

exercices théoriques

1. Calculer la dérivée des fonctions définies par :

$$a(x) = \tan(x) \quad , \quad b(x) = \arccos \sqrt{1+x}.$$

corrigé succinct :

$a'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$ (voir le cours ; il faut connaître ces deux expressions, même si celle utilisant tangente est la plus souvent utilisée)

Par dérivation de fonctions composées $b'(x) = -\frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x})}{\sqrt{1-\sqrt{1+x}^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{1-(1+x)}}$,

donc $b'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{-x}}$. (définie pour x strictement compris entre -1 et 0)

2. Calculer $\cos \frac{5\pi}{8}$, $\sin \frac{5\pi}{8}$, et $\tan \frac{5\pi}{8}$.

corrigé succinct : On utilise la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ avec $x = \frac{5\pi}{8}$ pour obtenir

$$2\cos^2 \frac{5\pi}{8} = 1 + \cos \frac{5\pi}{4} = 1 - \sqrt{2}/2, \text{ d'où finalement } \cos^2 \frac{5\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}. \text{ Comme } \frac{5\pi}{8} \text{ est entre}$$

$\pi/2$ et π , son cosinus est négatif, et donc

$$\cos \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Avec la formule $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, on obtient alors

$$\sin \frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}},$$

et par conséquent

$$\tan \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.$$

3. Quels angles font avec \vec{i} les vecteurs $\vec{u}(\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $\vec{v}(-1, 3)$, $\vec{w}(-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$?

corrigé succinct : $(\vec{i}, \vec{u}) = \pi/3$, $(\vec{i}, \vec{v}) = -\arctan(3) + \pi$, $(\vec{i}, \vec{w}) = -5\pi/6$.

4. mettre sous la forme $A \cos(\omega x - \varphi)$, en précisant les valeurs de A , ω et φ , les expressions suivantes :

(a) $\sqrt{3} \cos x - \sin x$

(b) $-\cos(x) + \sin(x)$

(c) $2 \cos x + 0.5 \sin x$

(d) $-\cos(3x) + 0.2 \sin(3x)$

(e) $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)$

(f) $-4 \cos(2x) + 3 \sin(2x)$

corrigé succinct : A chaque fois, pour l'expression $a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$, on met en facteur $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et on prend $\varphi = \arctan(b/a)$, $+\pi$ si $a < 0$.

On trouve :

(a) $2 \cos(x + \pi/6)$

(b) $\sqrt{2} \cos(x - 3\pi/4)$

(c) $\sqrt{17}/2 \cos(x - \arctan(1/4))$

(d) $\sqrt{26}/5 \cos(3x + \arctan(1/5) + \pi)$

(e) $\sqrt{2} \cos(\omega t - \pi/4)$

(f) $5 \cos(2x + \arctan(3/4) - \pi)$

5. résoudre dans \mathbb{R} les équations trigonométriques :

(a) $\cos x = \frac{1}{2}$

(b) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(d) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

(e) $\sin x = \cos x$

(f) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$

(g) $2 \cos x + 0.5 \sin x = 1.5$

(h) (*) $\cos x + 0.2 \sin x = 6$

(i) (*) $-3 \cos(2x) - 4 \sin(2x) = 5$

corrigé succinct :

(a) Il suffit d'écrire $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ pour trouver : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(b) De même on écrit $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3})$, et donc x est solution si et seulement si $2x$ vaut $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, donc finalement : $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6}$ équivaut à : $3x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ soit : $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

(d) On résoud d'abord $2X^2 + X - 1$, dont les solutions sont $X = -1$ et $X = \frac{1}{2}$. En remplaçant X par $\sin x$, on obtient donc deux équations trigonométriques, dont les solutions sont les $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(e) Un raisonnement géométrique permet d'éviter les calculs : l'angle x est solution si et seulement si l'abscisse et l'ordonnée du point correspondant du cercle trigonométrique sont égales.

Donc $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, soit encore $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

On peut aussi traiter l'équation comme une équation $a \cos + b \sin = c$, de la même manière que les exercices qui suivent.

(f) L'équation équivaut successivement à $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \cos \frac{\pi}{3}$, $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{3}$. Ainsi $x + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, et les solutions sont donc

les $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(g) On transforme d'abord l'équation en l'équation $\frac{4}{\sqrt{17}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{17}} \sin x = \frac{3}{\sqrt{17}}$.

On peut alors écrire $\frac{4}{\sqrt{17}} = \cos \arctan \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin \arctan \frac{1}{4}$, et donc en posant $\alpha = \arctan \frac{1}{4}$, l'équation devient $\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x = \frac{3}{\sqrt{17}}$, soit $\cos(x - \alpha) = \cos(\arccos \frac{3}{\sqrt{17}})$. Ainsi, $x - \alpha = \pm \arccos(\frac{3}{\sqrt{17}}) + 2k\pi$; les solutions sont donc les

$\arctan \frac{1}{4} \pm \arccos \frac{3}{\sqrt{17}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (remarque : $x \simeq 1$, mais $x \neq 1$)

(h) On transforme l'équation en $\frac{5}{\sqrt{26}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{26}} \sin x = \frac{6}{\sqrt{26}}$. Mais on remarque alors que le membre de gauche est de la forme $\cos(x - \beta)$ (cf. le cours, et l'équation précédente), alors que

le membre de droite est strictement supérieur à 1 : l'équation n'admet pas de solution.

(i) $-\frac{3}{5} \cos(2x) - \frac{4}{5} \sin(2x) = 1$, donc si $\gamma = \arctan(\frac{4}{3}) + \pi$, l'équation devient $\cos \gamma \cos(2x) + \sin \gamma \sin(2x) = 1$, d'où $\cos(2x - \gamma) = 1$. Ainsi, $2x - \gamma = 2k\pi$, donc les solutions sont

les $\arctan \frac{4}{3}/2 + \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

exercices pratiques

1. **Mesure du rayon de la Terre par Eratosthène, vers -200 av.J.C :** Lors du solstice d'été, à midi, le soleil est au zénith dans la ville de Syène (Assouan). A Alexandrie, située à 800km au nord sur le même méridien, les rayons du soleil font un angle de 7° avec la verticale.

(a) Avec ces données, déterminer le rayon de la Terre.

(b) Comparer à la valeur aujourd'hui mesurée, 6378km.

corrigé succinct :

- (a) D'après les données, si d est la distance le long d'un méridien entre Syène et Assouan et si $\theta = 7^\circ = 7 * \pi / 180 \text{ rad}$ est l'angle correspondant, on a $R * \theta = d$, donc $R = d / \theta \simeq 6548 \text{ km}$.
- (b) Le calcul d'Eratosthène donne une erreur de 170km, soit une erreur relative de l'ordre de 2,7%...la mesure est très correcte.

2. **Une histoire de pentes**

« Petite randonnée tranquille ce matin, une belle pente à 30° régulière. Par contre, la voiture a trouvé la descente de Laffrey sur Vizille un peu raide : une longue pente à 12% ! ». Comment comparer ces valeurs ?

corrigé succinct :

12% de pente signifie que si le trajet horizontal (la distance parcourue en projection) est d , la voiture est descendue de $d * 0,12$, et l'angle correspondant est donc caractérisé par $\tan \theta = 0,12$ soit $\theta \simeq 0,119 \text{ rad} \simeq 6,84^\circ$.

A l'inverse, 30° de pente correspondent à 57,7%.

3. **Électricité**

- (a) Si A et ω sont des réels strictement positifs et si φ est un angle entre 0 et $\pi/2$, représenter graphiquement la fonction $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.
- (b) On considère deux signaux trigonométriques, d'amplitudes A_1 et A_2 et de même pulsation ω : $y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. On définit alors le déphasage du second signal par rapport au premier comme $\varphi_2 - \varphi_1$.

Un générateur G_1 fournit une tension $u_1 = A \cos \omega t$ et un générateur G_2 une tension $u_2 = A \sin \omega t$. Quel est le déphasage par rapport à u_1 de la tension obtenue en plaçant G_1 et G_2 en série ?

corrigé succinct : La tension étudiée est $(u_1 + u_2)(t) = A \cos \omega t + A \sin \omega t$.

On peut donc transformer cette expression en l'écrivant $\sqrt{2}A(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega t)$, soit

$\sqrt{2}A \cos(\omega t - \pi/4)$. Ainsi, le déphasage cherché vaut $-\pi/4$.