# TD 1 : Dérivées et différentielles - corrigé

## exercices théoriques

1. Manipulation d'expressions :

(a) vérifier que $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

(b) développer $(e^x + e^{-x})^4$

(c) résoudre $e^x - 2e^{-x} = -2$

(d) résoudre $\ln|x-1| + \ln|x+1| = 0$

(e) si $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$, calculer $f\circ f$ puis $(f\circ f)'$

corrigé succinct :

(a) Il suffit de mettre $e^x$ en facteur au numérateur comme au dénominateur, puis de simplifier : $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

(b) On développe par la formule du binôme $(e^x)^4 + 4(e^x)^3e^{-x} + 6(e^x)^2(e^{-x})^2 + 4e^x(e^{-x})^3 + (e^{-x})^4$ et on obtient $e^{4x} + 4e^{2x} + 6 + 4e^{-2x} + e^{-4x}$.

(c) Quand une équation fait apparaître uniquement des exponentielles de l'inconnue on peut souvent se ramener à une équation polynômiale en posant $e^x = X$. Ainsi, l'équation devient ici $X - 2/X = -2$ avec $X > 0$ (car $X = e^x > 0$). Elle est donc équivalente à $X^2 + 2X - 2 = 0$ dont le discriminant est 12, et les solutions $\dfrac{-2\pm\sqrt{12}}{2} = -1\pm\sqrt{3}$. L'unique solution $X > 0$ est donc $X = -1\pm\sqrt{3}$, qui correspond à $\boxed{x = \ln(\sqrt{3}-1).}$

(d) L'équation est définie pour $x \neq \pm 1$. On peut donc, pour $x\neq\pm1$ transformer l'équation en les équations équivalentes $\ln|x^2-1| = 0$, $|x^2-1| = 1$, $x^2-1 = \pm 1$, soit finalement $x^2 = 0$ ou $x^2 = 2$ dont les trois solutions sont $\boxed{x = 0,\ x = \sqrt{2} \text{ et } x = -\sqrt{2}.}$

(e) On trouve $(f\circ f)(x) = \dfrac{x}{1+6x^2}$ et sa dérivée est $\dfrac{1-6x^2}{(1+6x^2)^{3/2}}$.

2. Dériver $a(x) = -(2x-3)^4$ , $b(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ , $c(x) = x\ln(x+2)$ , $d(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

corrigé succinct :

$a'(x) = -2\times 4\times(2x-3)^{4-1} = -8(2x-3)^3$ (surtout ne pas développer l'expression pour la dériver ! ! !)

$b'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$c'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2}$

On peut dériver $d$ en exprimant $d(x)$ comme le produit $x(x^2+1)^{-1/2}$ :

$d'(x) = (x^2+1)^{-1/2} + x(-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-3/2}\times 2x)$.

Pour simplifier l'expression, on factorise le $x^2+1$ qui intervient avec le plus bas degré :

ainsi, $\boxed{d'(x) = (x^2+1)^{-3/2}(x^2+1-x^2) = (x^2+1)^{-3/2}.}$

3. Calculer les dérivées d'ordre $n$ des fonctions :

$a(x) = \cos x$ , $b(x) = \frac{1}{x}$ , $c(x) = (1+x)^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$.

corrigé succinct : La dérivée de $x\mapsto\cos(x)$ est $-\sin(x) = \cos(x+\pi/2)$ (utiliser un cercle trigonométrique !). Donc par récurrence immédiate,

$\boxed{a^{(n)}(x) = \cos^{(n)}(x) = \cos(x+n\pi/2).}$

De même $\dfrac{d^n}{dx^n}(\dfrac{1}{x}) = (-1)(-2)\times\ldots\times(-n)x^{-n+1}$, donc $\boxed{b^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.}$

On procède de même pour $c$ : $c'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $c''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, et

finalement : $\boxed{c^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}.}$

4. (a) Étudier la fonction **cosinus hyperbolique** ch $x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

(b) Montrer en particulier que ch est strictement croissante sur entre $[0;+\infty[$, à valeurs dans $[1;+\infty[$.
On appelle **argument cosinus hyperbolique** et on note argch sa fonction réciproque.

(c) Etudier argch ; préciser en particulier sa dérivée.

(d) Montrer que pour tout $x\geq 1$, argch $x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

(a) On définit de même la fonction **sinus hyperbolique** sh $x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Alors on constate que ces fonctions sont définies, continues, dérivables sur $\mathbb{R}$, et que ch$'(x) =$ sh $(x)$ (et de même sh$'(x) =$ ch $(x)$.)

De plus, le signe de sh est facile à déterminer : $(e^x - e^{-x})/2 > 0$ si et seulement si $e^x > e^{-x}$ soit en prenant le logarithme, qui est une fonction strictement croissante : $x > -x$, donc $2x > 0$ : sh est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(on remarque aussi que ch est paire, et sh est impaire).

(b) Comme ch est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, que $\mathrm{ch}\,(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty$, on en déduit que ch réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ : tout élément $y \in [1, +\infty[$ est l'image par ch d'un unique élément $x$ de $[0, +\infty[$.

On note cet élément argch $y$.

(c) On a donc par définition $\mathrm{ch}\,\mathrm{argch}\,y = y$, et en dérivant cette relation on en déduit $\mathrm{ch}'(\mathrm{argch}\,y) \times \mathrm{argch}'y = 1$, donc $\mathrm{argch}'y = 1/\mathrm{sh}\,(\mathrm{argch}\,y)$.

Mais il est facile de vérifier, en développant les formules définissant ces fonctions par des exponentielles, que $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ pour tout $x$. Alors en remplaçant $x$ par argch $y$ on obtient donc $y^2 - \mathrm{sh}^2\mathrm{argch}\,y = 1$, et donc $\mathrm{sh}^2\mathrm{argch}\,y = y^2 - 1$. Comme sh est positive sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\mathrm{sh}\,\mathrm{argch}\,y = \sqrt{y^2-1}$, et finalement pour tout $y > 1$,

$\boxed{\mathrm{argch}'y = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}.}$ : argch est strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

(d) Le plus simple, pour prouver que $\mathrm{argch}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ si $x \geq 1$, est de montrer que ces deux fonctions ont la même dérivée et même valeur en 0 : la dérivée de $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ est $\dfrac{1 + 2x/2\sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x^2-1} + x}{(x + \sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} =$ $\mathrm{argch}'(x)$, et les valeurs en 1 sont toutes les deux nulles.

5. Existence et valeur des extrema des fonctions : $a(x) = x(3-x)$, $b(x) = \dfrac{4x^2 - 3x - 1}{4x^2 + 1}$, $c(x) = \sqrt{1 + \sin x}$, $d(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

corrigé succinct : il est possible de traiter ces trois exercices par une étude complète de ces fonctions et tableau de variations, en utilisant les dérivées premières et seconde. Le corrigé qui suit propose des rédactions "minimales", ne donnant que les arguments strictement nécessaires.

$a$ : $a$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$, elle n'a donc pas de minimum global, et le maximum est atteint pour une valeur de $x$ qui annule la dérivée $3 - 2x$. Comme la dérivée ne s'annule qu'en $x = 3/2$, $\boxed{\text{le maximum est atteint en } 3/2 \text{ et vaut } 9/4.}$

$b$ : les limites de $b$ en $+\infty$ et $-\infty$ valent 1. La dérivée s'annule pour $x = -3/2$ et $x = 1/6$, les valeurs correspondantes $5/4$ et $-5/4$ sont donc respectivement les maximum et minimum :

$\boxed{\text{le maximum de } b \text{ vaut } 5/4, \text{ atteint en } -3/2 \,; \text{ le minimum vaut } -5/4, \text{ atteint en } 1/6.}$

$c$ : sans calcul... sin est compris entre -1 et 1, donc $\sqrt{1 + \sin x}$ est compris entre 0 et $\sqrt{2}$, et ces valeurs sont atteintes : en les $-\pi/2 + 2k\pi$ pour 0 et en les $\pi/2 + 2k\pi$ pour le $\sqrt{2}$.

Ainsi, $\boxed{\text{le minimum de } c \text{ est 0 et le maximum } \sqrt{2}.}$

$d$ : $x^2$ varie entre 0 et $+\infty$, donc $\dfrac{1}{1+x^2}$ entre 1 et 0, la valeur 0 n'est pas atteinte (il n'y a pas de minimum), la valeur 1 est atteinte : 1 est la valeur maximale atteinte pour $x = 0$

6. * On définit le « sinus cardinal » par $\mathrm{sinc}\,x = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, et $\mathrm{sinc}\,0 = 1$

(a) Quel est le maximum de $f$ ?

(b) Démontrer que $\tan x = x$ admet une unique solution $a_k$ sur chaque intervalle $](2k-1)\pi/2; (2k+1)\pi/2[$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) En déduire que sinc$'$ s'annule une fois et une seule sur chacun de ces intervalles.

(d) Calculer sinc$''$ en fonction de sinc et sinc$'$. En déduire que les $a_k$ sont alternativement des maxima et des minima locaux.

corrigé succinct : sinc est continue sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

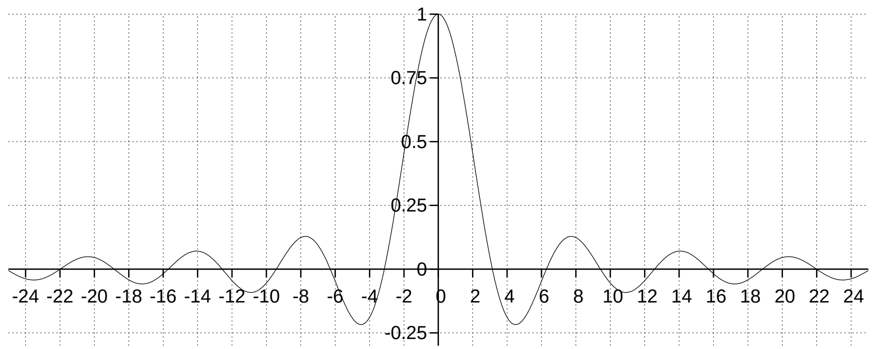
On admet qu'elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la dérivée $n$-ième en 0 est la limite de la dérivée $n$-ième autour de 0.

On calcule les dérivées $\mathrm{sinc}'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ et $\mathrm{sinc}''(x) = -\mathrm{sinc}(x) - \dfrac{2}{x}\mathrm{sinc}'(x)$.

$\mathrm{sinc}'(x) = 0$ équivaut à $x = \tan x$ : sinc$'$ a donc un unique zéro $a_k$ dans chaque intervalle de largeur $\pi$ $](2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}[$. De plus, sinc étant paire, $a_k = a_{-k}$ pour tout $k \neq 0$,.

On note que $a_0 = 0$, $\mathrm{sinc}(0) = 1$ ; $a_1 = -a_{-1} \simeq 4,4934$, $\mathrm{sinc}(a_1) \simeq -0,2172$ ; $a_2 = -a_{-2} \simeq 7,7253$, $\mathrm{sinc}(a_2) \simeq 0,1284$.

On constate que $\mathrm{sinc}''(a_k)$ est non nul (car $\mathrm{sinc}(a_k) \neq 0$), donc en chaque $a_k$ la dérivée s'annule et change de signe : chaque $a_k$ est un extrema local strict. Plus précisément, $a_0$, $a_2$, ..., $a_{2k}$ sont des maxima locaux et $a_1$, $a_3$, ..., $a_{2k+1}$ sont des minima locaux.



exercices pratiques

1. **Corps noir :** l'émittance d'un corps noir de température $T$ à la longueur d'onde $\lambda$ vaut $\epsilon(\lambda, T) = \dfrac{a}{\lambda^5 \exp(\dfrac{b}{\lambda T})}$ avec $a = 3,7 \times 10^{-16}$kg.m$^4$.s$^{-3}$ et $b = 1,44.10^{-2}$K.m.
Montrer qu'à $T$ fixé, l'émittance est maximale pour une certaine longueur d'onde que l'on déterminera en fonction de $T$.

corrigé succinct :
$\epsilon$ tend vers 0 en 0 comme en l'infini, donc admet un maximum.
On cherche plutôt le minimum de $1/\epsilon$, dont la dérivée par rapport à $\lambda$ est $5\lambda^4 \exp(\dfrac{b}{\lambda T}) - b\lambda^3 \exp(\frac{b}{\lambda T})/T$, et donc s'annule si $\lambda = \dfrac{b}{5T}$.

2. **Optimisation :** un fabricant produit des boîtes de conserve cylindriques, de volume 1 litre. Quelles dimensions doit-il choisir pour utiliser le moins de métal possible ?

corrigé succinct : $1l = 1$ dm$^3$, donc si $h$ et $r$ sont la hauteur et le rayon de la boîte, exprimés en décimètres, ils vérifient la relation $\pi r^2 h = 1$.
La surface de métal nécessaire est donc $2\pi r h + 2\pi r^2$ (le corps de la boîte, le couvercle et le fond), que l'on peut exprimer en fonction de $r$ uniquement, en remplaçant $h$ par son expression en fonction de $r$ : $S(r) = 2/r + 2\pi r^2$.
On voit que si $r$ tend vers 0 ou vers l'infini, $S(r)$ tend vers l'infini. Le minimum de la fonction est donc donné par $S'(r) = 0$ soit $-2/r^2 + 4\pi r = 0$, soit encore $2\pi r^3 = 1$, et $r = (2\pi)^{-1/3}$. Donc $h = (\dfrac{4}{\pi})^{1/3}$. A.N :

$$\boxed{r = 0.54 \text{ dm} = 5.4 \text{ cm}, h = 1.08 \text{ dm} = 10.8 \text{ cm}.}$$

3. **Nombre de chiffres :** le plus grand nombre premier connu à ce jour est $2^{74\ 207\ 281} - 1$. Combien de chiffres sont nécessaires pour l'écrire ?

corrigé succinct :
Le nombre de chiffres $n$ est caractérisé par la double inégalité $10^{n-1} \leq 2^{74\ 207\ 281} - 1 < 10^n$, soit encore $10^{n-1} < 2^{74\ 207\ 281} < 10^n$ (l'inégalité de droite est stricte car une puissance de 2 n'est pas divisible par 5, donc a fortiori ne peut être une puissance de 10).
Si l'on peut écrire $2^{74\ 207\ 281}$ sous la forme $10^x$, le nombre de chiffre sera donc égal à la partie entière de $x$ plus un.
On détermine alors $x$ en prenant le logarithme népérien de cette égalité, soit $x = \ln 10 = 74\ 207\ 281 \ln 2$, donc $x = 74\ 207\ 281 \ln(2)/\ln 10 \simeq 22\ 338\ 617, ...$
Le nombre premier s'écrit donc avec 22 338 618 chiffres.

4. **Validité de l'approximation des petits angles :**
   (a) Montrer que pour tout $\theta$, $|\sin\theta - \theta| \leq |\theta|^3/6$ (utiliser la fonction $\sin\theta - \theta + \theta^3/6$)
   (b) Pour quels angles l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$ est-elle valable à $10^{-2}$ près ?

corrigé succinct :
(a) on sait déjà que pour tout $\theta > 0$, $\sin\theta \leq \theta$ donc $\sin\theta - \theta \leq 0$.
par ailleurs soit $g(\theta) = \sin\theta - \theta + \theta^3/6$, on a $g'(\theta) = \cos\theta - 1 + \theta^2/2$, $g''(\theta) = -\sin(\theta) + \theta$, $g'''(\theta) = -\cos\theta + 1$. Ainsi, $g'''$ est positive, donc $g''$ est croissante et comme $g''(0) = 0$, $g''$ est positive sur $[0, +\infty[$.
Donc $g'$ est croissante sur $[0, +\infty[$, et comme $g'(0) = 0$, $g'$ est positive sur $[0, +\infty[$. Donc $g$ est croissante sur $[0, +\infty[$, et comme $g(0) = 0$, $g$ est positive sur $[0, +\infty[$.
Par conséquent sur $[0, +\infty[$ on a $\sin\theta - \theta + \theta^3/6 \geq 0$ donc $\sin\theta - \theta \geq -\theta^3/6$.
On a donc prouvé que pour tout $\theta > 0$, $-\theta^3/6 \leq \sin\theta - \theta \leq 0$ donc on a bien $|\sin\theta - \theta| \leq \theta^3/6$, d'où le résultat pour $\theta > 0$.
$\sin\theta - \theta$ étant impaire, on a bien le résultat demandé pour tout $\theta$.
(b) il suffit de choisir $\theta$ tel que $\theta^3 = 6.10^{-2}$, soit $\theta = 0,391$ rad, soit en degrés : $\theta = 22,43°$ (ATTENTION : pour pouvoir écrire $\sin x = x$ l'angle $x$ doit être exprimé en radians ! ! !)