TD 5 : polynômes et fractions rationnelles

T Exercices théoriques :

1. Déterminer P polynôme réel unitaire de degré 4, dont $1+j$ est racine simple et 2 est racine double.
2. Déterminer P de degré 5 dont 1 est racine double et tel que 0 soit racine triple de $P-2$.
3. Factoriser sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ les polynômes :
   (a) X^4+2X^2-3 (b) X^4+1 (c) X^3-X^2+2X-2 (d) $X^4-5X^3+8X^2-5X+1$
4. Effectuer la division selon les puissances décroissantes de :
   (a) $2X^4+X^3+3X+4$ par X^2+3X+1 (b) X^5+2X^3-3X-2 par X^3+X+1
   (c) X^3+2X-5 par $X-1$ (d) $6X^7-7X^6+1$ par $(X-1)^2$
5. Effectuer la division selon les puissances croissantes de :
   (a) $2+X^2$ par $1-X+3X^2$ à l'ordre 2 (b) $1-X$ par $1+X$ à l'ordre n, pour $n\in\mathbb{N}^*$.
   (c) 1 par $1+2X-X^2$ à l'ordre 3 (d) $5+2X$ par $1+X$ à l'ordre 1. En déduire $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{2x+5}{x+1}-5\right)$.
6. Décomposer en élements simples sur $\mathbb{R}$ les fractions :
   (a) $\dfrac{6}{X(X-1)(X+2)}$ (b) $\dfrac{X^2+3}{X^2-1}$ (c) $\dfrac{X^4-2X}{X^2+1}$ (d) $\dfrac{X^2-2X-3}{X^3+2X^2-3X}$
7. Décomposer en élements simples sur $\mathbb{C}$ les fractions :
   (a) $\dfrac{X^5}{(X-1)^2(X^2+1)}$ (b) $\dfrac{3}{X^3-1}$ (c) $\dfrac{2(X-2)}{(X^2+1)^2}$ (d) $\dfrac{1}{X^n-1}$ $(n\geq 2)$
8. Calculer $I=\displaystyle\int_{-3}^{-2}\frac{1}{x(x+1)}$, $J=\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{1}{x(x^2+1)}$ et $K=\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$.
9. Résoudre de deux manières différentes l'équation $(z+j)^5-(z-j)^5=0$. En déduire $\tan\dfrac{\pi}{5}$.
10. Si $P=(X-a_1)^{n_1}(X-a_2)^{n_2}\dots(X-a_k)^{n_k}$, décomposer en éléments simples $\dfrac{P'}{P}$.
    En déduire que l'équation différentielle $P.P''=(P')^2$ n'a pas de solution polynômiale non nulle.
11. $P=(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)$ est à racines simples $(n\geq 2)$. Montrer : $\frac{1}{P'(a_1)}+\dots+\frac{1}{P'(a_n)}=0$.

P Exercice pratique :

1. **Modélisation - polynôme interpolateur de Lagrange**
   (a) Lors d'une expérience, la mesure d'une certaine quantité Q au cours du temps donne $Q(0)=1$, $Q(1)=2$, $Q(3)=5$, $Q(6)=x$. Pour quelle valeur de x peut-on modéliser Q par un polynôme de degré 2 ?
   (b) Plus généralement : on se donne une suite t_0, t_1, ..., t_n de $n+1$ temps (tous différents), et q_0, q_1, ..., q_n les $n+1$ valeurs correspondantes (dont certaines peuvent être égales).
   On pose
   $$Q_i(X)=\prod_{j=0,1,\dots,n;j\neq i}\frac{X-t_j}{t_i-t_j}.$$
   Montrer que $Q=\sum_{i=0}^{n}q_iQ_i$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que $Q(t_i)=q_i$ pour tout i.

CORRECTION DU TD :

T Exercices théoriques :

1. P est à coefficient réels, donc $P(\overline{1+j}) = \overline{P(1+j)} = \overline{0} = 0$, donc $\overline{1+j} = 1-j$ est racine de P.
   On a donc quatre racines de P, qui de plus est unitaire :
   $P(X) = (X-2)^2(X-1-j)(X-1+j) = (X-2)^2(X^2-2X+2) = X^4-6X^3+14X^2-16X+8$.
2. On a $P-2 = aX^5+bX^4+cX^3$. Donc $P(1) = a+b+c+2$ et $P'(1) = 5a+4b+3c$, donc $2a+b = 6$ et $a+b+c = -2$. Ainsi, $b = -2a+6$ et $c = a-8$: on trouve une infinité de polynômes solutions, de la forme $P(X) = aX^5+(-2a+6)X^4+(a-8)X^3+2$, $a \in \mathbb{C}$. Si on impose de plus à P d'être unitaire, on en déduit que $P(X) = X^5+4X^4-7X^3+2$.
3. (a) On commence par résoudre l'équation $Y^2+2Y-3 = 0$: $Y = 1$ ou $Y = -3$. Par conséquent, les racines de P sont les solutions de $X^2 = 1$ ou $X^2 = -3$: $1, -1, j\sqrt{3}, -j\sqrt{3}$.
   Le polynôme P vaut donc : $(X-j\sqrt{3})(X+j\sqrt{3})(X-1)(X+1) = (X-1)(X+1)(X^2+3)$

   (b) Les racines du polynôme sont les quatre racines quatrièmes de -1, donc les $e^{j\pi/4}$, $e^{j(\pi/4+2\pi/4)}$, $e^{j(\pi/4+4\pi/4)}$ et $e^{j(\pi/4+6\pi/4)}$. Soit après calcul : $P = (X - \frac{1+i}{\sqrt{2}})(X + \frac{1+i}{\sqrt{2}})(X - \frac{1-i}{\sqrt{2}})(X + \frac{1-i}{\sqrt{2}})$. En regroupant par paire les polynômes correspondant à des racines complexes conjuguées (soit le premier et le troisième, et le second avec le quatrième), on obtient la factorisation sur $\mathbb{R}$: $(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$.

   (c) On cherche les racines "évidentes", et on trouve la racine 1. Alors par division du polynôme par $X-1$ donne $X^3-X^2+2X-2 = (X-1)(X^2+2) = (X-1)(X+\sqrt{2}j)(X-\sqrt{2}j)$.

   (d) Le polynôme est un polynôme symétrique ; pour trouver ses racines et le factoriser, on commence par factoriser X^2 : $X^2(X^2-5X+8-5/X+1/X^2)$ s'écrit $X^2(6-5(X+1/X)+(X+1/X)^2))$. On pose donc $Y = X+1/X$.
   Le polynôme Y^2-5Y+6 a pour racines 2 et 3, donc les racines du polynôme initial sont celles de $X+1/X = 2$ ou $X+1/X = 3$...soit après calculs : 1 qui est racine double, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. La factorisation est donc $(X-1)^2(X-\frac{3+\sqrt{5}}{2})(X-\frac{3-\sqrt{5}}{2})$.
4. (a) On pose la division :

$$
\begin{array}{ccccccccc|ccccccc}
2X^4 & + & X^3 & & & + & 3X & + & 4 & X^2 & + & 3X & + & 1 \\
\cline{10-14}
2X^4 & + & 6X^3 & + & 2X^2 & & & & & 2X^2 & - & 5X & + & 13 \\
\cline{1-5}
 & - & 5X^3 & - & 2X^2 & + & 3X & + & 4 & & & & & \\
 & - & 5X^3 & - & 15X^2 & - & 5X & & & & & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 13X^2 & + & 8X & + & 4 & & & & & \\
 & & & & 13X^2 & + & 39X & + & 13 & & & & & \\
\cline{5-9}
 & & & & & - & 31X & - & 9 & & & & &
\end{array}
$$

   d'où finalement : $2X^4+X^3+3X+4 = (X^2+3X+1)(2X^2-5X+13)-31X-9$.

   (b) De même on trouve $X^5+2X^3-3X-2 = (X^3+X+1)(X^2+1)+(-X^2-4X-3)$.

   (c) De même on trouve $X^3+2X-5 = (X-1)(X^2+X+3)-2$.

   (d) De même on trouve $6X^7-7X^6+1 = (X-1)^2(6X^5+5X^4+4X^3+3X^2+2X+1)$.

5. (a) On pose la division :

$$
\begin{array}{ccccccccc|l}
2 & + & & & X^2 & & & & & 1 - X + 3X^2 \\
2 & - & 2X & + & 6X^2 & & & & & \hline 2 + 2X - 3X^2 \\
\cline{1-5}
& & 2X & - & 5X^2 & & & & & \\
& & 2X & - & 2X^2 & + & 6X^3 & & & \\
\cline{3-7}
& & & - & 3X^2 & - & 6X^3 & & & \\
& & & - & 3X^2 & + & 3X^3 & - & 9X^4 & \\
\cline{4-9}
& & & & & - & 9X^3 & + & 9X^4 &
\end{array}
$$

donc finalement $2+X^2 = (1-X+3X^2)(2+2X-3X^2)+X^3(-9+9X)$.

(b) De même on trouve $1-X = (1+X)(1-2X+2X^2-2X^3+\ldots+2(-X)^n)+2(-X)^{n+1}$.

(c) De même on trouve $1 = (1+2X-X^2)(1-2X+5X^2-12X^3)+X^4(29-12X)$.

(d) De même on trouve $5+2X = (1+X)(5-3X)+3X^2$. On en déduit que $\dfrac{5+2X}{1+X} = 5-3X+3\dfrac{X^2}{1+X}$, donc la limite cherchée est -3.

6. (a) Il n'y a pas de partie entière (car le degré du numérateur 6, 0, est strictement inférieur au degré du dénominateur, 3), donc on sait que l'on a une décomposition du type $\dfrac{6}{X(X-1)(X+2)} = \dfrac{\lambda}{X}+\dfrac{\mu}{X-1}+\dfrac{\nu}{X+2}$.

Pour déterminer λ, on multiplie tout par X : $\dfrac{6}{(X-1)(X+2)} = \lambda+\dfrac{\mu X}{X-1}+\dfrac{\nu X}{X+2}$, puis on prend la valeur en 0 : $\lambda = \dfrac{6}{(-1)(2)} = -3$.

De même pour μ en multipliant par $X-1$ et en prenant la valeur en 1 : $\mu = 2$, et pour ν en multipliant par $X+2$ et en prenant la valeur en 2 : $\nu = 1$.

(b) Pour trouver la partie entière de la fraction, on écrit la division selon les puissances décroissantes de X^2+3 par X^2-1 : $X^2+3 = 1\times(X^2-1)+4$, donc $\dfrac{X^2+3}{X^2-1} = 1+\dfrac{4}{X^2-1}$. Comme $X^2-1 = (X-1)(X+1)$, on sait alors que l'on a une décomposition en éléments simples du type $1+\dfrac{\lambda}{X-1}+\dfrac{\mu}{X+1}$.

Avec les mêmes méthodes qu'à l'exercice précédent, on trouve $\lambda = 2$ et $\mu = -2$, donc la décomposition est $1+\dfrac{2}{X-1}-\dfrac{2}{X+1}$.

(c) On commence par trouver la partie entière avec la division : $X^4-2X = (X^2+1)(X^2-1)-2X+1$, donc $\dfrac{X^4-2X}{X^2+1} = X^2-1+\dfrac{-2X+1}{X^2+1}$. Et comme X^2+1 est irréductible, il s'agit de la décomposition en éléments simples !

(d) On n'a pas de partie entière (degré 2 au numérateur, 3 au dénominateur). On peut alors factoriser X^3+2X^2-3X : racine évidente 0, puis on factorise le polynôme de degré 2 restant, $X^2+2X-3 = (X-3)(X+1)$.

Ce qui donne, comme déjà vu, 3 coefficients à déterminer : on trouve finalement, en suivant exactement la méthode vue au premier exercice, la décomposition $\dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{1}{X+3}$.

7. (a) Par division de X^5 par $(X-1)^2(X^2+1)$ on trouve une partie entière (le quotient) égale à $X+2$, et un reste $2X^3-2X^2+3X-2$.

Donc la décomposition réelle sera de la forme $\dfrac{X^5}{(X-1)^2(X^2+1)} = X+2+\dfrac{a}{(X-1)^2}+\dfrac{b}{X-1}+\dfrac{cX+d}{X^2+1}$ avec a, b, c et d réels.

Pour trouver a on multiplie par $(X-1)^2$ et on prend la valeur en 1 : $a = 1/2$.
Pour trouver c et d, on multiplie par X^2+1 et on prend la valeur en j : alors $cj+d = j^5/(j-1)^2$, donc $cj+d = j/(j^2-2j+1) = -1/2$, et donc $c = 0, d = -1/2$.
Il ne reste plus que d à trouver, par exemple en prenant la valeur en 0 : $0 = 2+a-b+d$, donc $b = 2+a+d = 2$.
Ainsi, la décomposition sur $\mathbb{R}$ est $X+2+\dfrac{1/2}{(X-1)^2}+\dfrac{2}{X-1}-\dfrac{1/2}{X^2+1}$
Pour avoir la décomposition sur $\mathbb{C}$, on ne repart pas à 0 ! Il suffit de décomposer les élements simples de seconde espèce, ici $-\dfrac{1/2}{X^2+1} = \dfrac{1}{4}(\dfrac{j}{X-j}-\dfrac{j}{X+j})$, d'où la décomposition de la fraction initiale.

(b) Les racines du dénominateur sont les racines cubiques de 1, soit 1, $e^{\frac{2j\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4j\pi}{3}}$ (cf.cours sur les complexes...) Si on note $\alpha = e^{\frac{2j\pi}{3}}$, ce sont donc 1, α et α^2. On constate que $\dfrac{1}{\alpha} = \alpha^2$.
Comme on peut écrire $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$, α, qui n'est pas racine de $X-1$, est racine de X^2+X+1. Ainsi, $1+\alpha+\alpha^2 = 0$, ce qui servira plus loin.
Alors la décomposition est de la forme $\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X-\alpha}+\dfrac{c}{X-\alpha^2}$. On trouve, toujours par la même technique, $a = \dfrac{3}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} = \dfrac{3}{1-\alpha-\alpha^2+1} = \dfrac{3}{3} = 1$.
De même, $b = \dfrac{3}{(\alpha-1)(\alpha-\alpha^2)} = \dfrac{3}{\alpha^2-1-\alpha+\alpha^2} = \dfrac{3}{3\alpha^2} = \alpha$. Et de même, $c = \alpha^2$.
Ainsi on a bien prouvé que la décomposition en éléments simples cherchée est, sur $\mathbb{C}$, $\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{\alpha}{X-\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{X-\alpha^2}$.
Pour trouver la décomposition sur $\mathbb{R}$, on va regrouper les deux dernières fractions : $\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{\alpha^2(X-\alpha)+\alpha(X-\alpha^2)}{(X-\alpha)(X-\alpha^2)} = \dfrac{1}{X-1}+\dfrac{(\alpha^2+\alpha)X-2\alpha^3}{X^2-(\alpha+\alpha^2)X+\alpha^3} = \dfrac{1}{X-1}+\dfrac{-X-2}{X^2+X+1}$.

(c) L'expression est un élement simple, sur $\mathbb{R}$! Il n'y a donc rien à faire.
Sur $\mathbb{C}$: j et $-j$ sont les deux racines doubles, donc on trouve pour décomposition $\dfrac{1-j/2}{(X-j)^2}+\dfrac{j}{X-j}+\dfrac{1+j/2}{(X+j)^2}-\dfrac{j}{X+j}$ sur $\mathbb{C}$.

(d) On commence par décomposer le dénominateur : ses racines (simples) complexes sont les $\omega_k = exp(2kj\pi/n)$, pour $k = 0,\dots,n-1$.
Alors (cf.exercice T11) le coefficient de $\dfrac{1}{X-\omega_k}$ vaut $\dfrac{1}{(X^n-1)'(\omega_k)} = \dfrac{1}{n\omega_k^{-1}} = \dfrac{1}{n}\omega_k$, ce qui donne la décomposition complexe.

8. On décompose $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$, donc l'intégrale I vaut $[\ln|x|-\ln|x+1|]_{-3}^{-2} = 2\ln 2-\ln 3$.
Pour J : $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$, donc $J = [\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_1^2 = \ln 2-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$
Pour K : $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2+1}$, $K = [-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$.

9. $\dfrac{z+j}{z-j}$ est une racine cinquième de l'unité, donc est de la forme $\exp(2jk\pi/5)$ avec $k = 0,1,2,3,4$.
Donc $z+j = \exp(2jk\pi/5)(z-j)$, d'où $(1-\exp(2jk\pi/5))z = j(-1-\exp(2jk\pi/5))$: on a 5 solutions, les $z_k = \dfrac{-1-\exp(2jk\pi/5)}{1-\exp(2jk\pi/5)}j$ pour $k = 1,2,3,4,5$.

En factorisant $\exp(jk\pi/5)$ au numérateur et au dénominateur, on obtient donc

$$z_k = \frac{-\exp(-jk\pi/5)-\exp(jk\pi/5)}{\exp(-jk\pi/5)-\exp(jk\pi/5)}j = \frac{-2\cos(k\pi/5)}{-2j\sin(k\pi/5)}j = \frac{1}{\tan(k\pi/5)}.$$

Maintenant, si on développe par la formule du binôme $(z+j)^5-(z-j)^5$, on trouve le polynôme $10z^4-20z^2+2$, dont les racines sont $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$.
Et $\frac{1}{\tan(\pi/5)}$ est donc la plus grande des solutions positives : $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$: après simplification,

$$\tan(\pi/5) = \sqrt{\frac{5}{5+2\sqrt{5}}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

.

10. On sait que la décomposition de P'/P est de la forme $\sum_i \frac{\lambda_i}{X-a_i}$ (en effet, les pôles sont les a_i et il n'y a pas de terme polynômial car $\deg P' = \deg P - 1$.
Pour chaque i, on peut écrire $P(X) = (X-a_i)^{n_i}Q(X)$, donc $P'(X) = n_i(X-a_i)^{n_i-1}Q(X) + (X-a_i)^{n_i}Q'(X)$, et ainsi $(X-a_i)P'(X)/P(X)$ est une fraction qui prend, en a_i la valeur λ_i d'une part, et d'autre part la valeur n_i : ainsi, $\lambda_i = n_i$.
Donc $\frac{P'}{P} = \sum_i \frac{n_i}{X-a_i}$.
Mais alors, si P est solution de l'équation, P non nul, on a $\frac{P''}{P'} = \frac{P'}{P}$, ce qui voudrait dire que P et P', en appliquant ce qui précède, ont les mêmes racines avec mêmes ordres de multiplicité : c'est absurde...
11. Avec un raisonnement analogue à ce qui précéde, on trouve que $\frac{1}{P} = \sum_i \frac{1}{P'(a_i)(X-a_i)}$. Si on multiplie tout par X, puis que l'on calcule la limite quand X tend vers $+\infty$ de l'expression, on trouve la relation cherchée.

P Exercices pratiques :

1. (a) Pour définir un polynôme de degré 2, on a besoin de trois coefficients. On peut donc supposer que si l'on impose 4 conditions (les valeurs en quatre points), il ne sera en général pas possible de modéliser ainsi.
Dans ce cas, on cherche $Q(X) = aX^2 + bX + c$. Les trois premières conditions donnent $c = 1$, $a+b+c = 2$ et $9a+3b+c = 5$, donc $c = 1$, $a+b = 1$ et $9a+3b = 4$. D'où $a = 1/6$, $b = 5/6$ et $c = 1$. Ainsi, il faut que x soit égal à $(1/6)\times 36 + 5/6 \times 6 + 1 = 12$ pour qu'un polynôme de degré 2 modélise l'expérience.
(b) On calcule $Q_i(t_i) = 1$ et $Q_i(t_k) = 0$ si $k \neq i$.
Il suffit de calculer $Q(t_i)$ pour constater que Q, qui est bien de degré au plus n car les Q_i le sont tous, est une solution.
Si deux polynômes Q et R vérifient les conditions en t_i, $Q-R$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n nul en chaque t_i : il a donc $n+1$ racines, et c'est le polynôme nul. Ainsi, $Q = R$.