $\frac{\partial p}{\partial T}$ en fonction de V et T.

   (b) De même déterminer une expression de $\frac{\partial T}{\partial V}$ en fonction de p et V.

   (c) Peut-on exprimer V en fonction de p et T ?

   (d) En dérivant par rapport à p l'équation d'état, calculer $\frac{\partial V}{\partial p}$ en fonction de p et V.

   (e) Que vaut le produit $\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial p}$?

6. **Chaleur et entropie**
   les variables d'état p, V, T d'un quantité de gaz parfait sont liées par l'équation $pV = nRT$.

   (a) Montrer que $\delta Q_{\mathrm{rev}} = C_v(T)\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V$ n'est pas une forme différentielle exacte. ($C_v(T)$ est une fonction ne dépendant que de T)

   (b) Montrer que $\delta Q_{\mathrm{rev}}/T$ est une différentielle exacte.

corrigé succint :