

TD 9 : équations différentielles

T Exercices théoriques :

1. Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes : (à chaque fois, préciser le type d'équation : dérivée, équation à variables séparables, homogène, linéaire...)

(a) $y' = 2y$,	(b) $y' + y = x^2$,	(c) $y' = \frac{y}{x}$,
(d) $y' = 3\frac{y}{x} - x$,	(e) $y' - y \cos x = \cos x$,	(f) $y' \ln x + \frac{y}{x} = 0$,
(g) $y' = xe^y$,	(h) $yy' = x$,	(i) $y' = \sqrt{1 - y^2}$,
(j) $(x - y)y' = x + y$,	(k) $y' - 2xy = 3xe^{x^2}$,	(l) $y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

2. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

(a) $y'' = \omega^2 y$,	(b) $y'' + \omega^2 y = 1$,	(c) $2y'' + 3y' - 2y = 0$,	(d) $y'' - 2y' + 10y = 5$,
(e) $y'' + 2y' + 5y = 5 \cos x$,	(f) $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$,	(g) $y'' + 2y' + y = 2$,	

3. Si a est un réel positif, trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 - a^2}$.

En déduire la solution générale de l'équation différentielle $\frac{y'}{y^2 - a^2} = b$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

4. Si f et g sont deux fonctions réelles, on définit $(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s) ds$.

On considère l'équation différentielle $y' + ay = f(t)$, où a est une constante et f une fonction.

Montrer que si $h(t) = e^{-at}$, $y = f * h$ avec est la solution de l'équation vérifiant $y(0) = 0$.

Calculer y si f est la fonction qui vaut 1 sur $[0; 1]$ et 0 ailleurs.

P Exercices pratiques :

1. **Circuit électrique LR série** : Le courant $i(t)$ qui circule dans un circuit LR soumis à une tension $u(t) = U_0 \sin \omega t$ vérifie l'équation différentielle $L \frac{di}{dt} + Ri = U_0 \sin \omega t$. Déterminer i si $i(0) = 0$.

2. **Parachute** : Un parachutiste est freiné par la résistance de l'air, proportionnelle au carré de sa vitesse. On note $k = 30 \text{ Nm}^{-2}\text{s}^2$ ce coefficient de proportionnalité, et $m = 80 \text{ kg}$ la masse du parachutiste.

(a) Montrer que l'équation différentielle dont la vitesse v est solution est $v' = -\frac{k}{m}v^2 + g$.

(b) Résoudre l'équation du mouvement si la vitesse initiale est de $v(0) = 200 \text{ km.h}^{-1}$ (vitesse "limite" atteint lors de la chute libre).

(c) Quelle est la vitesse limite du mouvement ?

(d) Au bout de combien de temps la vitesse est-elle devenue inférieure à la vitesse de 20 km.h^{-1} ?

3. **Circuit électrique LC** : On place en série une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C , soumis à une tension $u(t) = U_0 \sin \omega t$. Le courant électrique dans le circuit vérifie alors l'équation différentielle $L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = \omega U_0 \cos \omega t$.

Déterminer i si $i(0) = 0$ et $\frac{di}{dt}(0) = 0$.

CORRECTION DU TD :**T Exercices théoriques :**

1. (a) Eq.linéaire du premier ordre à coefficients constants, sans second membre : $y(x) = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.
 (b) Equation linéaire du premier ordre à coefficients constants, avec second membre. La solution générale de l'équation sans second membre associée est Ce^{-x} , $C \in \mathbb{R}$.
 On cherche une solution particulière de la forme $ax^2 + bx + c$ (on pourrait aussi utiliser la méthode de variation de la constante); alors $a = 1$, $2a + b = 0$ et $b + c = 0$, donc $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$.
 Par conséquent, la solution générale est $y(x) = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}$.
 (c) Quatre possibilités...au moins :
 - on peut remarquer directement que toute fonction $y(x) = Cx$ est solution.
 - on peut voir cette équation comme une équation linéaire du premier ordre sans second membre, et utiliser le cours : la solution est $Ce^{\int \frac{dx}{x}}$ soit $Ce^{\ln x} = Cx$.
 - on peut résoudre comme une équation à variables séparables : $y'/y = 1/x$ d'où $\ln |y| = \ln |x| + c$ donc $y(x) = Cx$.
 - on peut résoudre comme une équation homogène en posant $t = y/x$. Alors $y = tx$ et $y' = t'x + t$. Et ici, l'équation devient donc $t'x = 0$, donc $t' = 0$, $t = y/x$ est constant...
 (d) Equation différentielle du premier ordre avec second membre.
 La solution de l'équation sans second membre est Cx^3 , $C \in \mathbb{R}$, et on remarque que $y = x^2$ est solution (directement, ou bien avec une méthode de variation de la constante). Ainsi, la solution générale est $Cx^3 + x^2$, $C \in \mathbb{R}$.
 (e) On résout l'équation sans second membre : $y'/y = \cos x$, donc $\ln |y| = \sin x + c$, et $y = Ce^{\sin x}$.
 Pour trouver une solution particulière, on peut essayer la méthode de "variation de la constante" : $y(x) = C(x)e^{\sin x}$, donc en dérivant et en ré-injectant dans l'équation, $C'(x) = \cos x e^{-\sin x}$, donc en primitivant : $C(x) = -e^{-\sin x} + c$. Ainsi, $y(x) = 1 + ce^{\sin x}$, $c \in \mathbb{R}$.
 (f) On reconnaît une dérivée : l'équation équivaut à $(y \ln x)' = 0$, donc $y \ln x = c$, $y = \frac{c}{\ln x}$.
 (g) Equation à variables séparables, on reconnaît une dérivée directement : $y'e^{-y} = x$, donc $-e^{-y} = x^2/2 + c$, et donc $y = -\ln(-x^2/2 + c)$, $c \in \mathbb{R}$.
 (h) Une primitive de yy' est $y^2/2$, donc $y^2 = x^2 + c$, les solutions sont les $y = \pm\sqrt{x+c}$, c réel.
 (i) $y = 1$ et $y = -1$ sont deux solutions ; sinon, on divise par $\sqrt{1-y^2}$: une primitive de $\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$ est $\arcsin y$, donc $\arcsin y = x + c$, $y = \sin(x+c)$, $c \in \mathbb{R}$.
 (j) On commence par transformer en $y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+y/x}{1-y/x}$, qui est une équation homogène.
 On pose $t = y/x$. Alors $y' = \frac{1+t}{1-t} = t'x + t$, d'où $t'x = \frac{1+t}{1-t} - 1 = \frac{2t}{1-t}$, et cette équation est à variables séparables : $\frac{(1-t)t'}{t} = \frac{2}{x}$. On primitive : $\ln t - t = x^2$. Mais on ne peut expliciter t , ni y .
 (k) Equation linéaire du premier ordre, on résoud d'abord l'équation sans second membre par $y'/y = 2x$ donc $y = Ce^{x^2}$. Alors par variation de la constante, $C'(x) = 3x$ d'où $C(x) = 3x^2/2$, et finalement $y(x) = (3x^2/2 + c)e^{x^2}$.
 (l) Equation linéaire du premier ordre, on résoud d'abord l'équation sans second membre par $y'/y = -1/\sqrt{x}$ soit $y = Ce^{-2\sqrt{x}}$. Puis par variation de la constante, $C'(x) = e^{2\sqrt{x}}/\sqrt{x}$, et donc $C(x) = c + e^{2\sqrt{x}}$. Donc $y(x) = ce^{-2\sqrt{x}} + 1$ (on pouvait remarquer directement que 1 est une fonction solution !!)
 2. (a) Equation différentielle du second ordre à coefficients constants, sans second membre : $y(t) = ach \omega t + bsh \omega t$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Equation différentielle du second ordre à coefficients constants, sans second membre : $y(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, $a, b \in \mathbb{R}$ (ou, si l'on préfère, $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, $A, \varphi \in \mathbb{R}$)

(c) Equation différentielle du second ordre à coefficients constants, sans second membre : l'équation du second degré associée est $2X^2 + 3X - 2 = 0$, de solutions -2 et $1/2$, donc $y(t) = ae^{-2t} + be^{t/2}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) Equation différentielle du second ordre à coefficients constants, avec second membre : l'équation du second degré associée est $X^2 - 2X + 10 = 0$, de solutions $1 + 3j$ et $1 - 3j$. La solution générale de l'équation sans second membre est donc $(a \cos 3t + b \sin 3t)e^t$. On remarque de plus que $1/2$ est une solution particulière : $y(t) = \frac{1}{2} + (a \cos 3t + b \sin 3t)e^t$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(e) De même, la solution générale de l'équation sans second membre est $(a \cos 2x + b \sin 2x)e^{-x}$. Si on cherche une solution particulière sous la forme $\alpha \cos x + \beta \sin x$, on en trouve une pour $\beta = 1/2$ et $\alpha = 1$. Donc la solution générale est $\cos x + \frac{1}{2} \sin x + (a \cos 2x + b \sin 2x)e^{-x}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(f) De même, la solution générale de l'équation sans second membre est $ae^{-x} + be^{-2x}$. En cherchant une solution particulière de la forme kxe^{-2x} on trouve $k = -1$. Donc la solution générale est $ae^{-x} + (-x + b)e^{-2x}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(g) Ici, l'équation associée a une racine double : -1 . Donc la solution générale de l'équation sans second membre est de la forme $ae^{-t} + bte^{-t}$. Une solution particulière étant 2 , la solution générale est $y(t) = 2 + ae^{-t} + bte^{-t}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

3. On décompose la fraction en éléments simples : $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right)$. Une primitive est donc $\frac{1}{2a} (\ln|x - a| - \ln|x + a|) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right|$.

On peut alors intégrer l'équation différentielle par $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{y - a}{y + a} \right| = bx + \text{constante}$, d'où $\frac{y - a}{y + a} = Ce^{2abx}$, ou encore $y = a \frac{1 + Ce^{2abx}}{1 - Ce^{2abx}}$, C étant une constante réelle non nulle.

4. On a $y(t) = \int_0^t f(s)e^{-at}e^{as} ds = e^{-at} \int_0^t f(s)e^{as} ds$, donc on vérifie en dérivant que $y'(t) = -ay(t) + f(t)$.

On a alors : pour t négatif, $y(t) = 0$.

$$\text{pour } 0 \leq t \leq 1, y(t) = \int_0^t e^{-a(t-s)} ds = \frac{e^{-at} - 1}{-a}$$

$$\text{pour } t \geq 1, y(t) = \int_0^1 e^{-a(t-s)} ds = \frac{1 - e^{-a}}{-a} e^{-at}$$

P Exercices pratiques :

1. L'équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

La solution de l'équation sans second membre est $Ke^{-\frac{Rt}{L}}$.

On peut chercher une solution particulière de la forme $A \cos \omega t + B \sin \omega t$. En intégrant dans l'équation, on obtient le système $\omega BL + RA = 0$ et $-\omega AL + RB = U_0$, donc $B = \frac{RU_0}{(\omega L)^2 + R^2}$ et $A = \frac{-L\omega U_0}{(\omega L)^2 + R^2}$. On peut aussi écrire $A = U_0 \cos \varphi$ et $B = U_0 \sin \varphi$ avec $\varphi = \arccos\left(\frac{-L\omega}{(\omega L)^2 + R^2}\right)$, la solution particulière est alors $U_0 \cos(\omega t - \varphi)$.

La solution générale est donc $i(t) = Ke^{-\frac{Rt}{L}} + U_0 \cos(\omega t - \varphi)$, $K \in \mathbb{R}$, et la solution particulière pour $i(0) = 0$ est obtenue avec $K = -U_0 \cos \varphi$.

2. (a) En écrivant la relation l'accélération à la somme des forces, on trouve $ma = mv' = -kv^2 + mg$ d'où l'équation $v' = -\frac{k}{m}v^2 + g$.

(b) Cette équation peut se transformer en $\frac{v'}{v^2 - \frac{gm}{k}} = -\frac{k}{m}$.

Si on note $a = \sqrt{\frac{gm}{k}}$ et $b = -\frac{k}{m}$, on sait grâce à l'exercice T3 que $v(t) = a \frac{1 + Ce^{2abt}}{1 - Ce^{2abt}}$.

De plus, $v(0) = a \frac{1+C}{1-C}$, donc $C = \frac{v(0) - a}{v(0) + a}$.

(c) Si on fait tendre t vers l'infini, ab étant ici négatif, on constate que la vitesse tend vers la valeur limite $a = \sqrt{\frac{gm}{k}}$. A.N : la vitesse limite est $v_l = 5,11 \text{ m.s}^{-1}$ soit $18,4 \text{ km/h}$.

(d) Si on appelle v_s cette "vitesse de sécurité", $v_s = 20 \text{ km/h} = 5,56 \text{ m.s}^{-1}$, on doit résoudre l'équation $v(t) \leq v_s$, i.e $a \frac{1 + Ce^{2abt}}{1 - Ce^{2abt}} \leq v_s$. Cette expression se transforme en $1 + Ce^{2abt} \leq \frac{v_s}{v_l} (1 - Ce^{2abt})$, soit encore $C(1 + \frac{v_s}{v_l})e^{2abt} \leq \frac{v_s}{v_l} - 1$.

Donc on doit avoir $2abt \leq \ln \frac{v_s - v_l}{v_s + v_l} - \ln C$. Comme $ab = -\sqrt{g} \sqrt{k/m} = -g/v_l$, on a donc finalement :

$$t \geq \frac{v_l}{2g} \left(\ln \frac{v_s + v_l}{v_s - v_l} - \ln \frac{v(0) + v_l}{v(0) - v_l} \right)$$

A.N : $t = 0,78 \text{ s}$.

3. La solution générale de l'équation sans second membre est $A \cos(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \varphi)$, $A, \varphi \in \mathbb{R}$.