TD 2 : Trigonométrie directe et réciproque - corrigé

exercices théoriques

1. Calculer la dérivée des fonctions définies par :
$a(x) = \tan(x) \quad , \qquad b(x) = \arccos x \quad , \qquad c(x) = \arcsin\sqrt{1+x}.$

corrigé succinct :

$a'(x) = 1+\tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$ (voir le cours ; il faut connaître ces deux expressions, même si celle utilisant tangente est la plus souvent utilisée)

La dérivée de arccos est une dérivée de cours, à connaître. Pour démontrer cette formule on part de la relation $\cos\arccos x = x$, que l'on dérive : on obtient $\arccos' x \times (-\sin\arccos x) = 1$, et comme $\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}$, on obtient $\boxed{e'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.}$ (on rappelle que de même $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ce qui sera utile pour dériver f à la question suivante.

$D_f = [-1;0]$, $D_{c'} =]-1;0[$, et sur $D_{f'}$, et par dérivation de fonctions composées

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x})}{\sqrt{1-\sqrt{1+x}^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{1-(1+x)}}, \text{ donc } \boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{-x}}.}$$

2. Calculer $\cos\frac{5\pi}{8}$, $\sin\frac{5\pi}{8}$, et $\tan\frac{5\pi}{8}$.

corrigé succinct : On utilise la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ avec $x = \frac{5\pi}{8}$ pour obtenir $2\cos^2\frac{5\pi}{8} = 1+\cos\frac{5\pi}{4} = 1-\sqrt{2}/2$, d'où finalement $\cos^2\frac{5\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Comme $\frac{5\pi}{8}$ est entre $\pi/2$ et π, son cosinus est négatif, et donc $\boxed{\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$

Avec la formule $\sin 2x = 2\sin x \ \cos x$, on obtient alors $\boxed{\sin\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}},}$

et par conséquent $\boxed{\tan\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.}$

3. Quels angles font avec $\vec{i}$ les vecteurs $\vec{u}(\sqrt{2},\sqrt{6})$, $\vec{v}(-1,3)$, $\vec{w}(-\sqrt{6},-\sqrt{2})$?

corrigé succinct : $(\vec{i},\vec{u}) = \pi/3$, $(\vec{i},\vec{v}) = -\arctan(3)+\pi$, $(\vec{i},\vec{w}) = -5\pi/6$.

4. résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques :

(a) $\cos\ x = \frac{1}{2}$
(b) $\sin\ 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $\tan\ 3x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
(d) $2\sin^2\ x + \sin\ x - 1 = 0$
(e) $\sin\ x = \cos\ x$
(f) $\sqrt{3}\cos\ x - \sin\ x = 1$
(g) $2\cos\ x + 0.5\sin\ x = 1.5$
(h) $\cos\ x + 0.2\sin\ x = 6$
(i) $-3\cos\ x - 4\sin\ x = 5$

corrigé succinct :

(a) Il suffit d'écrire $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ pour trouver : $\boxed{x = \frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.}$

(b) De même on écrit $\frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3})$, et donc x est solution si et seulement si $2x$ vaut $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, donc finalement : $\boxed{x = -\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.}$

(c) $\tan\ 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$ équivaut à : $3x = \frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ soit : $\boxed{x = \frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}.}$

(d) On résoud d'abord $2X^2+X-1$, dont les solutions sont $X=-1$ et $X=\frac{1}{2}$. En remplaçant X par $\sin\ x$, on obtient donc deux équations trigonométriques, dont les solutions sont les $\boxed{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ et } \frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.}$

(e) Un raisonnement géométrique permet d'éviter les calculs : l'angle x est solution si et seulement si l'abscisse et l'ordonnée du point correspondant du cercle trigonométrique sont égales. Donc $x = \frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4}+2k\pi$, soit encore $\boxed{x = \frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.}$

On peut aussi traiter l'équation comme une équation $a\cos + b\sin = c$, de la même manière que les exercices qui suivent.

(f) L'équation équivaut successivement à $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\ x - \frac{1}{2}\sin\ x = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}\cos\ x - \sin\frac{\pi}{6}\sin\ x = \cos\frac{\pi}{3}$, $\cos(x+\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{3}$. Ainsi $x+\frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, et les solutions sont donc les $\boxed{\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ et } \frac{-\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.}$

(g) On transforme d'abord l'équation en l'équation $\frac{4}{\sqrt{17}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{17}} \sin x = \frac{3}{\sqrt{17}}$.
On peut alors écrire $\frac{4}{\sqrt{17}} = \cos \arctan \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin \arctan \frac{1}{4}$, et donc en posant $\alpha = \arctan \frac{1}{4}$, l'équation devient $\cos\, \alpha\, \cos\, x + \sin\, \alpha\, \sin\, x = \frac{3}{\sqrt{17}}$, soit $\cos(x - \alpha) = \cos(\arccos \frac{3}{\sqrt{17}})$. Ainsi, $x - \alpha = \pm \arccos(\frac{3}{\sqrt{17}}) + 2k\pi$; les solutions sont donc les $\boxed{\arctan \frac{1}{\sqrt{4}} \pm \arccos \frac{3}{\sqrt{17}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.}$ (remarque : $x \simeq 1$, mais $x \neq 1$)

(h) On transforme l'équation en $\frac{5}{\sqrt{26}} \cos\, x + \frac{1}{\sqrt{26}} \sin\, x = \frac{6}{\sqrt{26}}$. Mais on remarque alors que le membre de gauche est de la forme $\cos(x - \beta)$ (cf.le cours, et l'équation précédente), alors que le membre de droite est strictement supérieur à 1 : $\boxed{\text{l'équation n'admet pas de solution.}}$

(i) $-\frac{3}{5} \cos\, x - \frac{4}{5} \sin\, x = 1$, donc si $\gamma = \arctan(\frac{4}{3}) + \pi$, l'équation devient $\cos \gamma \cos\, x + \sin \gamma \sin\, x = 1$, d'où et $\cos(x - \gamma) = 1$. Ainsi, $x - \gamma = 2k\pi$, donc les solutions sont les $\boxed{\arctan \frac{4}{3} + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.}$

exercices pratiques

1. **Mesure du rayon de la Terre par Eratosthène, vers -200 av.J.C :** Lors du solstice d'été, à midi, le soleil est au zénith dans la ville de Syène (Assouan). A Alexandrie, située à 800km au nord sur le même méridien, les rayons du soleil font un angle de 7°avec la verticale.

   (a) Avec ces données, déterminer le rayon de la Terre.

   (b) Comparer à la valeur aujourd'hui mesurée, 6378km.

   corrigé succinct :

   (a) D'après les données, si d est la distance le long d'un méridien entre Syène et Assouan et si $\theta = 7^\circ = 7 * \pi/180$rad est l'angle correspondant, on a $R \times \theta = d$, donc $R = d/\theta \simeq 6548$km.

   (b) Le calcul d'Eratosthène donne une erreur de 170km, soit une erreur relative de l'ordre de $2,7\%$...la mesure est très correcte.

2. **Une histoire de pentes**
   « Petite randonnée tranquille ce matin, une belle pente à 30°régulière. Par contre, la voiture a trouvé la descente de Laffrey sur Vizille un peu raide : une longue pente à 12% ! ». Comment comparer ces valeurs ?

   corrigé succinct :

   12% de pente signifie que si le trajet horizontal (la distance parcourue en projection) est d, la voiture est descendue de $d \times 0,12$, et l'angle correspondant est donc caractérisé par $\tan \theta = 0,12$ soit $\theta \simeq 0,119$ rad $\simeq 6,84^\circ$.

   A l'inverse, 30° de pente correspondent à $57,7\%$.

3. **Électricité**
   On considère deux signaux trignométriques, d'amplitudes A_1 et A_2 et de même pulsation ω : $y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. On définit alors le déphasage du second signal par rapport au premier comme $\varphi_2 - \varphi_1$.
   Un générateur G_1 fournit une tension $u_1 = A \cos \omega t$ et un générateur G_2 une tension $u_2 = A \sin \omega t$. Quel est le déphasage par rapport à u_1 de la tension obtenue en plaçant G_1 et G_2 en série ?

   corrigé succinct : La tension étudiée est $(u_1 + u_2)(t) = A \cos \omega t + A \sin \omega t$.
   On peut donc transformer cette expression en l'écrivant $\sqrt{2}A(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega t)$, soit $\sqrt{2}A \cos(\omega t - \pi/4)$. Ainsi, le déphasage cherché vaut $\boxed{-\pi/4}$.

4. * **Graduation d'une cuve cylindrique**
   Une cuve cylindrique de rayon $R = 1$m et de longueur $L = 5$m est posée sur le sol selon sa longueur. On souhaite déterminer le volume V de liquide en fonction de sa hauteur h, $0 \leq h \leq 2$.

   (a) Calculer $V(0)$, $V(1)$, $V(2)$.

   (b) En décomposant la surface de liquide comme différence entre la surface d'un secteur circulaire et celle d'un triangle isocèle, donner $V(h)$ pour $0 \leq h \leq 1$.

   (c) En déduire la valeur de $V(h)$ pour $1 \leq h \leq 2$.

   (d) Peut-on facilement graduer la cuve, c'est à dire exprimer la hauteur du liquide en fonction de son volume ?

   corrigé succinct :

   (a) On a $\boxed{V(0) = 0,}$ $\boxed{V(1) = \pi R^2 L/2 = 5\pi/2}$ et $\boxed{V(2) = \pi R^2 L = 5\pi.}$

(b) On considère un des disques qui ferment la cuve. Soit O son centre, et A et B les points du cercle correspondant tel que le liquide soit situé sous $[AB]$. Soit enfin θ l'angle $\widehat{AOB}$ et C le milieu de $[AB]$.

Alors $V(h) = L \times S(h)$, où $S(h)$ est la surface de liquide sur le disque. Et on peut calculer $S(h)$ comme différence entre l'aire d'un secteur d'angle θ et l'aire du triangle AOB.

Le triangle AOC étant rectangle en C, $AC^2 = AO^2 - OC^2 = 1-(1-h)^2 = 2h-h^2$, donc $AC = \sqrt{2h-h^2}$. L'aire de AOC est $OC \times AC/2$, et l'aire de AOB est donc égale à $OC \times AC$, soit $(1-h)\sqrt{2h-h^2}$.

L'aire du secteur angulaire est simplement égale à $\theta R^2/2$, donc ici $\theta/2$, et on peut calculer $\theta/2$ grâce à la trigonométrie dans le triangle rectangle en C AOC : $OC = OA\cos(\theta/2)$ donc $1-h = \cos(\theta/2)$, $\theta/2 = \arccos(1-h)$.

Finalement, on obtient donc $V(h) = 5(\arccos(1-h) - (1-h)\sqrt{2h-h^2})$, d'où

$$\boxed{V(h) = 5(\arccos(1-h) - (1-h)\sqrt{2h-h^2}).}$$

(c) Si h est compris entre 1 et 2, c'est l'air qui occupe un volume correspondant à une hauteur $2-h$ (comprise entre 0 et 1), et l'on peut calculer ce volume grâce à la question précédente. Ainsi, $V(h) = V(2) - V(2-h) = 5(\pi - \arccos(-1+h) + (-1+h)\sqrt{2(2-h)-(2-h)^2})$, et donc

$$\boxed{\text{si } 1 \leq h \leq 2,\ V(h) = 5(\pi - \arccos(-1+h) + (-1+h)\sqrt{2h-h^2}).}$$

On peut même démontrer que cette expression est égale à celle déterminée pour $0 \leq h \leq 1$. En effet, un peu de géométrie (ou une utilisation des dérivées) montre que la fonction $x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$ est constante sur $[-1;1]$, de valeur π. Par conséquent, $\pi - \arccos(-1+h) = \arccos(1-h)$. Comme $-1+h = -(1-h)$ on a donc pour $1 \leq h \leq 2$, $V(h) = 5(\arccos(h-1) - (1-h)\sqrt{2h-h^2})$, et on retrouve bien la formule précédente.

Ainsi, pour tout h compris entre 0 et 2, $\boxed{V(h) = 5(\arccos(1-h) - (1-h)\sqrt{2h-h^2}.}$

(d) Non, il n'est pas possible d'inverser cette formule donnant V en fonction de h pour obtenir h en fonction de V. Seuls des calculs numériques de h, pour un certain nombre de valeurs de V (tous les 100 litres, par exemple..), permettront de déterminer comment graduer la cuve.