TD 2 : Trigonométrie directe et réciproque - corrigé

exercices théoriques

1. Calculer la dérivée des fonctions définies par :
$a(x) = \tan(x)$, $b(x) = \arccos x$, $c(x) = \arcsin\sqrt{1+x}$.

corrigé succinct :

$a'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$ (voir le cours ; il faut connaître ces deux expressions, même si celle utilisant tangente est la plus souvent utilisée)

La dérivée de arccos est une dérivée de cours, à connaître. Pour démontrer cette formule on part de la relation $\cos \arccos x = x$, que l'on dérive : on obtient $\arccos' x \times (-\sin \arccos x) = 1$, et comme $\sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}$, on obtient $\boxed{e'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.}$ (on rappelle que de même $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ce qui sera utile pour dériver f à la question suivante.

$D_f = [-1; 0]$, $D_{c'} =]-1; 0[$, et sur $D_{f'}$, et par dérivation de fonctions composées

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x})}{\sqrt{1-\sqrt{1+x}^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{1-(1+x)}}, \text{ donc } \boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{-x}}.}$$

2. Calculer $\cos\frac{5\pi}{8}$, $\sin\frac{5\pi}{8}$, et $\tan\frac{5\pi}{8}$.

corrigé succinct : On utilise la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ avec $x = \frac{5\pi}{8}$ pour obtenir $2\cos^2\frac{5\pi}{8} = 1 + \cos\frac{5\pi}{4} = 1 - \sqrt{2}/2$, d'où finalement $\cos^2\frac{5\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Comme $\frac{5\pi}{8}$ est entre $\pi/2$ et π, son cosinus est négatif, et donc $\boxed{\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$

Avec la formule $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, on obtient alors $\boxed{\sin\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}},}$

et par conséquent $\boxed{\tan\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.}$

3. Quels angles font avec $\vec{i}$ les vecteurs $\vec{u}(\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $\vec{v}(-1, 3)$, $\vec{w}(-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$?

corrigé succinct : $(\vec{i}, \vec{u}) = \pi/3$, $(\vec{i}, \vec{v}) = -\arctan(3) + \pi$, $(\vec{i}, \vec{w}) = -5\pi/6$.

4. mettre sous la forme $A\cos(\omega x - \varphi)$, en précisant les valeurs de A, ω et φ, les expressions suivantes :

(a) $\sqrt{3}\cos x - \sin x$
(b) $2\cos x + 0.5\sin x$
(c) $-\cos(3x) + 0.2\sin(3x)$
(d) $-4\cos(2x) + 3\sin(2x)$

corrigé succinct : A chaque fois, pour l'expression $a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$, on met en facteur $A = \sqrt{a^2+b^2}$ et on prend $\varphi = \arctan(b/a)$, $+\pi$ si $a < 0$.
On trouve :

(a) $2\cos(x + \pi/6)$
(b) $\sqrt{17}/2\cos(x - \arctan(1/4))$
(c) $\sqrt{26}/5\cos(3x + \arctan(1/5) + \pi)$
(d) $5\cos(2x + \arctan(3/4) - \pi)$

5. résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques :

(a) $\cos x = \frac{1}{2}$
(b) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
(d) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
(e) $\sin x = \cos x$
(f) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$
(g) $2\cos x + 0.5\sin x = 1.5$
(h) $\cos x + 0.2\sin x = 6$
(i) $-3\cos(2x) - 4\sin(2x) = 5$

corrigé succinct :

(a) Il suffit d'écrire $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ pour trouver : $\boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

(b) De même on écrit $\frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3})$, et donc x est solution si et seulement si $2x$ vaut $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc finalement : $\boxed{x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

(c) $\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$ équivaut à : $3x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ soit : $\boxed{x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.}$

(d) On résoud d'abord $2X^2 + X - 1$, dont les solutions sont $X = -1$ et $X = \frac{1}{2}$.
En remplaçant X par $\sin x$, on obtient donc deux équations trigonométriques, dont les solutions sont les $\boxed{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

(e) Un raisonnement géométrique permet d'éviter les calculs : l'angle x est solution si et seulement si l'abscisse et l'ordonnée du point correspondant du cercle trigonométrique sont égales. Donc $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, soit encore $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}.}$

On peut aussi traiter l'équation comme une équation $a\cos + b\sin = c$, de la même manière que les exercices qui suivent.

(f) L'équation équivaut successivement à $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \cos\frac{\pi}{3}$, $\cos(x+\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{3}$. Ainsi $x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et les solutions sont donc les $\boxed{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } \frac{-\pi}{2} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}.}$

(g) On transforme d'abord l'équation en l'équation $\frac{4}{\sqrt{17}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{17}}\sin x = \frac{3}{\sqrt{17}}$.
On peut alors écrire $\frac{4}{\sqrt{17}} = \cos\arctan\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin\arctan\frac{1}{4}$, et donc en posant $\alpha = \arctan\frac{1}{4}$, l'équation devient $\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x = \frac{3}{\sqrt{17}}$, soit $\cos(x-\alpha) = \cos(\arccos\frac{3}{\sqrt{17}})$. Ainsi, $x - \alpha = \pm\arccos(\frac{3}{\sqrt{17}}) + 2k\pi$; les solutions sont donc les $\boxed{\arctan\frac{1}{\sqrt{4}} \pm \arccos\frac{3}{\sqrt{17}} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}.}$ (remarque : $x \simeq 1$, mais $x \neq 1$)

(h) On transforme l'équation en $\frac{5}{\sqrt{26}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{26}}\sin x = \frac{6}{\sqrt{26}}$. Mais on remarque alors que le membre de gauche est de la forme $\cos(x-\beta)$ (cf.le cours, et l'équation précédente), alors que le membre de droite est strictement supérieur à 1 : $\boxed{\text{l'équation n'admet pas de solution.}}$

(i) $-\frac{3}{5}\cos(2x) - \frac{4}{5}\sin(2x) = 1$, donc si $\gamma = \arctan(\frac{4}{3}) + \pi$, l'équation devient $\cos\gamma\cos(2x) + \sin\gamma\sin(2x) = 1$, d'où et $\cos(2x-\gamma) = 1$. Ainsi, $2x - \gamma = 2k\pi$, donc les solutions sont les $\boxed{\arctan\frac{4}{3}/2 + \pi/2 + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}.}$

exercices pratiques

1. **Mesure du rayon de la Terre par Eratosthène, vers -200 av.J.C :** Lors du solstice d'été, à midi, le soleil est au zénith dans la ville de Syène (Assouan). A Alexandrie, située à 800km au nord sur le même méridien, les rayons du soleil font un angle de 7°avec la verticale.

   (a) Avec ces données, déterminer le rayon de la Terre.

   (b) Comparer à la valeur aujourd'hui mesurée, 6378km.

   corrigé succinct :

   (a) D'après les données, si d est la distance le long d'un méridien entre Syène et Assouan et si $\theta = 7° = 7*\pi/180$rad est l'angle correspondant, on a $R \times \theta = d$, donc $R = d/\theta \simeq 6548$km.

   (b) Le calcul d'Eratosthène donne une erreur de 170km, soit une erreur relative de l'ordre de $2,7\%$...la mesure est très correcte.

2. **Une histoire de pentes**
   « Petite randonnée tranquille ce matin, une belle pente à 30°régulière. Par contre, la voiture a trouvé la descente de Laffrey sur Vizille un peu raide : une longue pente à 12% ! ». Comment comparer ces valeurs ?

   corrigé succinct :

   12% de pente signifie que si le trajet horizontal (la distance parcourue en projection) est d, la voiture est descendue de $d \times 0,12$, et l'angle correspondant est donc caractérisé par $\tan\theta = 0,12$ soit $\theta \simeq 0,119$ rad $\simeq 6,84°$.

   A l'inverse, 30° de pente correspondent à $57,7\%$.

3. **Électricité**

   (a) Si A et ω sont des réels strictement positifs et si φ est un angle entre 0 et $\pi/2$, représenter graphiquement la fonction $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

   (b) On considère deux signaux trignométriques, d'amplitudes A_1 et A_2 et de même pulsation ω : $y_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$. On définit alors le déphasage du second signal par rapport au premier comme $\varphi_2 - \varphi_1$.
   Un générateur G_1 fournit une tension $u_1 = A\cos\omega t$ et un générateur G_2 une tension $u_2 = A\sin\omega t$. Quel est le déphasage par rapport à u_1 de la tension obtenue en plaçant G_1 et G_2 en série ?

   corrigé succinct : La tension étudiée est $(u_1 + u_2)(t) = A\cos\omega t + A\sin\omega t$.

   On peut donc transformer cette expression en l'écrivant $\sqrt{2}A(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\omega t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\omega t)$, soit $\sqrt{2}A\cos(\omega t - \pi/4)$. Ainsi, le déphasage cherché vaut $\boxed{-\pi/4}$.