

exponentielle

la fonction exponentielle

notée \exp , est l'unique fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dérivable, vérifiant :

$$\exp' = \exp$$

et

$$\exp(0) = 1.$$

principales propriétés

- l'exponentielle « transforme les sommes en produits » : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
 $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$
- de même pour tous x, y , $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ et en particulier $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
- pour tout x , $\exp(x) > 0$, et étant sa propre dérivée, \exp est strictement croissante
- $\lim_{-\infty} \exp = 0$, $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$

remarque : pour tout entier n et tout réel x , $\exp(nx) = \exp(x)^n$

En particulier $\exp(n) = \exp(1)^n$, ce qui justifie l'écriture $\exp(x) = e^x$ avec $e = \exp(1) \simeq 2,7182818\dots$

logarithme népérien

le logarithme népérien

noté \ln , est l'unique fonction de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} dérivable vérifiant :

$$\text{pour tout } x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$

principales propriétés

- sa relation fonctionnelle est la réciproque de celle de l'exponentielle, \ln « transforme les produits en sommes » :

$$\text{pour tous } x, y > 0, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

- alors pour $x, y > 0$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$, et en particulier $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

- \ln est la fonction réciproque de \exp :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \ln \exp x = x \quad \text{et} \quad \text{pour tout } y > 0, \exp \ln y = y$$

- $\ln e = 1$

- \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*

- $\lim_0 \ln = -\infty$, $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$

puissances

Les fonctions logarithme et exponentielle permettent de prolonger pour tous $a > 0$ et b réel la définition (qui n'est naturelle que pour b entier) de la puissance a^b :

puissances

si $a \in \mathbb{R}_+^*$, si $b \in \mathbb{R}$, on pose $a^b = \exp(b \ln a)$

Pour toute étude de fonction dans laquelle une puissance fait apparaître la variable, il est indispensable de commencer par transformer l'expression en utilisant cette propriété.

exemple : étudier la fonction $f(x) = x^x$.

On l'écrit $f(x) = e^{x \ln x}$, définie sur \mathbb{R}_+^* . Par conséquent, $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x}$ est du signe de $\ln x + 1$: f est décroissante sur $]0, \frac{1}{e}]$ et croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

Ses limites sont 1 en 0 (on vient de voir que $x \ln x \rightarrow 0$ en 0) et $+\infty$ en $+\infty$.

logarithmes de base a

plusieurs fonctions vérifient la même relation fonctionnelle que le logarithme népérien : ce sont les logarithmes de base a \log_a , définis pour tout $a > 0$ par $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a(a) = 1$.

Ces fonctions ont peu d'intérêt théorique, car ce sont des multiples du logarithme népérien : pour tout $a > 0$, on a pour tout $x > 0$ la relation $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

Il est cependant nécessaire d'en connaître un, d'usage courant en chimie et en physique : le logarithme en base 10 \log_{10} , souvent noté simplement \log

remarque : certains vieux ouvrages utilisent la notation (à éviter aujourd'hui) Log pour désigner le logarithme népérien.

rappels sur les angles orientés

On ne revient pas sur la définition des **angles géométriques**, mesurés entre 0 et 2π radians, ou 0 et 360 (avec selon la règle $180 = \pi$ radians).

On va en revanche rappeler rapidement celle d'**angle orienté**.

Dans le plan, on définit le **sens trigonométrique** comme le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre. Alors l'angle orienté entre deux vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) est positif s'il est mesuré en allant de \vec{u} vers \vec{v} dans le sens trigonométrique, et négatif sinon.

Ainsi, si $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct, l'angle orienté (\vec{i}, \vec{j}) vaut $+\pi/2$ (mesuré dans le sens trigonométrique), ou bien $-3\pi/2$ (mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre). Plus généralement, un angle orienté est toujours défini à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.

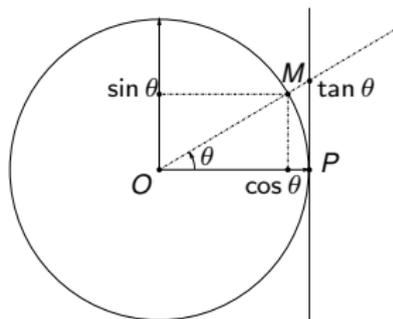
Mais l'angle orienté (\vec{j}, \vec{i}) , qui vaut $-\pi/2$ à $2k\pi$ près, n'est pas égal à l'angle (\vec{i}, \vec{j}) , alors que les angles géométriques correspondants sont égaux.

le cercle trigonométrique, fonctions cos, sin et tan

Dans un repère orthonormé direct du plan, le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1 et de centre O . Soit M un point du cercle et θ l'angle (\vec{i}, \vec{OM}) .

On note $(\cos \theta, \sin \theta)$ les coordonnées de M : cela définit deux fonctions réelles, le **cosinus** $\cos \theta$ et le **sinus** $\sin \theta$.

Et on définit la fonction **tangente** par $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ (pour $\theta \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$)



Géométriquement on obtient la tangente comme ordonnée de l'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$

cos et sin sont 2π -périodiques, cos est paire, sin est impaire De même on voit que la fonction tangente est impaire et π -périodique

remarque : la longueur de l'arc de cercle entre P et M vaut θ . Les fonctions trigonométriques n'interviennent pas dans ce calcul ! Mais il est nécessaire d'**exprimer l'angle en radians** pour que cette formule soit vraie.

Plus généralement, l'arc d'un cercle de rayon R correspondant à un secteur angulaire de θ radians a pour longueur $R\theta$.

principales propriétés

« **sohcahtoa** » - **interprétation géométrique dans un triangle rectangle** :

si un triangle ABC est rectangle en B , si θ est l'angle géométrique (\vec{AB}, \vec{AC}) , alors on retrouve les relations :

$\sin \theta = \frac{BC}{AC}$ (« s-o-h : le **sinus** est égal au côté **opposé** divisé par l'**hypoténuse** »),

$\cos \theta = \frac{AB}{AC}$ (« c-a-h : le **cosinus** est égal au côté **adjacent** divisé par l'**hypoténuse** »),

$\tan \theta = \frac{BC}{AB}$ (« t-o-a : la **tangente** est égale au côté **opposé** divisé par le côté **adjacent** »)

relation fondamentale : $M(\cos \theta, \sin \theta)$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1, la distance OM vaut $\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$ et vaut 1, donc pour tout θ ,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

valeurs remarquables :

angle	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

principales propriétés

quelques autres propriétés à connaître :

- \cos et \sin sont dérivables, et $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.
- \tan est dérivable, et $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
(selon les exercices, l'une ou l'autre de ces formules est plus utile).
- $\lim_{-\pi/2^+} \tan = -\infty$, $\lim_{\pi/2^-} \tan = +\infty$.
- on peut déduire de rotations et symétries les relations suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x + \pi/2) = -\sin(x), \quad \sin(x + \pi/2) = \cos(x),$$

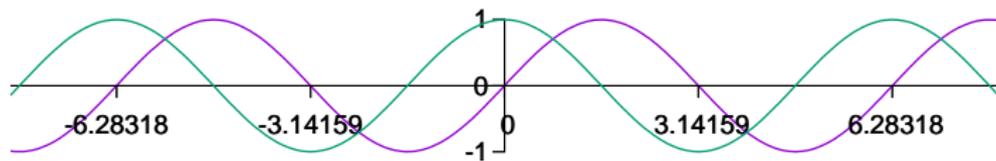
$$\cos(x - \pi/2) = \sin(x), \quad \sin(x - \pi/2) = -\cos(x),$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x), \quad \sin(\pi/2 - x) = \cos(x),$$

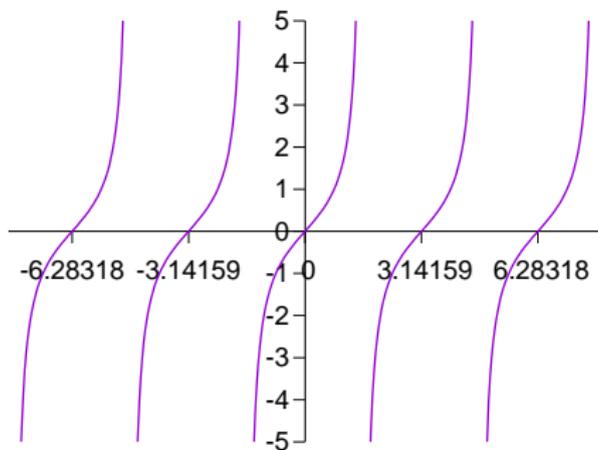
$$\cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente :

Courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus :



Courbe représentative de la fonction tangente :



formulaire

formules d'addition :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

et en particulier si $b = a$ on obtient les :

formule de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

formulaire

Avec ces formules on peut calculer les cosinus, sinus et tangente d'angle moitié d'angles déjà connus.

Par exemple, pour calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ on utilise la formule $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ pour se ramener à la valeur connue $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $\cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$, donc $\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$, donc $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Ainsi, $\cos \frac{\pi}{12} = \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Mais comme l'angle $\frac{\pi}{12}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, son cosinus est positif, et donc $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

enfin en remplaçant $2a$ par θ dans les formules de duplication, on obtient les

expressions rationnelles en $t = \tan \frac{\theta}{2}$:

$$\bullet \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\bullet \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\bullet \tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2}$$

formulaire

transformations de produits en sommes :

pour tous p et q réels,

- $\cos p \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p + q) + \cos(p - q)]$
- $\sin p \cos q = \frac{1}{2}[\sin(p + q) + \sin(p - q)]$
- $\sin p \sin q = \frac{1}{2}[\cos(p - q) - \cos(p + q)]$

transformations de sommes en produits :

pour tous p et q réels,

- $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
- $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

premières équations trigonométriques

L'observation du cercle trigonométrique fournit les

solutions des équations trigonométriques élémentaires :

les solutions de $\cos x = \cos a$ sont : $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

les solutions de $\sin x = \sin a$ sont : $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

les solutions de $\tan x = \tan a$ sont : $x = a + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

remarque : attention à un double piège pour les deux équations en \cos et \sin : d'une part, elles ont une infinité de solutions égales à 2π près, car \sin et \cos sont périodiques. Mais surtout, il y a deux familles infinies de solutions. L'une (les $x = a + 2k\pi$) à laquelle tout le monde pense, et une autre...

exemple 1 : les solutions de $\cos x = 1/2$ sont (puisque $1/2 = \cos \frac{\pi}{3}$) :
 $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

exemple 2 : pour résoudre $\sin x = \cos \frac{\pi}{3}$, on commence par transformer le cosinus en sinus pour pouvoir appliquer ce qui précède. Ainsi, $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6}$, et par conséquent les solutions sont donc celles de $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$, soit $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

arccosinus

Pour $a \in [-1, 1]$ il existe toujours des angles θ tel que $\cos \theta = a$. Pour exprimer cet angle on va pour introduire une nouvelle fonction, la fonction arccos.

Un tel angle n'est pas unique : on doit « fixer » à l'avance l'intervalle dans lequel on le choisit : $\cos \theta$ prend toutes les valeurs de $[-1; 1]$ quand θ parcourt $[0; \pi]$, on décide que arccos aura ses valeurs dans $[0; \pi]$.

la fonction arcosinus arccos : $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

arccos(x) est défini comme l'unique angle dans $[0, \pi]$ dont le cosinus est x

- pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$
 et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

- attention, en général, $\arccos(\cos(x)) \neq x!!$

- arccos est une fonction décroissante ; $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

- $\arccos(0) = \pi/2,$
 $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$
 $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$
 $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$
 $\arccos(1) = 0,$
 $\arccos(-1) = \pi.$

arcsinus

De même on définit

la fonction arcsinus $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

$\arcsin(x)$ est défini comme l'unique angle dans $[-\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus est x

- pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$
 et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
- attention, en général, $\arcsin(\sin(x)) \neq x$!!
- arcsin est une fonction impaire, croissante ; $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
- $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$,
 $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

arctangente

De même on définit

la fonction arctangente $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$

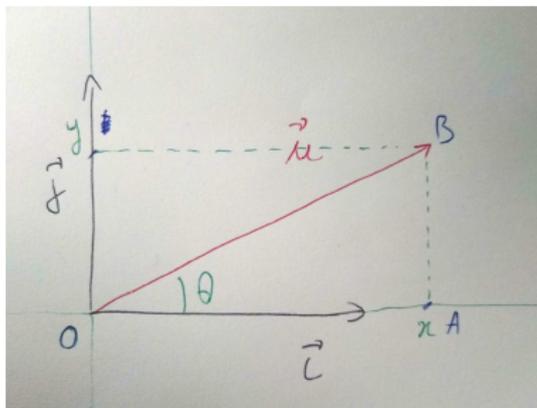
$\arctan(x)$ est l'unique angle compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont la tangente vaut x .

- \arctan est impaire
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, \arctan est strictement croissante
- $\arctan(0) = 0$ car $\tan(0) = 0$ et que 0 est bien dans $] -\pi/2; \pi/2[$
- $\arctan(1) = \pi/4$ car $\tan(\pi/4) = 1$ et que $\pi/4$ est bien dans $] -\pi/2; \pi/2[$
- $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$ car $\tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}$ et que $-\pi/3$ est bien dans $] -\pi/2; \pi/2[$
- la tangente de l'arctangente de x vaut x : $\tan(\arctan(x)) = x$
- $\arctan(\tan(x))$ ne vaut x que si $x \in]-\pi/2; \pi/2[$. Par exemple, $\arctan(\tan(\pi)) = \arctan(0) = 0$ et non π

application de l'arctangente aux calculs d'angles

On prend un repère orthonormé direct du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) et un vecteur \vec{u} de coordonnées $\vec{u}(x, y)$. On veut calculer l'angle θ entre \vec{i} et \vec{u} .

Si x et y sont positifs : dans le triangle OAB , le côté adjacent à l'angle θ vaut x et le côté opposé, y , donc la tangente de θ vaut y/x . Comme θ est entre 0 et $\pi/2$, $\theta = \arctan(y/x)$.



Si x est positif et que y est négatif, la même formule reste valable.

Si x est négatif, il faut rajouter π (faire un demi-tour) : $\theta = \arctan(y/x) + \pi$.

application de l'arctangente aux calculs d'angles

L'angle entre \vec{i} et $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ vaut :

$$\left| \begin{array}{ll} \text{si } x > 0, & \theta = \arctan(y/x) \\ \text{si } x < 0, & \theta = \arctan(y/x) + \pi \\ \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0, & \theta = \pi/2 \\ \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0, & \theta = -\pi/2 \end{array} \right.$$

exemples :

- l'angle entre \vec{i} et $\vec{u}(1, 1)$ est $\arctan(1/1) = \arctan(1) = \pi/4$
- l'angle entre \vec{i} et $\vec{u}(-1, 1)$ est $\arctan(1/-1) + \pi = \arctan(-1) + \pi = 3\pi/4$
- l'angle entre \vec{i} et $\vec{j}(0, 1)$ est $\pi/2$ (soit $\arctan(1/0) = \arctan(+\infty)$...)
- l'angle entre \vec{i} et $\vec{u}(1, 2)$ est $\arctan(2/1) = \arctan(2)$ qui n'est pas une valeur remarquable.

retour aux cosinus et sinus

Si x et y sont deux nombres réels tels que $x^2 + y^2 = 1$, on peut les écrire comme le cosinus et sinus d'un même angle.

En effet si $x^2 + y^2 = 1$, (x, y) sont les coordonnées d'un point M situé sur le cercle trigonométrique, et le vecteur \vec{OM} vaut $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

L'angle entre \vec{i} et \vec{OM} est justement l'angle dont le cosinus vaut x et le sinus y : c'est la définition géométrique d'un cosinus et d'un sinus !

Donc en résumé :

si $x^2 + y^2 = 1$, alors :

$x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$,

pour $\theta = \arctan(y/x)$ si $x > 0$, $\theta = \arctan(y/x) + \pi$ si $x < 0$.

résolution d'une équation $a \cos(x) + b \sin(x) = c$

Si a et b sont des réels non tous les deux nuls et c un réel, on souhaite maintenant résoudre l'équation $a \cos x + b \sin x = c$.

Par exemple, $-2 \cos(x) + 3 \sin(x) = 2$.

Il s'agit de se ramener à une équation de la forme $\cos(x - \theta) = \cos(\varphi)$ en choisissant bien θ et φ . Pour cela :

1) on met en facteur $\sqrt{a^2 + b^2}$ dans l'expression.

$$\text{ici : } \sqrt{13} \left(\frac{-2}{\sqrt{13}} \cos(x) + \frac{3}{\sqrt{13}} \sin(x) \right) = 2$$

2) On définit θ tel que les coefficients devant $\cos(x)$ et $\sin(x)$ soient respectivement $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

$$\text{ici } \theta = \arctan\left(\frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{-2}{\sqrt{13}}}\right) = \arctan(-3/2) \text{ n'est pas une valeur remarquable.}$$

résolution d'une équation $a \cos(x) + b \sin(x) = c$

3) l'équation devient donc

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2}(\cos(\theta) \cos(x) + \sin(\theta) \sin(x)) &= c, \\ \cos(\theta) \cos(x) + \sin(\theta) \sin(x) &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos(x - \theta) &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},\end{aligned}$$

grâce à la formule $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$.

$$\text{ici on obtient donc } \cos(\theta) \cos(x) + \sin(\theta) \sin(x) = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

4) On regarde alors la valeur de $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$: si elle n'est pas dans $[-1; 1]$, l'équation n'a pas de solution. Sinon, si elle est dans $[-1; 1]$, en posant

$$\varphi = \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

l'équation devient $\cos(x - \theta) = \cos(\varphi)$ donc $x - \theta = \pm \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et finalement :

$$x = \theta \pm \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ici donc, $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ et les solutions sont les nombres

$$x = \arctan(-3/2) \pm \arccos(2/\sqrt{13}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

fonctions continues

continuité

une fonction f à valeurs réelles définie sur un intervalle I est **continue** en un point x_0 de I si la limite quand x tend vers x_0 de $f(x)$ est $f(x_0)$

Une fonction est continue sur un intervalle si elle l'est en chaque point de l'intervalle

On peut retenir en première approximation qu'une fonction est continue si elle n'effectue pas de « sauts », i.e si l'on peut tracer son graphe « sans lever le stylo ».

Les fonctions rencontrées en DUT servent principalement à modéliser des phénomènes physiques continus et nous n'insisterons pas sur cette notion.

exemple : la fonction « sinus cardinal » est définie pour $x \neq 0$ par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$. Cette formule ne permet pas de calculer directement $\text{sinc}(0)$. Mais la limite quand x tend vers 0 de $\frac{\sin x}{x}$ est 1 et donc en posant $\text{sinc}(0) = 1$ on prolonge de manière naturelle une fonction continue sur \mathbb{R}^* en une fonction continue bien définie sur \mathbb{R} tout entier. C'est le principe de **prolongement par continuité**.

dérivée en un point

nombre dérivé en un point

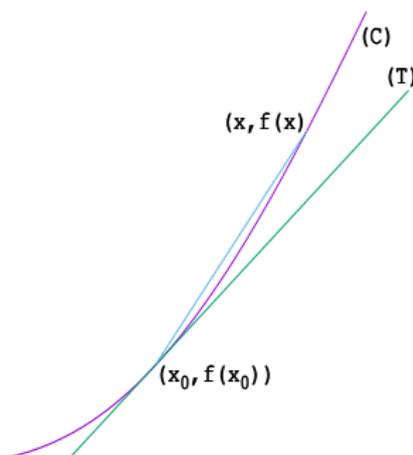
une fonction f est **dérivable** en un point x_0 si et seulement si le rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (appelé taux d'accroissement de f en x_0) admet une limite finie quand x tend vers x_0 .

Cette limite est le **nombre dérivé de f en x_0** , noté $f'(x_0)$

interprétation géométrique du nombre dérivé : soit (C) le graphe d'une fonction f

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est le coefficient directeur (la pente) de la corde (C) reliant les points d'abscisses x et x_0 .

Quand x tend vers x_0 , ce coefficient directeur tend vers celui de la tangente (T) à (C) en x_0 : $f'(x_0)$ est donc le coefficient directeur de (T) .



fonction dérivée

fonction dérivée

si f admet un nombre dérivé en tout point d'un intervalle I , cela définit sur I sa **fonction dérivée**, notée f' (ou $\frac{df}{dx}$). Inversément, on dit que f est une **primitive** de f'

exemple : si $f(x) = ax + b$ (a et b des réels fixés), le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ vaut a donc la dérivée de f est définie pour tout x par $f'(x) = a$

L'interprétation géométrique de $f'(x_0)$ comme pente de la tangente explique le lien fondamental entre signe de la dérivée et croissance de la fonction :

étude des variations

si f est une fonction dérivable sur un intervalle I ,

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout x dans I , $f'(x) \geq 0$
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x dans I , $f'(x) \leq 0$
- f constante sur I si et seulement si sa dérivée est nulle.

et de plus, si $f'(x)$ est strictement positif (resp. strictement négatif) pour tout x , on peut affirmer que f est strictement croissante (resp. strictement décroissante)

somme, produits, quotients

Pour calculer en pratique des dérivées, on disposera d'une part d'un certain nombre de fonctions de référence dont les dérivées sont connues, et d'autre part de règles donnant la dérivée d'une fonction construite à partir de fonctions aux dérivées connues.

dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient

si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I ,

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + g'f$
- si g ne s'annule pas sur I , $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
- en particulier $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$

exemple 1 : si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 1 \times x + x \times 1 = 2x$

exemple 2 : si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $f'(x) = \frac{0 \times x - 1 \times 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$

exemple 3 : si l'on sait que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, on en déduit que

$$\tan' = \frac{\cos^2 - (-\sin^2)}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

dérivée d'une composée

dérivée d'une composée

si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur $f(I)$, $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$

en particulier, si f^{-1} est la réciproque de f , alors $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$

exemple 1 : si on sait que $\exp' = \exp$: \exp est strictement positive, donc sa dérivée aussi, donc l'exponentielle est strictement croissante : elle admet donc une fonction réciproque, le logarithme népérien \ln .

Pour tout $x > 0$, $\exp \ln x = x$, donc $\ln' x \times \exp' \ln x = \ln' x \times x = 1$, d'où $\ln' x = \frac{1}{x}$.

exemple 2 : tangente restreinte à $] -\pi/2, \pi/2[$ et à valeurs dans \mathbb{R} est continue et dérivable de dérivée strictement positive. Elle admet une fonction réciproque, \arctan .

Pour tout x , $\tan \arctan x = x$, donc $\arctan' x = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$.

exemple 3 : la dérivée logarithmique si f est dérivable et ne s'annule pas, $\ln |f|$ est égale soit à $\ln f$ (si $f > 0$) soit à $\ln(-f)$ (si $f < 0$). Dans tous les cas, $(\ln |f|)' = \frac{f'}{f} \cdot \frac{f'}{f}$ est la **dérivée logarithmique** de f .

Elle est parfois intéressante pour la propriété suivante : la dérivée logarithmique de fg est la somme de la dérivée logarithmique de f et de celle de g .

dérivée d'une puissance

Si a est réel et b est entier positif, a^b est le produit de a par lui-même b fois.

Si b est entier négatif, a^b est le produit de $1/a$ par lui-même $-b$ fois.

Dans le cas général, si $a > 0$ et si b est un réel quelconque, la puissance b -ième de a est définie par $a^b = e^{b \ln a}$.

dérivée d'une puissance

si f est dérivable et à valeurs strictement positives, si α est un réel, $(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha-1}$

en particulier, $\sqrt{f}' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

(si α est un entier naturel, il est inutile de supposer f strictement positive)

exemple 1 : la dérivée de $\exp(x^2)$ est $2x \exp(x^2)$.

exemple 2 : si ω est une constante, la dérivée par rapport à t de $\cos(\omega t)$ est $-\omega \sin(\omega t)$

dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ (α réel)
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$

cas particulier de composée :
 si a et b sont constantes,
 pour dériver par $f(ax + b)$,
 remplacer x par $ax + b$ dans $f'(x)$,
ET multiplier l'expression par a

exemple :
 la dérivée de $(3x + 1)^4$ est $12(3x + 1)^3$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$1 - \operatorname{th}^2(x)$
$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$

différentielles

Le taux d'accroissement entre les points $(x, f(x))$ et $(x_0, f(x_0))$, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, est le quotient de deux différences, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ différence des ordonnées des deux points, et $\Delta x = x - x_0$, différence des abscisses.

Si x tend vers x_0 , Δf et Δx deviennent infiniment petits, ce sont les **différentielles** df et dx .

Et le taux d'accroissement tend vers $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

la différentielle df de la fonction f

représente une infime variation des valeurs de f .

Elle est reliée à dx l'infime variation des abscisses par l'égalité entre différentielles $df = f'(x)dx$

Manipuler les différentielles sera utile pour effectuer des changements de variables dans les intégrales. Avec une relation $y = f(x)$, on aura besoin de calculer dy en fonction de dx , ou dx en fonction de dy

Par exemple, si $y = x^2$ (avec $x > 0$) $dy = 2x dx$, donc $dx = \frac{dy}{2x}$.

Mais $x = \sqrt{y}$ donc $dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

dérivées d'ordre supérieur

Si la fonction dérivée f' est à son tour dérivable, sa dérivée $(f')'$ est appelée **dérivée seconde** de f , notée f'' ou $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

On définit de même par récurrence la dérivée d'ordre n , notée $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Le signe de la dérivée f' donne le sens de variation de la fonction f . Le signe de la dérivée seconde f'' donne, lui, la convexité de la fonction : si sur un intervalle $f'' \geq 0$, f est dite **convexe** : son graphe ressemble à une parabole dont le sommet est en bas et les branches sont tournées vers le haut. Si $f'' \leq 0$, f est dite **concave** : son graphe ressemble à une parabole dont le sommet est en haut et les branches pointent vers le bas.

maximum, minimum

une fonction f admet un **maximum** en un point x_0 si pour tout x , $f(x) \leq f(x_0)$, et un **minimum** si pour tout x , $f(x) \geq f(x_0)$.

On appelle **extremum** de f une valeur qui est soit un minimum, soit un maximum.

Si les inégalités ci-dessus sont strictes pour $x \neq x_0$, on parle de maximum, minimum ou extremum **strict**.

En toute rigueur, un extremum de f est une valeur $f(x_0)$, et il est réalisé pour $x = x_0$. Mais l'abus de langage qui consiste à confondre extremum et point en lequel il est atteint est courant.

exemple 1 : pour tout x non nul, $x^2 > 0$, donc la fonction $x \mapsto x^2$ atteint en 0 son minimum global strict 0.

exemple 2 : une fonction constante atteint en tout point un minimum et un maximum, qui est la valeur de la fonction.

exemple 3 : la fonction inverse définie sur \mathbb{R}^* n'admet ni minimum, ni maximum car elle a des limites $-\infty$ en 0^- et $+\infty$ en 0^+ .

exemple 4 : la fonction exponentielle non plus : elle n'a évidemment pas de maximum, car elle n'est pas majorée : sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Mais elle n'admet pas non plus de minimum, car la valeur 0 n'est pas atteinte par la fonction.

détermination des maximum et minimum

existence d'un extremum

f continue sur un segment $[a, b]$ possède un maximum global et un minimum global (autrement dit : une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes)

Ce théorème est utile pour savoir qu'un extremum existe, mais il ne permet pas de le calculer. L'étude de f' permet de déterminer les **extrema locaux** de f , les valeurs qui sont des maxima ou minima autour d'un point.

Une analogie géographique permet de comprendre la différence entre ces notions : pour la fonction « altitude » des différents points d'une chaîne de montagne, les différents sommets seront tous des maxima locaux. Mais seul le point culminant de la chaîne sera un maximum global.

Comment caractériser ces extrema locaux ? Autour d'un point qui réalise un extremum, la tangente à la courbe en ce point doit être horizontale. Ainsi :

condition nécessaire d'extremum

si f est dérivable sur $]a, b[$, si f admet un extremum local en un point $c \in]a, b[$, alors $f'(c) = 0$.

détermination des maximum et minimum

Attention, la réciproque est fautive : la dérivée de la fonction $f(x) = x^3$ s'annule en 0, bien que 0 ne soit ni un minimum, ni un maximum local de f .

On dispose cependant d'une condition suffisante pour assurer l'existence d'un extremum local :

condition suffisante

si f est dérivable sur $]a, b[$, si en $c \in]a, b[$ f' s'annule et change de signe, alors f admet en c un extremum

On peut préciser ce critère à l'aide de la dérivée seconde :

condition suffisante, bis

si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$

(donc f' est strictement croissante au voisinage de c : strictement négative avant c , nulle en c , strictement positive après), alors f admet un minimum local en c

De même si $f''(c) < 0$, f admet un maximum local en c .

Mais si $f''(c)$ est lui aussi nul, on ne peut conclure.

détermination des maximum et minimum

plan d'étude pour la recherche d'extrema :

- recherche d'une inégalité « élémentaire » permettant de conclure directement
exemple : pas besoin de dérivée pour remarquer que $x \mapsto (x + 1)^2 - 2$ admet un minimum strict de valeur -2, atteint en -1. En effet, $(x + 1)^2 - 2 \geq -2$, et l'égalité n'est possible que si $(x + 1)^2 = 0$ soit $x = -1$
- sinon on recherche les valeurs c_1, c_2, \dots pour lesquelles $f'(c_i) = 0$.
 Par une étude (directe, ou à l'aide de la dérivée seconde), regarder si les $f(c_i)$ sont ou non des extrema locaux.
 Les seuls extrema globaux possibles sont alors les $f(c_i)$ et éventuellement aussi les valeurs aux bornes de l'intervalle, si l'intervalle est du type $[a, b]$
- on compare alors ces valeurs entre-elles et avec les valeurs ou limite de la fonction aux bornes de son intervalle de définition.

exemple 1 : pour $f(x) = e^x - x$, la dérivée ne s'annule qu'en 0, le seul extremum possible est atteint en 0. $f''(x) = e^x$ donc $f''(0) > 0$: $f(0)$ est bien un minimum local strict de la fonction. De plus, $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$, donc f n'admet pas de maximum, et 1 est un minimum global.

exemple 2 : $f(x) = x^3 - x$. $\lim_{-\infty} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$, f ne possède par d'extremum global. Mais $f'(x) = 3x^2 - 1$ s'annule en $\pm 1/\sqrt{3}$. Et $f''(x) = 6x$ est strictement négatif en $-1/\sqrt{3}$, strictement positif en $1/\sqrt{3}$: f admet un maximum local pour $x = -1/\sqrt{3}$, de valeur 0, et un minimum local en $x = 1/\sqrt{3}$, de valeur 0.

fonction de plusieurs variables

on appelle fonction de plusieurs variables une quantité déterminée (par une formule, un algorithme de calcul, une définition univoque) par la donnée d'autres valeurs, appelées variables

exemple 1 : $f(x, y, z) = 3x^2 - 4y \cos(z)$ définit une fonction de trois variables

exemple 2 : $z(x, y)$ qui associe à un point d'une carte (d'abscisse x , ordonnée y) son altitude z est une fonction de deux variables

exemple 3 : la température $T(p, V)$ d'une masse de gaz, déterminée par sa pression p et son volume V . Ou bien sa pression $p(T, V)$; ou son volume $V(T, p)$.

Dans le cas d'un gaz parfait, V peut s'exprimer par la formule $V = nRT/p$. Dans le cas plus général d'un gaz de Van Der Waal d'équation $(p + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) = nk_B T$, le volume peut avoir une expression plus compliquée, voire n'être pas exprimable par une formule.

dérivées partielles

On appelle **dérivée partielle** d'une fonction f par rapport à une variable x , et on note $\frac{\partial f}{\partial x}$, l'expression obtenue en dérivant f selon les règles habituelles en considérant toutes les variables sauf x comme des constantes

exemple 1 : si $f(x, y, z) = x^2 - 3xy + z^2x$, on calcule les trois dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 3y + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -3x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2zx$$

exemple 2 : si $p(V, T) = nRT/V$, on obtient $\frac{\partial p}{\partial T} = nR/V$ et $\frac{\partial p}{\partial V} = -nRT/V^2$

dérivées partielles d'ordre supérieur

En dérivant une dérivée partielle, on obtient une dérivée partielle d'ordre 2, et en répétant le processus, des dérivées d'ordre 3, 4, ...

On peut abrégé les notations : $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$...

exemple : si $f(x, y) = x^2 \sin(y) - y/x$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(y) + y/x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(y) - 1/x$,

et pour les dérivées d'ordre 2 : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin(y) - 2y/x^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x \cos(y) + 1/x^2$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \sin(y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x \cos(y) + 1/x^2$

On constate que les deux dérivées croisées (où l'on dérive une fois par rapport à x , une fois par rapport à y) sont égales ; c'est un cas particulier du

théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Ce qui compte est le nombre de dérivations et les variables concernées, pas l'ordre des dérivations

différentielle d'une fonction

la **différentielle** d'une fonction $f(x, y, z)$ est la quantité

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

(on dit aussi que df est la **différentielle totale** de la fonction f)

df représente la variation de la quantité $f(x, y, z)$ quand les variables x , y et z subissent de petites variations dx , dy , dz .

exemple 1 : si $f(x, y, z) = 3xyz + 2z^2$, on calcule $df = 3yzdx + 3xzdy + (3xy + 4z)dz$

exemple 2 : si $p(V, T) = nRT/V$, on a $dP = \frac{nR}{V}dT - \frac{nRT}{V^2}dV$

définitions

Il existe un ensemble \mathbb{C} , dont les éléments sont appelés **nombres complexes**, tel que :

- \mathbb{C} contient tous les réels
- \mathbb{C} contient un nombre, noté i , tel que $i^2 = -1$
- tout z de \mathbb{C} s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ (a est la partie réelle de z , b est sa partie imaginaire)
- les calculs algébriques s'effectuent comme sur \mathbb{R} , en rajoutant la règle $i^2 = -1$

exemple : $(1 - i)(2 + i) = 2 + i - 2i - i^2 = 2 + i - 2i + 2 = 4 - i$

Le **conjugué** de $z = a + ib$, noté \bar{z} , est le nombre $a - ib$

Le **module** de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, qui est un réel positif

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

- module et conjugués : $z\bar{z} = |z|^2$
- module d'un produit : $|zz'| = |z||z'|$
- module d'une puissance : $|z^n| = |z|^n$
- inverse : pour z non nul, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

méthode de la quantité conjuguée :

exemple : si $z = 3 - i$, on obtient :

$$\operatorname{Re}(z) = 3 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = -1$$

$$\bar{z} = 3 + i$$

$$|z| = \sqrt{10}$$

$$z^2 = z \cdot z = 8 - 6i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{3 + i}{10}$$

quantité conjuguée : une « astuce » fondamentale découle de la relation $z\bar{z} = |z|^2$: dans une fraction, si l'on souhaite faire disparaître un dénominateur complexe, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur pour obtenir une fraction égale à la première et dont le dénominateur est un réel strictement positif

exemple :

$$\frac{3 + 2i}{5 + i} = \frac{3 + 2i}{5 + i} \times \frac{5 - i}{5 - i} = \frac{(3 + 2i)(5 - i)}{(5 + i)(5 - i)} = \frac{17 + 7i}{26}$$

exponentielle complexe

exponentielle complexe :

pour tout θ réel, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$

Cela permet de prolonger à \mathbb{C} la fonction exponentielle déjà définie sur \mathbb{R} :
l'exponentielle d'un complexe $z = a + ib$ est $\exp(z) = e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$

Parmi les propriétés de l'exponentielle complexe, citons :

- $e^{2i\pi} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$
- si $\theta \in \mathbb{R} : |e^{i\theta}| = 1$
- si $z \in \mathbb{C} : e^z \neq 0$
- si $z, z' \in \mathbb{C} : e^z e^{z'} = e^{z+z'}$
- si $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z} : (e^z)^n = e^{nz}$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$

cas d'égalité :

$e^z = e^{z'}$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

nombres complexes de module 1

On vient de voir que pour tout θ réel, $|e^{i\theta}| = 1$

Réciproquement, si $a + ib$ est de module 1 (donc $a^2 + b^2 = 1$), et si on définit θ par

- $\theta = \arctan(b/a)$ pour $a > 0$
- $\theta = \arctan(b/a) + \pi$ si $a < 0$
- $\theta = \pi/2$ si $a = 0$ et $b > 0$
- $\theta = -\pi/2$ si $a = 0$ et $b < 0$

on a déjà vu que $\cos \theta = a$ et $\sin \theta = b$, et donc $a + ib = e^{i\theta}$

nombres complexes de module 1 :

soit $z \in \mathbb{C}$; alors $|z| = 1$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$

Et l'angle θ ainsi défini est unique à $2k\pi$ près, k entier

argument d'un nombre complexe

Si $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{z}{|z|}$ est de module 1, donc il existe θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, et donc $z = |z|e^{i\theta}$

θ est appelé un **argument** de z ; θ n'est bien défini qu'à $2k\pi$ près, mais z possède un unique argument dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$: c'est son **argument principal**, noté $\arg(z)$

forme exponentielle

Si z est un complexe non nul, $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

propriété : $n \arg(z)$ est un argument de z^n

remarque 1 : $\arg(0)$ n'est pas défini car $0 = 0e^{i\theta}$ pour n'importe quelle valeur de θ

remarque 2 : les réels non nuls vérifient $\arg(z) = 0$ ou π , les **imaginaires purs** non nuls (les nombres de la forme $z = bi$, $b \in \mathbb{R}^*$) vérifient $\arg(z) = \pm \frac{\pi}{2}$

Pour un nombre complexe z , la notation $z = a + ib$ est la **forme algébrique** ou **forme cartésienne** de z , la notation $z = \rho e^{i\theta}$ est la **forme polaire** ou **forme exponentielle** de z , la notation $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ est la **forme trigonométrique**

Selon les problèmes, l'une ou l'autre de ces écritures sera plus simple à manipuler

formule de Moivre

On a défini $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Donc on a aussi $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

Mais par ailleurs, $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ (propriétés des puissances et exponentielles)

On en déduit la

formule de Moivre

pour tout entier n et tout angle θ ,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Elle permet de déterminer les formules usuelles de l'arc double, triple, ... plus rapidement qu'en appliquant les formules donnant $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ pour obtenir successivement $\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, puis $\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta)$, ...

exemple d'utilisation

Par exemple, pour

exprimer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$:

on remarque que $\cos(3\theta) = \operatorname{Re}(\cos(3\theta) + i \sin(3\theta))$

donc par la formule de Moivre, $\cos(3\theta) = \operatorname{Re}(\cos \theta + i \sin \theta)^3$

et en utilisant la formule du binôme pour développer :

$$\cos(3\theta) = \operatorname{Re}(\cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta)$$

enfin en prenant la partie réelle de l'expression :

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

(que l'on peut aussi ne pas utiliser de sinus, et écrire $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$, en remplaçant $\sin^2 \theta$ par $1 - \cos^2 \theta$)

remarque : pour calculer $\sin(3\theta)$ la méthode est identique en remplaçant les parties réelles par des parties imaginaires. On a donc de même $\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$

formules d'Euler

On sait que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ et, comme cosinus est paire et sinus impaire, $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$

En additionnant ces deux expressions on obtient $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$

et en les soustrayant $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta)$

En divisant ces formules par 2, on obtient les

formules d'Euler

si θ est un réel, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ et $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Ces formules sont utiles en particulier pour linéariser les polynômes trigonométriques (dans le but par exemple de calculer leurs primitives).

Un polynôme trigonométrique est une somme de termes du type $(\sin \theta)^p (\cos \theta)^q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$; le linéariser, c'est l'exprimer comme une somme de termes de la forme $\sin k\theta$ ou $\cos k\theta$, sans qu'il reste de produit ou de puissances de cosinus et sinus

exemple d'utilisation : linéarisation de polynômes trigonométriques

Pour linéariser une expression de la forme $(\sin \theta)^p (\cos \theta)^q$, on remplace $\sin \theta$ par $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ et $\cos \theta$ par $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$. Puis on développe toutes les puissances, puis on effectue tous les produits. En utilisant la propriété $e^{ia\theta} e^{ib\theta} = e^{i(a+b)\theta}$, on obtient finalement des sommes d'exponentielles de la forme $e^{ik\theta}$. On regroupe alors les termes $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$ pour obtenir des $\sin k\theta$ ou des $\cos k\theta$...

exemple

on souhaite linéariser $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \left(\frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} \right) \left(\frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{-4} \right)$$

puis en développant les produits et en regroupant les termes :

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{-2 + e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{-16} = \frac{-2 + (2 \cos(4\theta))}{-16} = \frac{1 - \cos 4\theta}{8}, \text{ c'est l'expression linéarisée}$$

racines carrées

Une **racine carrée** de $z \in \mathbb{C}$ est un nombre $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = z$

Alors :

- 0 admet une unique racine carrée, 0
- un réel $x > 0$ admet deux racines carrées : \sqrt{x} strictement positive, et $-\sqrt{x}$
- un réel $x < 0$ négatif n'admet aucune racine **réelle**, mais :
- $i^2 = (-i)^2 = -1$, donc -1 admet deux racines carrées, i et $-i$

Quelles sont les racines carrées d'un nombre complexe z non nul quelconque ?

Écrivons z sous forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

On cherche ses racines carrées $w = re^{i\phi}$, avec $r > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} w^2 = z &\iff (re^{i\phi})^2 = \rho e^{i\theta} \\ &\iff r^2 e^{2i\phi} = \rho e^{i\theta} \\ &\iff \begin{cases} r^2 = \rho \\ 2\phi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

tout nombre complexe non nul $z = \rho e^{i\theta}$ admet exactement deux racines carrées complexes distinctes, et $\sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$ et $\sqrt{\rho} e^{i(\theta/2+\pi)} = -\sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$

exemples

exemple 1, déterminer les racines carrées de i :

le module de i est 1 et son argument est $\pi/2$, donc $i = e^{i\pi/2}$

Ses racines carrées sont donc $e^{i\pi/4}$ et $-e^{i\pi/4}$, soit sous forme algébrique, $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

exemple 2, déterminer les racines carrées de $2 - 2i$:

le module est $\sqrt{8}$ et l'argument est $\arctan(-1) = -\pi/4$, donc $2 - 2i = \sqrt{8}e^{-i\pi/4}$

Ses racines carrées sont donc $\sqrt{\sqrt{8}}e^{-i\pi/8}$ et $-\sqrt{\sqrt{8}}e^{-i\pi/8}$

On peut aussi écrire $\sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8} = 8^{1/4} = 2^{3/4}$; par ailleurs on peut calculer $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$ (voir le chapitre de trigonométrie) pour trouver la forme algébrique des racines

attention : il est **formellement interdit** d'employer la notation $\sqrt{-1}$, et plus généralement \sqrt{z} pour désigner « la » racine carrée d'un complexe non réel positif. On utilisera une phrase du type « soit w une racine carrée de z »

remarque : les formes algébriques que les racines carrées de $a + ib$ sont, dans le cas où $b \neq 0$,

$$\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}} \text{ et } -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \frac{b}{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}}$$

équation du second degré

résolvons l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec $a \neq 0$, b, c des complexes fixés :

elle équivaut successivement à $a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}) = 0$ en mettant a en facteur,

$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$ en simplifiant par a , $(z + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = 0$ en utilisant une

identité remarquable, et finalement $(z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Alors si δ désigne une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a $(z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\delta^2}{4a^2}$, donc

$z + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\delta}{2a}$, et finalement $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$. En résumé :

équation du second degré :

si a, b, c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$, les solutions complexes de

l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$, δ désignant une

racine carrée du **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

L'équation a donc deux solutions distinctes si $\Delta \neq 0$, et une solution unique si $\Delta = 0$

cas particulier et exemples

Dans le cas particulier où les coefficients sont réels, le discriminant Δ est réel, et donc δ vaut soit $\pm\sqrt{\Delta}$ si $\Delta \geq 0$, soit $\pm i\sqrt{-\Delta}$ si $\Delta < 0$. On retrouve le résultat connu :

si a, b, c sont des nombres réels avec $a \neq 0$, si $\Delta = b^2 - 4ac$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x admet :

si $\Delta > 0$, deux solutions réelles, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

si $\Delta = 0$, une unique solution réelle, $x = \frac{-b}{2a}$

si $\Delta < 0$, pas de solutions réelles, mais deux solutions complexes conjuguées,

$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

exemple 1, résoudre $x^2 + 2 = 0$:

pas de discriminant ici !! Cela revient à chercher les racines carrées de -2 , soit $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$

exemple 2, résoudre $4x^2 + 3x + 1 = 0$:

ici $\Delta = 9 - 4 \times 4 \times 1 = -7$, donc les racines carrées de Δ sont $i\sqrt{7}$ et $-i\sqrt{7}$, et les

solutions de l'équation sont $\frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{8}$

racines n -ièmes

Si n est un entier positif, une **racine d'ordre n** , ou **racine n -ième** de $z \in \mathbb{C}$ est un nombre $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^n = z$

0 admet une unique racine n -ième, 0

Quelles sont les racines n -ièmes d'un nombre complexe z non nul quelconque ?

Écrivons z sous forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

On cherche ses racines n -ièmes $w = r e^{i\phi}$, avec $r > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} w^n = z &\iff (r e^{i\phi})^n = \rho e^{i\theta} \\ &\iff r^n e^{ni\phi} = \rho e^{i\theta} \\ &\iff \begin{cases} r^n = \rho \\ n\phi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

tout nombre complexe non nul $z = \rho e^{i\theta}$ admet exactement n racines n -ièmes complexes distinctes $\sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Pour obtenir toutes les racines il est inutile de prendre tous les entiers k , il suffit d'en prendre n valeurs consécutives, par exemple $0, 1, 2, \dots, n-1$

exemples

exemple 1 : déterminer les racines cubiques de l'unité.

On écrit $1 = 1 \times e^{i \times 0}$; les racines cubiques sont donc $e^0 = 1$,

$$e^{2i\pi/3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } e^{4i\pi/3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Les trois racines cubiques de l'unité sont donc 1 , $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ et $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

exemple 2 : déterminer les racines quatrième de l'unité.

$1 = 1e^{0i}$, donc les quatre racines sont 1 , $e^{2i\pi/4} = e^{i\pi/2}$, $e^{4i\pi/4} = e^{i\pi}$, et

$$e^{6i\pi/4} = e^{3i\pi/2} = e^{-i\pi/2}, \text{ soit } 1, i, -1, -i$$

exemple 3 : déterminer les racines cubiques de $1 + i$.

On écrit $1 + i = \sqrt{2} \times e^{i\pi/4}$; ses racines cubiques sont donc $w_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\pi/12}$,

$$w_2 = \sqrt[6]{2} e^{i\pi/12+2i\pi/3} \text{ et } w_3 = \sqrt[6]{2} e^{i\pi/12+4i\pi/3}$$

Pour obtenir les formes algébriques on remarque que $w_2 = w_1 e^{2i\pi/3} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} w_1$ et

$$w_3 = w_1 e^{4i\pi/3} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} w_1 : \text{ il suffit donc de calculer la forme algébrique de } w_1$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}). \text{ La relation } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ donne } \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4},$$

donc, étant positif, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. On en déduit $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, donc

$$w_1 = \sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}). \text{ Reste à développer les produits pour trouver d'affreuses}$$

formes algébriques pour w_2 et w_3 ...

polynômes et degré

définition

on appelle polynôme réel (resp.complexe) une fonction définie par une expression de la forme $P(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$,

n étant un entier positif et a_0, a_1, \dots, a_n des réels (resp.complexes)

L'ensemble des polynômes réels est noté $\mathbb{R}[X]$, et $\mathbb{C}[X]$ pour les polynômes complexes

degré

le degré d'un polynôme non nul P , noté $\deg(P)$, est défini comme le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$

Par convention on pose $\deg(0) = -\infty$

Si n est le degré de P , $a_n X^n$ est appelé **terme de plus haut degré** de P , et a_n est le **coefficient dominant**

Un polynôme est dit **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1

exemples : a) le degré de $4X^3 + 2X - 5$ est 3. Le terme de plus haut degré est $4X^3$, le terme constant est -5.

b) $X^5 + 3X^3 - 5X + 2$ est un polynôme unitaire de degré 5

division euclidienne de deux polynômes

si A et B sont deux polynômes, avec $B \neq 0$, alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$

Q et R sont le **quotient** et le **reste** de la division euclidienne ou division selon les puissances décroissantes de A par B

exemple : pour diviser $A = 2X^4 + X^3 + 3X + 4$ par $B = X^2 + 3X + 1$ on procède ainsi :

$$\begin{array}{r|l}
 2X^4 + X^3 + 3X + 4 & X^2 + 3X + 1 \\
 \underline{2X^4 + 6X^3 + 2X^2} & 2X^2 - 5X + 13 \\
 -5X^3 - 2X^2 + 3X + 4 & \\
 \underline{-5X^3 - 15X^2 - 5X} & \\
 13X^2 + 8X + 4 & \\
 \underline{13X^2 + 39X + 13} & \\
 -31X - 9 &
 \end{array}$$

ainsi, le quotient est $2X^2 - 5X + 13$ et le reste $-31X - 9$

On a donc prouvé que $2X^4 + X^3 + 3X + 4 = (X^2 + 3X + 1)(2X^2 - 5X + 13) - 31X - 9$

On dit que le polynôme B **divise** le polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$. Cela équivaut au fait que le reste R de la division de A par B est nul

racines d'un polynôme

racine

α est une **racine** ou un **zéro** d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$

α est une racine **d'ordre** n si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$

exemple 1 : tout polynôme $aX + b$ de degré 1 admet $-b/a$ pour racine simple.

exemple 2 : $P = X^2$ admet 0 pour racine double car $P(0) = 0^2 = 0$, $P'(0) = 2 \times 0 = 0$, et $P''(0) = 2 \neq 0$

théorème de d'Alembert-Gauss

Un polynôme réel n'a pas forcément de racine réelle mais tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe

Si on divise P par $X - \alpha$, on obtient une relation $P = (X - \alpha)Q + R$ avec R , de degré strictement inférieur à celui de $X - \alpha$, donc constant. Ainsi, $P(\alpha) = R$, le reste est nul si et seulement si α est racine de P , donc :

lien entre racine et division :

α est racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P

de même, α est racine d'ordre k de P si et seulement si $(X - \alpha)^k$ divise P

racines d'un polynôme

Si P admet n racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$ divise P . Donc un polynôme de degré n admet au plus n racines. Il peut en avoir moins, avoir des racines doubles, etc..

quelques astuces pour trouver des racines :

- des « racines évidentes » d'un polynôme à coefficients entiers sont à chercher parmi les diviseurs du terme constant
Ainsi les racines entières de $X^3 + 3X^2 + 3X + 2$ sont à chercher parmi $\{1, -1, 2, -2\}$; -2 est effectivement racine, pas les autres. On pose alors la division par $X + 2$: $X^3 + 3X^2 + 3X + 2 = (X + 2)(X^2 + X + 1)$
Les racines du quotient $X^2 + X + 1$ sont $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$
On a donc toutes les racines de $X^3 + 3X^2 + 3X + 2$: une racine réelle et deux racines non réelles. Le fait que celles-ci sont conjuguées n'est pas un hasard :
- si $a + ib$ est une racine d'un polynôme à **coefficients réels**, $a - ib$ aussi. En effet, dans ce cas $P(a - ib) = \overline{P(a + ib)} = \overline{0} = 0$
- si l'équation est une équation **bicarrée**, i.e ne faisant intervenir que des puissances paires de X , on peut poser $Y = X^2$, trouver les racines du polynôme en Y obtenu, puis en déduire X . Par exemple, si on cherche les racines de $P = X^4 + 3X^2 - 4$, on commence par trouver les racines de $Y^2 + 3Y - 4$: -4 et 1 . Les racines de P sont donc $1, -1, 2i$ et $-2i$

factorisation d'un polynôme

Un polynôme de degré $n \geq 1$ est **irréductible** s'il n'est divisible par aucun autre polynôme de degré strictement compris entre 0 et n

Factoriser un polynôme, c'est l'écrire comme produit de polynômes irréductibles

Ainsi tout polynôme de degré 1 est irréductible : il n'existe pas de polynôme de degré strictement compris entre 0 et 1 !

De même, $X^2 + 1$ est irréductible sur \mathbb{R} : on sait qu'il n'a pas de racine, donc il ne peut exister de polynôme de degré 1 qui le divise. Mais sur \mathbb{C} , $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$

Plus généralement :

les seuls polynômes complexes irréductibles sont ceux de degré 1 ;

les seuls polynômes réels irréductibles sont ceux de degré 1 et ceux de degré 2 de discriminant strictement négatif

Ainsi :

Factoriser P sur \mathbb{C} , c'est écrire $P = a(X - \alpha_1)^{a_1} \dots (X - \alpha_p)^{a_p}$ avec $a \in \mathbb{C}$ et des racines α_j d'ordre a_j distinctes

Factoriser P sur \mathbb{R} , c'est écrire $P = a(X - \alpha_1)^{a_1} \dots (X - \alpha_p)^{a_p} Q_1^{b_1} \dots Q_q^{b_q}$, avec $a \in \mathbb{C}$, des racines α_j d'ordre a_j distinctes, et des polynômes distincts irréductibles de degré 2 Q_j , avec des exposants $b_j \geq 1$

factorisation d'un polynôme

La factorisation d'un polynôme se ramène donc à la recherche de ses racines complexes... Si on a trouvé toutes les racines et leur ordre, on a factorisé le polynôme sur \mathbb{C}

Et la factorisation sur \mathbb{R} d'un polynôme à coefficients réels pour s'obtenir en regroupant par deux les polynômes de degré 1 correspondant aux racines complexes conjuguées

exemple 1 : $2X^2 - 2 = 2(X - 1)(X + 1)$, sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} : on a les racines 1 et -1, donc des facteurs $X - 1$ et $X + 1$, sans oublier le coefficient dominant 2

exemple 2 : $X^2 + 1$ est factorisé sur \mathbb{R} , et sa factorisation sur \mathbb{C} est $(X - i)(X + i)$

exemple 3 : pour factoriser $P = X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 - 3X - 3$, on commence par chercher une racine « évidente » : on trouve -1

On effectue alors la division de P par $X - (-1)$:

$$X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 - 3X - 3 = (X + 1)(X^4 - 2X^2 - 3)$$

En posant $Y = X^2$, les racines de $Y^2 - 2Y - 3$ sont -1 et 3, donc celles de $X^4 - 2X^2 - 3$ sont $i, -i, \sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$

Donc finalement, la factorisation est $P = (X + 1)(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X - i)(X + i)$ sur \mathbb{C} et $P = (X + 1)(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X^2 + 1)$ sur \mathbb{R}

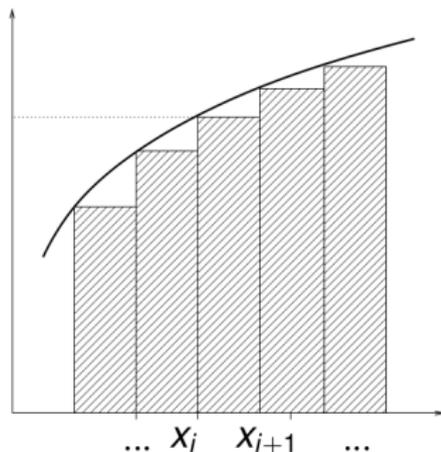
définition

Soit f continue sur $[a, b]$, positive, et (C) sa courbe représentative. On souhaite calculer l'aire sous la courbe, c'est-à-dire l'aire de $\{a \leq x \leq b ; 0 \leq y \leq f(x)\}$

On peut pour cela considérer $n+1$ points régulièrement répartis sur le segment $[a, b]$, $x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$ pour $i = 0, \dots, n$, et considérer la réunion des rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $f(x_i)$

L'aire de chacun de ces rectangles est $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$, donc l'aire de leur réunion est $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$

Si le nombre de points n tend vers l'infini, cette région composée de rectangles se rapproche de plus en plus de la région sous la courbe



Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ est l'aire cherchée : on la note $\int_a^b f(x) dx$

Le symbole \int joue le rôle d'une « somme continue » où la différentielle dx représente la différence $x_{i+1} - x_i$, qui devient infiniment petite quand n tend vers l'infini

définition

remarque 1 : si f n'est pas de signe positif, $\int_a^b f$ peut être définie de la même manière comme limite de $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$

La valeur de cette intégrale est la différence entre l'aire située entre les parties positives de la courbe au dessus de l'axe des abscisses, et l'aire située au dessus des parties négatives de la courbe et sous l'axe des abscisses

On peut de même généraliser cette définition à des fonctions à valeurs complexes

remarque 2 : dans la notation $\int_a^b f(x) dx$, la variable d'intégration x est une **variable muette** : elle n'intervient pas dans la valeur de l'intégrale, et on peut la noter par

n'importe quel autre symbole y, t, ξ, \dots voire ne pas utiliser de variable du tout et se

contenter du nom de la fonction, $f : \int_a^b f$

Seule limitation : le symbole ne doit pas être utilisé ailleurs dans l'énoncé

remarque 3 : par analogie avec les sommes finies et la moyenne usuelle d'un nombre

fini de valeurs, la **valeur moyenne** d'une fonction f définie par $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

propriétés

- si f, g sont continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles ou complexes,

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

- **relation de Chasles** : pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$,
et donc en particulier $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$

- **linéarité** : si λ, μ sont réels ou complexes, $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$

- **croissance** : si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

- **inégalité triangulaire** : $\left| \int_a^b f + g \right| \leq \int_a^b |f + g| \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$

- **inégalité de Cauchy-Schwarz** : $\left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}$

lien entre intégrales et primitives

Soit f continue sur $[a, b]$, et F la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

D'après la relation de Chasles, $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$

Si h est petit, toutes les valeurs de $f(t)$ pour $t \in [x, x+h]$ sont proches de $f(x)$, donc $F(x+h) - F(x) \simeq hf(x)$ (aire du rectangle de hauteur $f(x)$ et largeur h)

Par conséquent, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$, et donc F est dérivable, de dérivée f

Ainsi,

lien entre primitive et intégrale :

Si f est continue sur $[a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a , les primitives de f sont les fonctions de la forme $F(x) = \int_a^x f(t)dt + c$ où c est une constante réelle,

et si F est une primitive de f , on a $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

On note par un crochet cette différence des valeurs de F : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

exemple : $x^2/2 + x$ est une primitive de $x + 1$, donc on peut calculer l'intégrale

$$\int_1^3 (x+1)dx = [x^2/2 + x]_1^3 = (9/2 + 3) - (1/2 + 1) = 6$$

primitives usuelles

Les primitives suivantes sont à connaître :

fonction	primitive
si $\alpha \neq -1, (ax + b)^\alpha$	$\frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{a(\alpha + 1)}$
$\frac{1}{ax + b} = (ax + b)^{-1}$	$\frac{1}{a} \ln ax + b $
e^{ax+b}	$\frac{e^{ax+b}}{a}$
$\ln(ax + b)$	$\frac{\ln ax + b - ax}{a}$

fonction	primitive
$\sin(ax + b)$	$-\frac{\cos(ax + b)}{a}$
$\cos(ax + b)$	$\frac{\sin(ax + b)}{a}$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
$\frac{x}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$

(a désigne un réel non nul quelconque, b un réel quelconque)

intégration par parties

$\int_a^b fg$ peut parfois se calculer ainsi : si F est une primitive de f , la dérivée de Fg est $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$, et donc $fg = (Fg)' - Fg'$. Ainsi,

intégration par parties :

$$\int_a^b fg = \int_a^b (Fg)' - \int_a^b Fg' = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'$$

On remplace le calcul de l'intégrale de fg par celui d'un crochet des deux primitives (F et g), et celui de l'intégrale du produit de deux "nouvelles" fonctions (F et g') : c'est intéressant si cette deuxième intégrale est plus simple à calculer que la première

exemple : pour calculer $\int_0^\pi x \sin(3x) dx$, on peut poser $g(x) = x$ et $f(x) = \sin(3x)$ (car $g'(x) = 1$ est "plus simple" que g et $F(x) = -\frac{\cos(3x)}{3}$ est de même nature que f)

Plutôt que nommer les fonctions on peut représenter les opérations par $x \xrightarrow{D} 1$ et $\sin(3x) \xrightarrow{P} -\frac{\cos(3x)}{3}$

$$\text{Ainsi, } \int_0^\pi x \sin(3x) dx = \left[x \frac{-\cos(3x)}{3} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-\cos(3x)}{3} dx = \frac{\pi}{3} + \left[\frac{\sin(3x)}{9} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{3}$$

changement de variable

Soit f continue sur un intervalle $[a, b]$, F une primitive de f , et φ une fonction C^1 strictement monotone d'un intervalle J dans $[a, b]$. $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$, donc :

changement de variable $x = \varphi(y)$ ou $y = \varphi^{-1}(x)$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F \circ \varphi]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f \circ \varphi) \varphi'$$

En pratique, pour effectuer un changement de variable, on réalise les étapes :

- 0- **nouvelle variable** : on définit y en fonction de x (ou x en fonction de y), choix est indiqué dans l'énoncé ou déterminé par la pratique et l'intuition
- 1- **les bornes** : l'intégrale initiale est calculée pour x variant de a à b : on détermine donc les bornes entre lesquelles varie y quand x parcourt $[a, b]$
- 2- **l'élément différentiel** : on exprime x en fonction de y , puis dx en fonction de y et dy , et l'on remplace dx par cette expression dans l'intégrale de départ
- 3- **la fonction** : on exprime $f(x)$ en fonction de y

Si le changement de variable est bien choisi, on peut alors calculer la nouvelle intégrale

changement de variable

exemple 1 : pour calculer $\int_0^{\pi/4} \tan \theta \, d\theta$:

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, et, le sinus étant (presque) la dérivée du cosinus, on pose $y = \cos \theta$

Les bornes $x = 0$ et $x = \pi/4$ donnent des bornes $y = 1$ et $y = \sqrt{2}/2$
 $dy = -\sin \theta d\theta$

et il reste dans l'intégrale $\frac{-1}{\cos \theta} = \frac{-1}{y}$

Donc on obtient : $\int_0^{\pi/4} \tan \theta \, d\theta = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dy}{y} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2}$

exemple 2 : pour calculer $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ on se ramène à $\frac{1}{y^2 + 1}$:

$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right)$; on pose donc $y = \frac{x+1}{2}$

Si $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$ et si $x = 1$, $y = 1$

Alors $dy = \frac{dx}{2}$, et $dx = 2dy$

L'intégrale est donc égale à $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2dy}{4(y^2 + 1)} = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{\pi/4 - \arctan(1/2)}{2}$

linéarisation de polynômes trigonométriques

On a déjà, grâce aux formules d'Euler, linéarisé des polynômes trigonométriques. Cela facilite le calcul de primitive : on ne sait pas en général primitiver des puissances ou produits de \cos et \sin , mais on sait primitiver les sommes d'expressions de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$.

exemple : calculer $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \sin^2 x \, dx$

On a déjà vu que $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$,

$$\text{donc } \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8} \left[x - \frac{\sin 4x}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{32}$$

Cette méthode marchera systématiquement. Mais dans certains cas, et en particulier si l'expression est de la forme $\cos(x) \sin^k(x)$ (ou $\sin(x) \cos^k(x)$) il est astucieux, plutôt que linéariser, de remarquer que l'expression est "presque" la dérivée de $\sin^{k+1}(x)$.

exemple : pour calculer $\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^{2020}(x) \, dx$, on peut remarquer que la dérivée de $\cos^{2021}(x) = -2021 \sin(x) \cos^{2020}(x)$, donc une primitive de $\sin(x) \cos^{2020}(x)$ est $\cos^{2021}(x)/(-2021)$, et ainsi :

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^{2020}(x) \, dx = [-\cos^{2021}(x)/2021]_0^{\pi/2} = (-0 - (-1))/2021 = 1/2021$$

intégrales généralisées

Si f est définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ (avec éventuellement, $a = -\infty$ ou $b = +\infty$), il est parfois (mais pas toujours) possible de donner un sens à l'intégrale

impropre ou **généralisée** $\int_a^b f$

Essentiellement, cela consiste à remplacer le calcul de la valeur d'une primitive de F en b (resp. en a) par la limite de cette primitive en b (resp. en a). Si cette limite existe et est finie, on dira que l'intégrale est **définie**, ou **convergente**, et $\int_a^b f = \lim_b F - \lim_a F$

exemple 1 : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est-elle convergente ? Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $\frac{-1}{x}$, dont la limite en $+\infty$ est nulle. Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, et vaut $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1$

exemple 2 : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est-elle convergente ? Une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(x)$, dont la limite en $+\infty$ est infinie. Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge (ou ne converge pas, ou n'est pas définie)

intégrales généralisées

exemple 3 : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est-elle convergente ? Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$, dont la limite (et même ici la valeur) en 0 vaut 0. Ainsi, l'intégrale est convergente et $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

exemple 4 : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ est-elle convergente ? $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et \arctan tend vers $\pi/2$ en $+\infty$, vers $-\pi/2$, en $-\infty$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge et sa valeur est π

virus

On fait l'hypothèse (souvent vérifiée) que, au début de la propagation d'un virus, le nombre de personnes contaminées sur une certaine durée est proportionnel à la fois au nombre de personnes déjà infectées, et à cette durée

Si on note y le nombre de personnes atteintes par le virus, on peut donc écrire que dy (la variation de ce nombre, autrement dit le nombre de nouvelles personnes infectées) est de la forme $\alpha y dt$. Ainsi, en divisant par dt :

l'équation vérifiée par le nombre de malades y est

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y$$

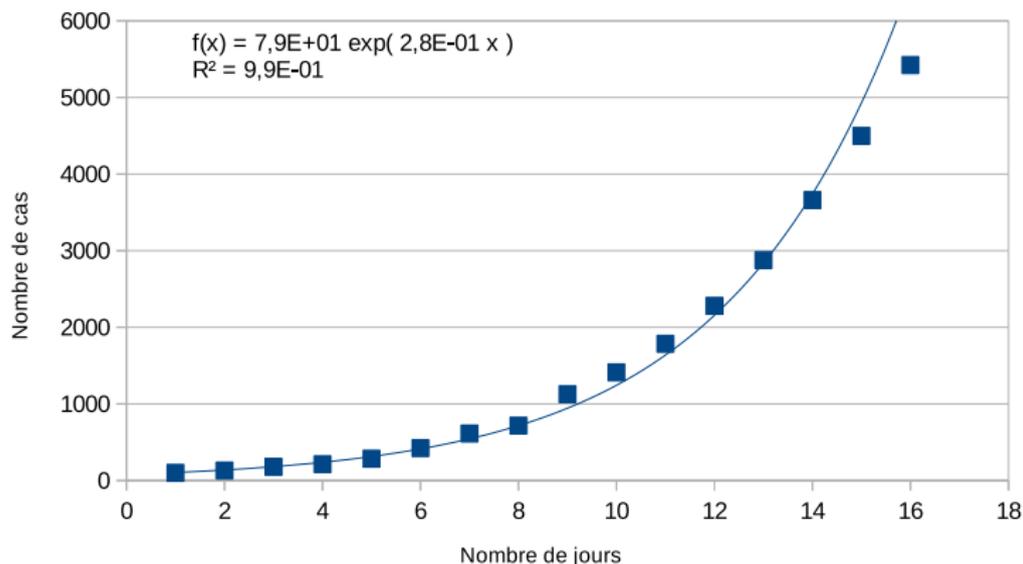
Il s'agit d'une **équation différentielle**, entre la fonction y et sa dérivée

On constate que $y(t) = Ce^{\alpha t}$ est solution :

en effet sa dérivée vaut bien $\frac{dy}{dt} = y'(t) = \alpha Ce^{\alpha t} = \alpha y$

virus

Bien que le modèle choisi soit extrêmement simpliste, et en prenant les données de contamination par le COVID-19 pour la France entre le 1er mars (1er jour avec 100 cas recensés) et le 16 mars 2020 (le confinement change la propagation), on constate que la modélisation par une exponentielle (une régression permettant d'estimer la constante C et le coefficient α) est correcte



condensateur

On connaît la tension $u(t)$ imposée aux bornes d'un circuit RC , et on souhaite déterminer la charge $q(t)$ du condensateur.

Si $i(t)$ l'intensité du courant qui parcourt le circuit, alors :

- $i(t) = \frac{dq}{dt}(t)$
- la tension aux bornes de la résistance est $Ri(t)$
- la tension aux bornes du condensateur est $\frac{q(t)}{C}$

et la tension aux bornes du circuit peut donc s'exprimer de deux manières différentes :

équation différentielle vérifiée par $q(t)$

$$R \frac{dq}{dt}(t) + \frac{q(t)}{C} = u(t)$$

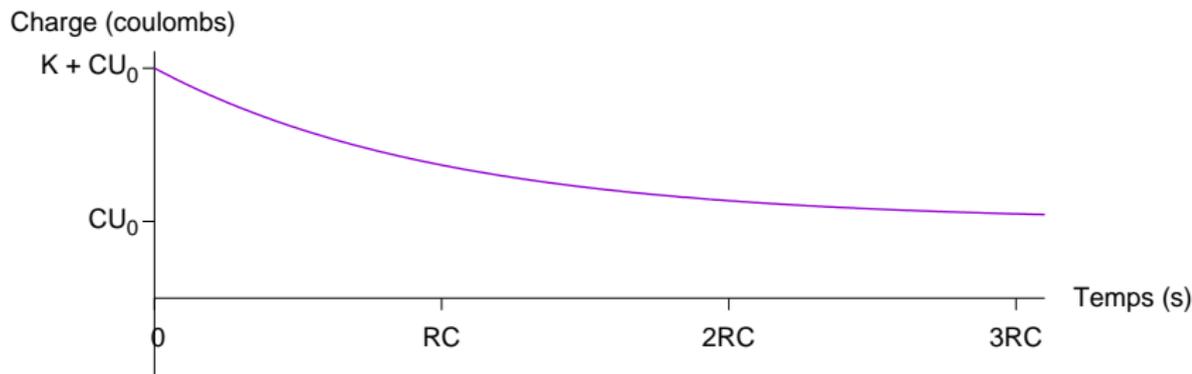
Il s'agit d'une équation différentielle de variable t , de fonction inconnue q , et dont $u(t)$, R et C sont des paramètres connus.

condensateur

La manière de résoudre l'équation dépendra de l'expression de $u(t)$.

Si on suppose que $u(t)$ est une constante de valeur U_0 ("tension continue"), alors on vérifie facilement que toute fonction de la forme $q(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + CU_0$, K étant une constante quelconque, est solution de l'équation.

En effet $\frac{dq}{dt} = -\frac{K}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$ et donc $R\frac{dq}{dt}(t) + \frac{q(t)}{C} = -\frac{K}{C}e^{-\frac{t}{RC}} + (\frac{K}{C}e^{-\frac{t}{RC}} + U_0)$, les exponentielles se simplifient et on obtient bien U_0 .



généralités

Une **équation différentielle** est une équation reliant une variable, une fonction, et ses dérivées successives.

L'**ordre** de l'équation différentielle est l'ordre de dérivation maximal qui apparaît.

La **résoudre**, ou l'**intégrer**, c'est déterminer l'ensemble des fonctions qui la vérifient.

exemple 1 : $y' = \alpha y$ est une équation différentielle d'ordre 1, de fonction inconnue y , dans laquelle la variable n'apparaît pas explicitement

exemple 2 : $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u(t)$ est une équation différentielle d'ordre 1, de variable t et de fonction q

exemple 3 : $y''y' + 2(\sin x)y = 3x$ est une équation d'ordre 2, de variable x et de fonction y

généralités

En général une équation admet une infinité de solutions, et il faudra connaître une ou des **conditions initiales** (la valeur de la fonction à l'instant 0, par exemple) pour déterminer la solution correspondant à un problème physique précis.

exemple : les solutions de l'équation $R \frac{dq}{dt}(t) + \frac{q(t)}{C} = U_0$ sont les fonctions

$q(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + CU_0$, avec K un réel quelconque : il existe autant de fonctions $q(t)$ solutions que de réels K .

Mais si on sait que, par exemple, à l'instant 0 la charge du condensateur est nulle, alors $q(0) = 0 = K + CU_0$, et on peut donc déterminer $K = -CU_0$,

et on a ainsi déterminé la charge du condensateur à chaque instant,

$$q(t) = -CU_0 e^{-\frac{t}{RC}} + CU_0$$

équations linéaires

Une équation est dite **linéaire** si elle peut s'écrire sous la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

les a_i et b étant des fonctions réelles définies sur un intervalle I .

Si les a_i sont des fonctions constantes, on dit que l'équation est à **coefficients constants**.

remarque 1 : b n'est pas forcément constant dans une équation à coefficients constants.

remarque 2 : si b est **nulle**, on dit que l'équation est **homogène** ou **sans second membre**.

Les équations que :

- on rencontrera dans ce cours,
 - que l'on apprendra à résoudre,
 - que vous rencontrerez en physique,
- seront principalement des équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants, le second membre lui n'étant pas forcément constant.

Par exemple $y' + 3y = 2 \cos(x)$, ou $y'' - y' + 5y = 3$, ou $L\ddot{\theta} + g\theta = 0$

équation linéaire d'ordre 1 à coefficient et second membre constants

l'équation la plus courante

Si a et b sont des réels quelconques, avec $a \neq 0$, les solutions de l'équation différentielle

$$y' + ay = b$$

sont les fonctions $y(t) = Ce^{-at} + b/a$, C étant un réel quelconque.

exemple 1 : les solutions de l'équation $y' + \alpha y = 0$ sont les $y(t) = Ce^{-\alpha t}$

exemple 2 : les solutions de l'équation $y' - 2y = 3$ sont les $Ce^{2t} - 3/2$

exemple 3 : les solutions de l'équation $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$ sont les $Ce^{-Rt/L}$

équation linéaire d'ordre 1 à coefficient et second membre constants

Sans faire une démonstration rigoureuse on va décrire la résolution de l'équation $y' + ay = b$, en plusieurs étapes :

- on recherche les solutions non nulles de l'équation sans second membre

$$y' + ay = 0 : \text{elle équivaut successivement à } y' = -ay \text{ puis } \frac{y'}{y} = -a$$

en primitivant on obtient : $\ln |y| = -ax + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

en prenant l'exponentielle : $|y| = e^{-ax} e^c$

en enlevant la valeur absolue : $y = \pm e^c e^{-ax}$

et comme $\pm e^c$ représente un nombre positif ou négatif quelconque, on peut le renommer C , et finalement les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $y_H(x) = y_{SSM} = Ce^{-ax}$, $C \in \mathbb{R}$

- le second membre est constant, on cherche une solution particulière y_p constante ; alors $y'_p = 0$ et l'équation devient $0 + ay_p = b$ donc $y_p = b/a$, qui est bien une constante
- si y est une autre solution, alors $y - y_p$ est solution de l'équation sans second membre, donc $y - y_p = y_H$ et finalement, $y = Ce^{-ax} + b/a$

Si cette démonstration vous aide à comprendre, et vous permet de retrouver rapidement, la formule, c'est parfait. Sinon...il vous reste à l'apprendre par coeur.

équations d'ordre 1 sans second membre

On cherche ici à résoudre les équations de la forme $y' + a(x)y = 0$, $a(x)$ étant une fonction quelconque.

On peut se ramener à l'équation $y'/y = -a(x)$, et si A désigne une primitive de a ,

$$\ln |y| = -A(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

donc $y(x) = \pm e^c e^{-A(x)}$, et donc :

équation linéaire d'ordre 1 sans second membre

les solutions de l'équation $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} \text{ où } C \text{ est une constante quelconque et } A \text{ une primitive de } a$$

exemple 1 : les solutions de l'équation $y' + 3y = 0$ sont les fonctions $y(x) = Ce^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$, car une primitive de 3 est $3x$

exemple 2 : les solutions de l'équation $2y' + xy = 0$ sont les fonctions $y(x) = Ce^{-x^2/4}$, $C \in \mathbb{R}$, car une primitive de $x/2$ est $x^2/4$

exemple 3 : les solutions de l'équation $y' = e^x y$ sont les fonctions $y(x) = Ce^{e^x}$, $C \in \mathbb{R}$, car une primitive de e^x est e^x

équations d'ordre 1 avec second membre

Pour résoudre une équation de la forme $y' + a(x)y = b(x)$,
 $a(x)$ et $b(x)$ étant des fonctions quelconques,
l'idée générale est la suivante :

- on résout l'équation sans second membre associée $y' + a(x)y = 0$
- on cherche une solution particulière y_p , ce qui peut être fait de différentes manières :
 - par chance, ou intuition...
 - par vérification d'une solution proposée par l'énoncé
 - par la recherche d'une solution « qui ressemble au second membre » (en particulier quand a est une constante)
 - enfin, en dernier recours, par la méthode de « variation de la constante », qui fonctionne tout le temps mais est souvent laborieuse
- alors les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y = y_{SSM} + y_p$

exemple, résoudre l'équation $y' + y/x = x$ en cherchant une solution particulière sous la forme ax^2 :

Les solutions de l'équation sans second membre sont $y_{SSM} = C/x$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Chercher une solution particulière $y_p = ax^2$, c'est calculer $y'_p = 2ax$ et reporter dans l'équation : $2ax + ax^2/x = x$ donc $2a + a = 1$ donc $3a = 1$. Ainsi, $y_p = x^2/3$.

Les solutions sont donc les fonctions de la forme $y(x) = C/x + x^2/3$, $C \in \mathbb{R}$

recherche de solution particulière : second membre polynomial

second membre constant

l'équation $y' + ay = b$ (a et b étant des constantes) aura si $a \neq 0$ la solution particulière b/a

et plus généralement,

second membre polynomial

si P est un polynôme, l'équation $y' + ay = P(x)$, a étant constante, aura si $a \neq 0$ une solution particulière polynomiale de même degré que P .

exemple, $y' + 3y = 2x$: la solution de l'équation homogène est $y_{SSM} = Ce^{-3x}$.

On cherche une solution particulière $y_p = \alpha x + \beta$ (polynôme de degré 1, comme $2x$).

Alors $y'_p = \alpha$ et l'équation devient $\alpha + 3(\alpha x + \beta) = 2x$.

Par identification des termes en x on a $3\alpha = 2$; pour les constantes, $\alpha + 3\beta = 0$.

Donc $\alpha = 2/3$ et $\beta = -2/9$

Les solutions sont donc les $y = Ce^{-3x} + 2x/3 - 2/9$

remarque : si $a = 0$, on cherchera Q de degré égal à $\deg(P) + 1$

recherche de solution particulière : second membre exponentiel

second membre exponentiel

l'équation $y' + ay = e^{bx}$ (a et b étant des constantes) aura « en général » une solution particulière de la forme αe^{bx} (α étant un réel à déterminer)

exemple, $y' - 2y = e^x$: la solution de l'équation homogène est $y_{SSM} = Ce^{2x}$.

On cherche une solution particulière $y_p = \alpha e^x$.

Alors $y'_p = \alpha e^x$ et l'équation devient $\alpha e^x - 2\alpha e^x = e^x$.

Si on simplifie par l'exponentielle, $\alpha - 2\alpha = 1$ donc $\alpha = -1$, et $y_p = -e^x$ convient.

Les solutions sont donc les fonctions $y = y_{SSM} + y_p = Ce^{2x} - e^x$, $C \in \mathbb{R}$

remarque : on peut préciser le « en général » de la proposition : ce sera le cas si b est différent de $-a$. Sinon, on cherchera y_p sous la forme $\alpha x e^{bx}$.

exemple, $y' - y = e^x$: si on cherche une solution particulière de la forme αe^x , on trouve que α doit vérifier $0 = 1$, ce qui est impossible.

On cherche donc $y_p = \alpha x e^x$, alors $y'_p = \alpha x e^x + \alpha e^x$, et donc l'équation devient $\alpha x e^x + \alpha e^x - \alpha x e^x = e^x$ donc $\alpha e^x = e^x$ donc $\alpha = 1$, la solution particulière est $y_p = x e^x$

recherche de solution particulière : second membre trigonométrique

second membre trigonométrique

une équation $y' + ay = K \cos(\omega x)$ ou $y' + ay = K \sin(\omega x)$
 (a, K et ω étant des constantes)

aura une solution particulière de la forme $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$

résumé, en français : si le second membre est sinusoïdal de pulsation ω , une solution particulière est une combinaison linéaire d'un sinus et d'un cosinus de pulsation ω

résumé, en électricité : si on alimente un circuit avec une tension ou une intensité sinusoïdale de pulsation ω , on aura dans le circuit un régime permanent sinusoïdal de même pulsation (mais d'amplitude différente, et déphasée)

exemple, $y' - 2y = 3 \cos(4x)$: la solution de l'équation homogène est $y_{SSM} = Ce^{2x}$.
 On cherche une solution particulière $y_p = A \cos(4x) + B \sin(4x)$.

Alors $y'_p = -4A \sin(4x) + 4B \cos(4x)$ et l'équation devient

$$(-4A \sin(4x) + 4B \cos(4x)) - 2(A \cos(4x) + B \sin(4x)) = 3 \cos(4x).$$

Soit, en identifiant les cosinus : $4B - 2A = 3$, et en identifiant les sinus, $-4A - 2B = 0$.

Ainsi, $B = -2A$ et $6A = 3$ donc $A = -\frac{3}{10}$ et $B = \frac{3}{5}$, et $y_p = -\frac{3}{10} \cos(4x) + \frac{3}{5} \sin(4x)$,

et les solutions de l'équation sont les $y = y_{SSM} + y_p = Ce^{2x} - \frac{3}{10} \cos(4x) + \frac{3}{5} \sin(4x)$

recherche de solution particulière : second membre trigonométrique

remarque : si on s'intéresse à l'amplitude et à la phase de la solution particulière, on pourra factoriser $\sqrt{\left(-\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{36}{100}} = \sqrt{\frac{45}{100}} = 3\sqrt{5}/10$, et donc écrire $-\frac{3}{10} \cos(4x) + \frac{3}{5} \sin(4x) = \frac{3\sqrt{5}}{10} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \cos(4x) + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(4x)\right) = \frac{3\sqrt{5}}{10} \cos(4x - \varphi)$ si on pose $\varphi = \arctan(-2) + \pi$, donc

$$y_p = \frac{3\sqrt{5}}{10} \cos(4x - \arctan(-2) + \pi).$$

méthode complexe : en électricité, on procède souvent différemment, en utilisant une représentation complexe : on « remplace » les cosinus par des exponentielles complexes, on cherche les solutions, et à la fin la solution particulière réelle est la partie réelle de la solution particulière complexe.

En pratique : on regarde l'équation $y' - 2y = 3e^{4ix}$ (on a remplacé $\cos(4x)$ par e^{4ix}), on cherche y_p sous la forme $y_p = Ae^{i(4x+\varphi)}$ (avec $A > 0$ et φ réel), donc $y'_p = 4iAe^{i(4x+\varphi)}$.

En reportant dans l'équation, on obtient $(4i - 2)Ae^{i(4x+\varphi)} = 3e^{4ix}$ donc

$$(4i - 2)Ae^{i4x}e^{i\varphi} = 3e^{4ix} \text{ et finalement, } (4i - 2)Ae^{i\varphi} = 3 \text{ soit } Ae^{i\varphi} = \frac{3}{4i - 2} = \frac{-3 - 6i}{10}.$$

A est le module soit $\frac{3\sqrt{5}}{10}$, φ est l'argument soit $\arctan(2) + \pi$, donc

$$Ae^{i\varphi} = \frac{3\sqrt{5}}{10} e^{\arctan(2)+\pi}, \text{ la solution complexe est } y_p = \frac{3\sqrt{5}}{10} e^{i(4x+\arctan(2)+\pi)}.$$

Si on en prend la partie réelle, on retrouve bien la solution particulière trouvée plus

haut,

$$y_p = \frac{3\sqrt{5}}{10} \cos(4x + \arctan(2) + \pi)$$

méthode de variation de la constante

Pour résoudre $y' + a(x)y = b(x)$, on sait déjà que l'on peut commencer par chercher les solutions de l'équation sans second membre : $y_{SSM}(x) = Ce^{-A(x)}$ pour $C \in \mathbb{R}$.

méthode de variation de la constante

On cherchera une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sous la forme

$$y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}$$

(on fait « varier » la constante C ...)

exemple, $y' - 3y/x = x^2$: on résout l'équation sans second membre $y' - 3y/x = 0$, et on trouve $y_{SSM}(x) = Cx^3$. On cherche donc une solution particulière $y_p = C(x)x^3$. Alors $y_p'(x) = 3x^2C(x) + x^3C'(x)$, et en reportant dans l'équation : $C'(x)x^3 = x^2$, donc $C'(x) = 1/x$. Une solution possible est donc $C(x) = \ln|x|$, soit $y_p(x) = x^3 \ln|x|$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $y(x) = Cx^3 + x^3 \ln|x|$, $C \in \mathbb{R}$.

formule générale

on voit en appliquant cette méthode que les solutions de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sont les fonctions

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + D(x)e^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R},$$

où A est une primitive de a et $D(x)$ une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

équation linéaire du second ordre

Pour résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à **coefficients constants**

$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et $d(x)$ constante, polynomiale, exponentielle ou sinusoïdale)

la méthode est la même que pour une équation du premier ordre :

- on résout l'équation sans second membre associée (c'est l'objet de ce qui suit),
- on détermine une solution particulière (par les mêmes méthodes qu'au premier ordre),
- on additionne les deux solutions.

On doit donc d'abord résoudre l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.

Pour cela, cherchons les solutions de la forme $y(x) = e^{rx}$.

Alors $y'(x) = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$, et l'équation devient $ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$.

En simplifiant par e^{rx} on obtient l'équation équivalente $ar^2 + br + c = 0$.

Ainsi, e^{rx} est une solution de $ay'' + by' + cy = 0$ si et seulement si r est une solution de l'équation du second degré $ar^2 + br + c = 0$ dite **équation caractéristique**.

équation linéaire du second ordre

Décrivons maintenant l'ensemble des solutions :

- s'il y a deux racines r_1 et r_2 , non seulement e^{r_1x} et e^{r_2x} sont solutions, mais aussi toute combinaison linéaire $\lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}$. On admet qu'il n'y a pas d'autre solution.

- s'il y a une racine réelle unique r , on peut vérifier que xe^{rx} est aussi une solution (car alors $r = \frac{-b}{2a}$).

On peut aussi vérifier que toute combinaison linéaire $\lambda e^{rx} + \mu xe^{rx}$ est solution aussi ; et on admet qu'il n'y en a pas d'autre.

- si les racines ne sont pas réelles, on peut les écrire $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$ avec u et $\pm v$ les parties réelles et imaginaires des solutions.

Alors $e^{r_1x} = e^{ux}(\cos(vx) + i \sin(vx))$ et $e^{r_2x} = e^{ux}(\cos(vx) - i \sin(vx))$ sont des solutions, et toute combinaison linéaire réelle aussi.

On admet qu'il n'y a pas d'autre solution.

équation linéaire du second ordre sans second membre

résolution de l'équation du second ordre sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$

On considère l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$,
et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Alors :

si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles r_1 et r_2 , et les solutions de l'équation différentielle sont les
$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une solution réelle unique r , et les solutions de l'équation différentielle sont les
$$y(x) = \lambda e^{rx} + \mu x e^{rx}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $u \pm iv$, et les solutions de l'équation différentielle sont les
$$y(x) = (\lambda \cos(vx) + \mu \sin(vx))e^{ux}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

exemples

exemple 1 : $y'' + y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, de solutions i et $-i$. Et donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $\lambda \cos x + \mu \sin x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

exemple 2 : $y'' - y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$, de solutions 1 et -1 . Donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $\lambda e^x + \mu e^{-x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

exemple 3 : $y'' - 2y' + 2y = 3$.

On résoud d'abord l'équation sans second membre $y'' - 2y' + 2y = 0$, qui a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$, de solutions $1 + i$ et $1 - i$.

Les solutions de l'équation différentielle sans second membre sont donc les fonctions $y_{SSM}(x) = (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On cherche alors une solution particulière y_p constante (car le second membre est constant). Donc $y_p' = 0$, $y_p'' = 0$, l'équation devient $0 + 0 + 2y_p = 3$, donc $y_p = 3/2$.

Ainsi les solutions sont les fonctions $(\lambda \cos x + \mu \sin x)e^x + 3/2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

caractérisation d'un vecteur

Un vecteur $\vec{u} = \vec{AB}$ est défini par :

- sa **direction** (la direction de la droite (AB))
- son **sens** (de A vers B)
- sa **norme** ($\|\vec{u}\|$ est la longueur AB)

Le physicien rajoute souvent une **origine** ou **point d'application** (pour une force)

Pour multiplier un vecteur \vec{v} par un nombre réel λ : le vecteur $\lambda\vec{v}$ est :
de même direction que \vec{v}
de même sens (si $\lambda > 0$) ou de sens opposé (si $\lambda < 0$)
de norme multipliée par $|\lambda|$

Pour additionner deux vecteurs on utilise la **relation de Chasles** $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$: si \vec{AB} et \vec{BC} sont deux vecteurs, leur somme est le vecteur \vec{AC}

Pour soustraire deux vecteurs : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, on additionne \vec{u} et $-\vec{v}$

directions et angle de deux vecteurs

Deux vecteurs qui ont même direction sont dits **colinéaires**

Deux vecteurs dont les directions sont des droites orthogonales sont dits **orthogonaux**

Entre deux vecteurs du plan, on peut considérer :

- l'**angle géométrique** (ou **non orienté**), compris entre 0 et π
- l'**angle orienté**, dans $] - \pi, \pi]$ (ou plus généralement, réel, défini à 2π près)

Les angles géométriques formés par (\vec{u}, \vec{v}) et par (\vec{v}, \vec{u}) sont égaux, alors que les angles orientés sont opposés

Deux vecteurs sont colinéaires si leur angle est multiple de π , et sont orthogonaux si leur angle orienté vaut $\pm\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

bases et repères

Deux vecteurs non colinéaires du plan \vec{i} et \vec{j} (ou trois vecteurs non coplanaires de l'espace \vec{i} , \vec{j} et \vec{k}) forment une **base**

Tout vecteur peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ des vecteurs de la base. (a, b, c) sont alors les **coordonnées** du vecteur dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base utilisée dans un exercice, on pourra identifier un vecteur à ses coordonnées : $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = (a, b, c) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Une base est dite **orthogonale** si les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont deux à deux orthogonaux, et **orthonormée** si les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont deux à deux orthogonaux et sont de norme 1.

La donnée d'un point O et d'une base de vecteurs définit un **repère**.

Dans tout le chapitre et sauf indication contraire, un repère orthonormé est fixé dans chaque page de cours et chaque exercice.

barycentres

barycentre

Si A et B sont des points du plan ou de l'espace, et a et b des coefficients réels positifs, le **barycentre** de $A(a)$ et $B(b)$ (on indique les coefficients entre parenthèses) est le point I défini par la relation : $a\vec{AI} + b\vec{BI} = \vec{0}$

exemple 1 : le barycentre I de $A(1)$ et $B(1)$ est simplement le milieu du segment $[AB]$. En effet, si $\vec{AI} + \vec{BI} = \vec{0}$, alors $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB} = \vec{AI} + -\vec{BI} = \vec{AI} - -\vec{AI} = 2\vec{AI}$.

exemple 2 : le barycentre I de $A(2)$ et $B(1)$ est le point du segment $[AB]$ situé 2 fois plus près de A que de B . En effet, si $2\vec{AI} + \vec{BI} = \vec{0}$, on a par le même calcul qu'au dessus $\vec{AB} = 3\vec{AI}$.

propriété

Si M est un point quelconque, alors $(a + b)\vec{IM} = a\vec{AM} + b\vec{BM}$

(en effet, $a\vec{AM} + b\vec{BM} = a\vec{AI} + a\vec{IM} + b\vec{BI} + b\vec{IM} = \vec{0} + a\vec{IM} + b\vec{IM}$)

barycentres

remarque : on peut aussi utiliser cette notion avec 3 points ou plus.

Par exemple, le barycentre de $A(1)$, $B(1)$ et $C(1)$ est le centre de gravité du triangle ABC .

mécanique

si A et B sont des objets ponctuels de masses m_A et m_B , le barycentre de $A(m_A)$ et $B(m_B)$ est simplement le **centre de masse** du système constitué par les deux points.

exemple : deux points A et B sont situés à 20cm l'un de l'autre. La masse de A est 500g, la masse de B est 2kg. Constuire le centre de masse du système.

le produit scalaire

le **produit scalaire** de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

\cos étant paire, on a pour tous \vec{u}, \vec{v} : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$: le produit scalaire est **commutatif**

Le produit scalaire est distributif : $(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{w} = a\vec{u} \cdot \vec{w} + b\vec{v} \cdot \vec{w}$

annulation du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ si et seulement si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}$$

calcul du produit scalaire en repère orthonormé :

le produit scalaire de $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ vaut $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$.

En calculant ainsi $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \cdot \cos(0) = \|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$, on en déduit que

$$\text{la norme de } \vec{u}(a, b, c) \text{ est } \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Pour calculer un produit scalaire on peut donc utiliser la norme de chaque vecteur et l'angle qu'ils forment entre eux (méthode géométrique) ou leurs coordonnées (méthode analytique)

projection d'un vecteur

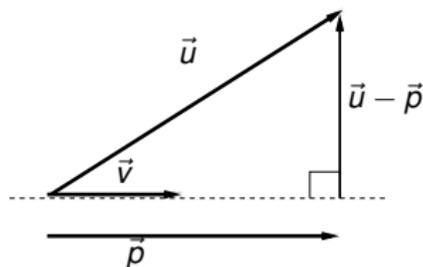
Si \vec{u} est un vecteur et si \vec{v} est un vecteur non nul,

la projection de \vec{u} sur (la direction de) \vec{v}

est le vecteur \vec{p} :

de même direction que \vec{v}

tel que $\vec{u} - \vec{p}$ est orthogonal à \vec{v}



Calculons \vec{p} : il est colinéaire à \vec{v} , donc de la forme $\vec{p} = \lambda \vec{v}$.

$\vec{u} - \vec{p}$ est orthogonal à \vec{v} donc $(\vec{u} - \lambda \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$. Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{v} - \lambda \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$, et donc $\lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$.

On peut aussi géométriquement exprimer la norme de \vec{p} comme le côté adjacent à l'angle entre \vec{u} et \vec{v} du triangle d'hypoténuse $\|\vec{u}\|$: $\|\vec{p}\| = \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Ainsi :

la projection de \vec{u} sur (la direction de) \vec{v} est le vecteur $\vec{p} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$ et sa norme est $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

remarque : si $\|\vec{v}\| = 1$, la projection de \vec{u} sur la direction de \vec{v} est le vecteur $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v}$

équations cartésienne d'une droite du plan

équation de la droite D passant par $A(x_0, y_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$:

Soit $M(x, y)$ un point du plan. Il est sur la droite si et seulement si \vec{AM} est un vecteur directeur de la droite, donc si et seulement si \vec{AM} est orthogonal à \vec{n} .

Ainsi, une condition nécessaire est suffisante pour que $M(x, y)$ appartienne à D est

$$\text{que } \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

On obtient donc l'équation D : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

(ou encore $ax + by = c$ avec c la constante $ax_0 + by_0$)

Réciproquement, pour $(a, b) \neq (0, 0)$, $ax + by = c$ est l'équation de la droite de vecteur normal (a, b) et passant par exemple par $(0, c/b)$ (si b est non nul) ou $(c/a, 0)$ (si a est non nul)

Un vecteur directeur de cette droite est par exemple $(-b, a)$

équations cartésienne d'un plan de l'espace

équation du plan P de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et passant par $A(x_0, y_0, z_0)$:

$M(x, y, z)$ est dans le plan normal à \vec{n} passant par A si et seulement si \vec{AM} et \vec{n} sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$,
$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

On obtient donc l'équation $P : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
ou encore $ax + by + cz = d$ avec d la constante $ax_0 + by_0 + cz_0$

Réciproquement, pour $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $ax + by + cz = d$ est l'équation de la droite de vecteur normal (a, b, c) et passant par exemple par $(0, d/b, 0)$ (si b est non nul) ou $(d/a, 0, 0)$ (si a est non nul) ou $(0, 0, d/c)$ (si c est non nul)

équations paramétriques d'une droite

On peut aussi décrire une droite (AB) par un système d'équations paramétriques : $M(x, y, z)$ appartient à (AB) si et seulement si \vec{AM} et \vec{AB} sont colinéaires, donc si et seulement si il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{AB}$

En écrivant cette égalité vectorielle coordonnée par coordonnée, cela équivaut à

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

exemple 1 : équations paramétriques de la droite (AB) si $A(1, 2)$ et $B(-2, 3)$?

$\vec{AB}(-3, 1)$ et donc les équations sont $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

exemple 2 : les points dont les coordonnées vérifient les relations

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ forment une droite passant par le point de coordonnées $(2, -1)$ et de vecteur directeur $(1, -2)$

définition du produit vectoriel

Le produit scalaire est un réel. On définit un autre produit, qui sera un vecteur :

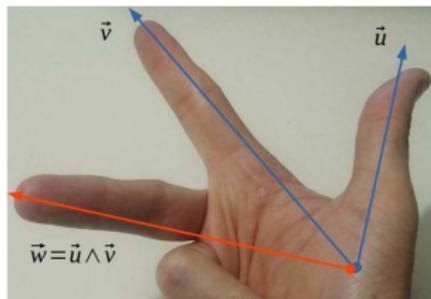
le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} est le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est de direction orthogonale à celles de \vec{u} et \vec{v} ,
- le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est tel que le $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit direct,
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$

détermination du sens :

un trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est dit **direct** si quand on place (sur la main droite) le pouce dans le sens de \vec{u} , l'index dans le sens \vec{v} , alors le majeur indique le sens de \vec{w} .

C'est la **règle des trois doigts de la main droite**



Critère alternatif : quand on place le majeur de la main droite dans le sens de \vec{u} , la paume de la main tournée dans le même sens que \vec{v} , alors le vecteur \vec{w} a le même sens que le pouce (même schéma mais en faisant tourner : $\vec{u} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \rightarrow \vec{u}$)

propriétés du produit vectoriel

condition d'annulation du produit vectoriel

$\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

interprétation géométrique du produit vectoriel

$||\vec{u} \wedge \vec{v}||$ est l'aire du parallélogramme dont les côtés sont construits sur \vec{u} et \vec{v}

anti-commutativité du produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

(si on permute \vec{u} et \vec{v} , ni la direction ni la norme ne changent, mais le sens est opposé)

distributivité

$$(a\vec{u} + b\vec{v}) \wedge \vec{w} = a\vec{u} \wedge \vec{w} + b\vec{v} \wedge \vec{w}$$

calcul analytique du produit vectoriel

calcul du produit vectoriel à l'aide de coordonnées

pour $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - b'c)\vec{i} + (ca' - ac')\vec{j} + (ab' - ba')\vec{k}$
soit

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} bc' - b'c \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$$

en pratique : pour calculer une coordonnée de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on « oublie » les coordonnées correspondantes dans les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , et on calcule le produit en croix ou

déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$ des coordonnées restantes, **en rajoutant un signe - pour la deuxième coordonnée.**

exemple : si $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, on a $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \times 7 - (-2) \times 5 \\ -(1 \times 7 - 2 \times 5) \\ 1 \times (-2) - 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$

distance d'un point à un plan, à une droite

la distance d'un point M au plan P passant par le point A et de vecteur normal \vec{n} est

$$d(M, P) = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

En effet : si H est la projection orthogonale de M sur P , la distance $d(M, P)$ cherchée est la distance MH (plus petite distance entre M et l'un des points du plan).

Par la relation de Chasles $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$, et donc $\vec{AM} \cdot \vec{n} = \vec{AH} \cdot \vec{n} + \vec{HM} \cdot \vec{n} = \vec{HM} \cdot \vec{n}$ (car \vec{AH} est un vecteur du plan P , donc est orthogonal à \vec{n})

\vec{HM} et \vec{n} sont colinéaires : le produit scalaire $\vec{HM} \cdot \vec{n}$ vaut $\pm HM \|\vec{n}\|$ car l'angle entre les vecteurs est 0 ou π de cosinus ± 1 . En prenant la valeur absolue pour enlever ce signe, on a bien $HM = |\vec{AM} \cdot \vec{n}| / \|\vec{n}\|$.

On montre de manière analogue que

la distance d'un point M à la droite D passant par A et de vecteur directeur \vec{u} est

$$d(M, D) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

résolutions d'un système par combinaisons linéaires

exemple 1 : pour résoudre le système
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x + y + 2z = 7 \\ 4x - 3y - z = 4 \end{cases}$$
 on se ramène à un

système équivalent mais **étagé** : une des lignes ne contient qu'une variable, une autre seulement deux variables, ce qui permet une résolution facile.

Pour cela on choisit un **pivot** : un coefficient qui va permettre d'enlever l'une des variables de deux des lignes.

Par exemple, le y de la ligne 2 : on enlève deux fois la ligne 2 à la ligne 1, on ajoute trois fois la ligne 2 à la ligne 3, et les y disparaissent des lignes 1 et 3 :

$$\begin{cases} -x - 5z = -10 & (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\ 2x + y + 2z = 7 \\ 10x + 5z = 25 & (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x + 5z = 10 & (L_1 \leftarrow -L_1) \\ 2x + y + 2z = 7 \\ 2x + z = 5 & (L_3 \leftarrow L_3/5) \end{cases}$$

$$\text{De même avec le } x \text{ de la ligne 1 : } \begin{cases} x + 5z = 10 \\ 2x + y + 2z = 7 \\ -9z = -15 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi finalement } z = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}. \text{ Puis } x = 10 - 5z = \frac{5}{3}, \text{ puis } y = -2x - 2z + 7 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{La solution unique est donc } (x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

résolutions d'un système par combinaisons linéaires

exemple 2 : pour résoudre $\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = -2 \\ x + 3y - 4z = -3 \end{cases}$ on utilise le x de la ligne 1 :

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 5y - 6z = -4 \\ 5y - 6z = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}. \text{ Les deux dernières lignes sont alors identiques.}$$

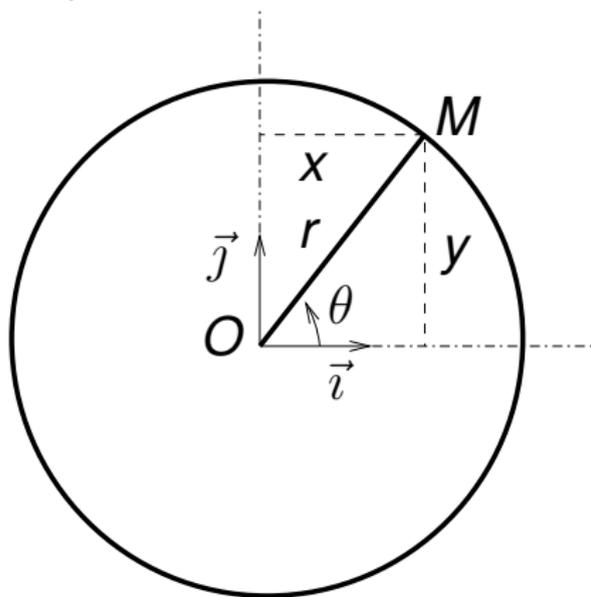
Le système aura une infinité de solutions, que l'on va décrire en utilisant z comme paramètre : le système équivaut à

$$\begin{cases} x = 2y - 2z + 1 \\ y = 6z/5 - 4/5 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x = 12z/5 - 8/5 - 2z + 1 \\ y = 6z/5 - 4/5 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x = 2z/5 - 3/5 \\ y = 6z/5 - 4/5 \\ z = z \end{cases}$$

z étant un réel quelconque, on reconnaît des équations paramétriques de la droite passant par le point $(-3/5, -4/5, 0)$ et de vecteur directeur $(2/5, 6/5, 1)$ soit encore $(2, 6, 5)$

les coordonnées polaires

(O, \vec{i}, \vec{j}) repère orthonormé du plan. M de coordonnées cartésiennes (x, y)



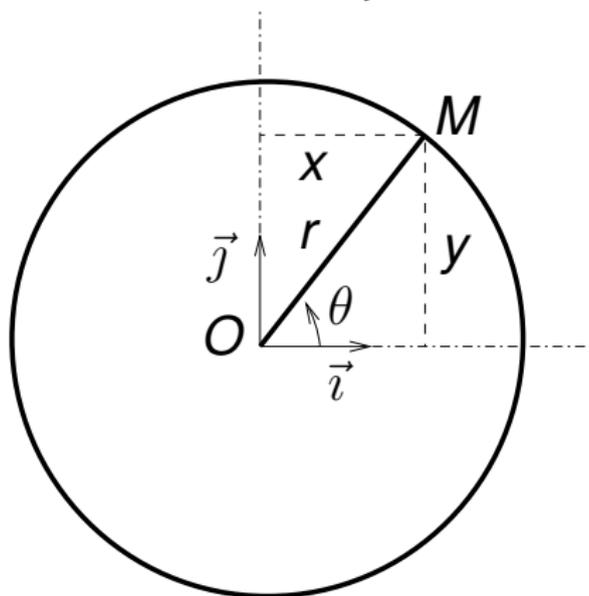
coordonnées polaires de M :

$$r = \|\vec{OM}\| \quad \text{et} \quad \theta = (\vec{i}, \vec{OM})$$

r est unique, et θ défini à 2π près (sauf si $M = O$)

passer de coordonnées polaires à coordonnées cartésiennes

relations entre x , y , r et θ ?



par définition du sinus et du cosinus :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

passer de coordonnées cartésiennes à coordonnées polaires

relations réciproques ?

pour r : $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$, donc $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

pour θ : on sait que $\frac{y}{x} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta$: θ et $\arctan(y/x)$ ont même tangente
 $\arctan(y/x) \in [-\pi/2; \pi/2]$: c'est θ si $x > 0$, sinon il faut ajouter $\pm\pi$

coordonnées polaires en fonction de x et y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

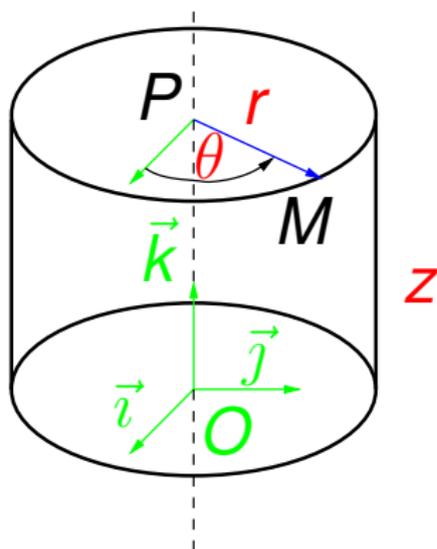
$$\left| \begin{array}{ll} \theta = \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \theta = \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \theta = \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ \theta = \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \theta = -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{array} \right.$$

coordonnées cylindriques

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé direct de l'espace.

M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

P le projeté de M sur (Oz) .



coordonnées cylindriques de M :

$$r = \|\vec{PM}\| \quad , \quad \theta = (\vec{i}, \vec{PM}) \quad , \quad z$$

r et z sont uniques, et θ défini à 2π près (sauf si M est sur l'axe (Oz))

conversion entre coordonnées cylindriques et cartésiennes

Les formules sont identiques aux coordonnées polaires, en rajoutant $z = z$. Ainsi :
 coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées cylindriques :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

et les relations réciproques sont

coordonnées cylindriques en fonction des coordonnées cartésiennes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

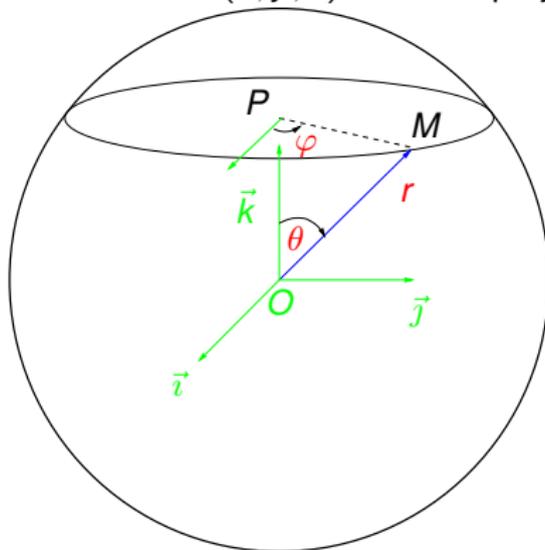
$$\left. \begin{array}{ll} \theta = \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \theta = \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \theta = \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ \theta = \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \theta = -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{array} \right| z = z$$

coordonnées sphériques

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé direct de l'espace.

M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

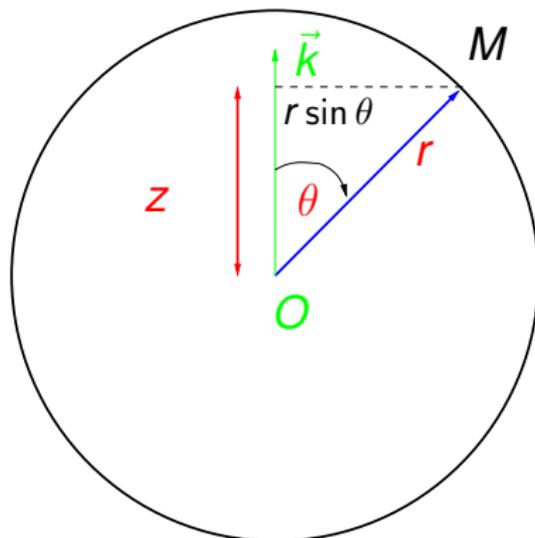
P projeté de M sur (Oz) .



coordonnées sphériques de M :

$$r = \|\vec{OM}\| \quad \varphi = (\vec{i}, \vec{PM}) \quad \theta = (\vec{k}, \vec{OM})$$

θ est entre 0 et π , φ entre 0 et 2π

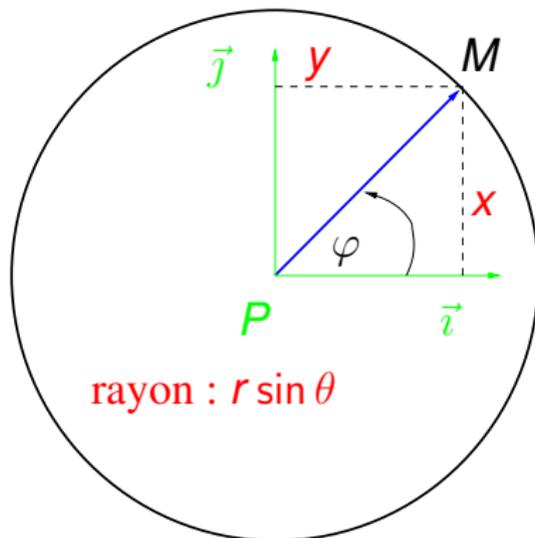
la coordonnée z relation entre z , r et θ ? M sur un grand cercle (méri dien) de rayon r

$$z = r \cos \theta$$

(ne dépend pas de φ)

les coordonnées x et y

relations entre x , y , r , θ et φ ? Si on regarde la sphère d'en haut :



M sur un cercle horizontal de centre O et de rayon $r \sin \theta$ (un parallèle)

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques

- pour r : $r^2 = OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$, donc $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- pour θ : $\frac{z}{r} = \cos \theta$ et $\theta \in [0; \pi]$ donc $\theta = \arccos(z/r)$
- pour φ : $y/x = \tan \varphi$ donc φ et $\arctan(y/x)$ ont la même tangente
 $\arctan(y/x) \in [-\pi/2; \pi/2]$: c'est θ si $x > 0$, sinon il faut ajouter $\pm\pi$