

exercices théoriques

1. Donner la forme algébrique, le module et l'argument des nombres :

$$a = R + jL\omega; \quad b = (1 - i)(1 + \sqrt{3}i); \quad c = \frac{1+i}{2-i}; \quad d = \frac{e^{1+2i}-1}{1+2i};$$

$$e = \frac{UC}{1+jRC\omega}; \quad f = (1 - \sqrt{3}i)^{2021}; \quad g = \frac{1}{1 - xe^{i\theta}} \text{ si } x \in] -1, 1[.$$

corrigé succinct :

le module de a est $\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$, son argument est $\arctan(L\omega/R)$.

Pour b , en développant on trouve $b = 1 + \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i$. Pour déterminer sa forme

trigonométrique, il est plus simple de calculer séparément celle de $1 - i$ et celle de $1 + \sqrt{3}i$ avant de multiplier les modules et d'additionner les arguments pour obtenir ceux de b :

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ et } 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \text{ donc } b = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Pour c on obtient la forme algébrique (cartésienne) avec la méthode de la quantité conjuguée : on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $2 + i$ du dénominateur $2 - i$:

$$c = \frac{(2+i)(1+i)}{(2+i)(2-i)}, \text{ d'où } c = \frac{1+3i}{5}.$$

On trouve alors directement son module $\sqrt{10}/5$ et son argument $\arctan(3)$: la forme

exponentielle est donc $c = \frac{\sqrt{10}}{5}e^{i\arctan(3)}$.

Pour d on écrit le numérateur sous sa forme algébrique $(e \cos(2) - 1) + ie \sin(2)$, puis on obtient la forme algébrique de la fraction avec la méthode de la quantité conjuguée (on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $1 - 2i$ du dénominateur) :

$$d = \frac{e \cos(2) - 1 + 2e \sin(2) + i(-2e \cos(2) + 2 + e \sin(2))}{5}.$$

Pour trouver la forme exponentielle il est préférable de revenir à la forme de l'énoncé : le module

vaut $|d| = \frac{\sqrt{(e \cos(2) - 1)^2 + (e \sin(2))^2}}{\sqrt{5}}$ et l'argument est la différence entre l'argument

du numérateur et celui du dénominateur, soit

$$\arg(d) = \arctan(e \sin(2)/(e \cos(2) - 1)) + \pi - \arctan(2).$$

Pour e , le module vaut $UC/\sqrt{1+(RC\omega)^2}$ et l'argument vaut

$$\arg(UC) - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \arctan(RC\omega) \text{ soit } -\arctan(RC\omega).$$

La forme algébrique est $e = UC \frac{1 - jRC\omega}{1 + (RC\omega)^2}$.

Le module de f est 2^{2021} et l'argument de g est $-2021\pi/3$ soit encore $-(336 * 6 + 5)\pi/3 = -5\pi/3 = \pi/3$. On peut donc écrire la forme algébrique à partir de la

forme trigonométrique $f = 2^{2021}(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)) = 2^{2021}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Pour g en multipliant par le conjugué du dénominateur, c'est-à-dire par

$$1 - xe^{-i\theta} = 1 - x \cos(\theta) + ix \sin(\theta), \text{ on trouve } g = \frac{1 - x \cos \theta + ix \sin \theta}{1 + x^2 - 2x \cos \theta}.$$

2. Calculer $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin \theta$.

corrigé succinct : On utilise la formule de Moivre :

$$\sin 5\theta = \text{im}(\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \text{im}(\cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta - 10i \cos^2 \theta \sin^3 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta + i \sin^5 \theta) = 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta. \text{ Il ne reste plus qu'à utiliser les relations } \cos^4 \theta = (1 - \sin^2 \theta)^2 = \sin^4 \theta - 2 \sin^2 \theta + 1 \text{ et } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ pour trouver, après simplification :}$$

$$\sin 5\theta = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta.$$

3. Linéariser : (a) $\sin^2 \theta$ (b) $\cos^4 \theta$ (c) $\sin^3 \theta \cos^2 \theta$

corrigé succinct : on utilise les formules d'Euler...

(a) $\sin^2 \theta = (\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i})^2 = -\frac{1}{4}(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta})$, $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$.

(b) De même en développant $(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2})^4$, on trouve $\cos^4 \theta = \frac{\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3}{8}$.

(c) De même, $\sin^3 \theta \cos^2 \theta = (\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i})^3 (\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2})^2$, donc

$$\sin^3 \theta \cos^2 \theta = \frac{-\sin 5\theta + \sin 3\theta + 2 \sin \theta}{16}.$$

4. Résoudre sur \mathbb{R} et \mathbb{C} les équations :

(a) $x^2 + 3 = 0$ (b) $x^2 + x + 1 = 0$ (c) $x^3 = 1$

corrigé succinct : On utilise les formules avec le discriminant :

(a) ici le discriminant est inutile : $x^2 = -3$ a deux solutions non réelles conjuguées, $+\sqrt{3}i$ et $-\sqrt{3}i$

(b) le discriminant vaut -3 , donc les racines non réelles conjuguées sont $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(c) on cherche les solutions sous la forme $x = re^{i\theta}$. On a donc $x^3 = r^3 e^{3i\theta} = 1$ donc en identifiant module et argument : $r^3 = 1$ et $3\theta = 2\pi + 2k\pi$, soit $r = 1$ et $\theta = 2\pi/3 + 2k\pi/3$, ce

qui donne les trois solutions $e^{i0/3}$, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$ soit $1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ et $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$.

5. * On considère pour $x \in]-\pi/2, +\pi/2[$ $f(x) = \frac{1 + i \tan x}{1 - i \tan x}$.

Donner les parties réelle et imaginaire, le module, l'argument de $f(x)$.

En déduire l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\tan x$.

corrigé succinct : $f(x) = \frac{(1 + i \tan x)^2}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \tan^2 x + 2i \tan x}{1 + \tan^2 x}$, donc
 $\operatorname{re}(f(x)) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ et $\operatorname{im}(f(x)) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$. $|f(x)| = \frac{(1 - \tan^2 x)^2 + (2 \tan x)^2}{(1 + \tan^2 x)^2} = \frac{1 + \tan^4 x + 2 \tan^2 x}{(1 + \tan^2 x)^2} = 1$.

Mais on voit aussi, en multipliant numérateur et dénominateur par $\cos x$, que
 $f(x) = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$: $\arg(f(x)) = 2x$, et donc
 $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ et de plus en comparant les deux expressions de $f(x)$,
 $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$.

6. Effectuer la division selon les puissances décroissantes de :

(a) $X^4 - X^3 + 3X^2 + 1$ par $X^2 + 3X + 1$
 (b) $X^5 + 2X^3 - 3X - 2$ par $X^3 + X + 1$
 (c) $6X^5 - 7X^4 + 1$ par $(X - 1)^2$

corrigé succinct :

(a) On pose la division :

$$\begin{array}{r|l} X^4 & - & X^3 & + & 3X^2 & & + & 1 & & & X^2 & + & 3X & + & 1 \\ X^4 & + & 3X^3 & + & X^2 & & & & & & X^2 & - & 4X & + & 14 \\ \hline & - & 4X^3 & + & 2X^2 & & & + & 1 & & & & & & \\ & - & 4X^3 & - & 12X^2 & - & 4X & & & & & & & & \\ \hline & & & & 14X^2 & + & 4X & + & 1 & & & & & & \\ & & & & 14X^2 & + & 42X & + & 14 & & & & & & \\ \hline & & & & & - & 38X & - & 13 & & & & & & \end{array}$$

donc $X^4 - X^3 X + 1 = (X^2 + 3X + 1)(X^2 - 4X + 14) - 38X - 13$.

(b) De même on pose la division :

$$\begin{array}{r|l} X^5 & + & 2X^3 & & - & 3X & - & 2 & & & X^3 & + & X & + & 1 \\ X^5 & + & X^3 & + & X^2 & & & & & & X^2 & + & 1 & & \\ \hline & & X^3 & - & X^2 & - & 3X & - & 2 & & & & & & \\ & & X^3 & & & + & X & + & 1 & & & & & & \\ \hline & & & - & X^2 & - & 4X & - & 3 & & & & & & \end{array}$$

donc

on trouve $X^5 + 2X^3 - 3X - 2 = (X^3 + X + 1)(X^2 + 1) - X^2 - 4X - 3$.

(c) Pour effectuer la division il faut commencer par développer le diviseur : $(X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$. On procède alors de même et on obtient la relation

$6X^5 - 7X^4 + 1 = (X^2 - 2X + 1)(6X^3 + 5X^2 + 4X + 3) + 2X - 2$.

7. Factoriser sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} les polynômes :

(a) $X^2 + 2X - 5$ (b) $X^4 + 2X^2 - 5$ (c) $3X^3 - 3X^2 + 6X - 6$
 (d) $X^4 - 16$ (e) $X^4 + 2X^3 - X - 2$ (f) $2X^3 - 3X^2 - 3X + 2$
 (g) $3X^5 + 9$ (h) $X^5 + X^4 - 16X - 16$ (i) $X^3 - X^2 + X - 1$

corrigé succinct :

(a) $X^2 + 2X - 5$:

Pour factoriser un polynôme **de degré 2** il suffit de déterminer ses racines : s'il a des racines il peut alors s'écrire $a(X - r_1)(X - r_2)$, s'il n'a pas de racines (sur \mathbb{R}) il est irréductible.

Ici, le discriminant vaut $4 - (-5) \times 4 = 24$, donc le polynôme est à racines réelles et elles valent $(-2 + \sqrt{24})/2 = -1 + \sqrt{6}$ et $(-2 - \sqrt{24})/2 = -1 - \sqrt{6}$.

Le polynôme est alors divisible par $X - (-1 + \sqrt{6})$ et par $X - (-1 - \sqrt{6})$.

Comme de plus le polynôme est unitaire, on peut écrire sa factorisation, sur \mathbb{R} comme sur \mathbb{C} :

$X^2 + 2X - 5 = (X - (-1 + \sqrt{6}))(X - (-1 - \sqrt{6}))$

(remarque : il est préférable de laisser les parenthèses dans cette expression pour bien faire apparaître les $X - a$ où a est une racine)

(b) $X^4 + 2X^2 - 5$

Ici on peut rechercher les racines en remarquant qu'il n'a que des puissances paires de X , on peut donc poser $Y = X^2$. Le polynôme vaut alors $Y^2 + 2Y - 5$, et on reconnaît le polynôme étudié à la question précédente.

On peut donc utiliser la factorisation précédente :

$X^4 + 2X^2 - 5 = (X^2 - (-1 + \sqrt{6}))(X^2 - (-1 - \sqrt{6}))$.

Peut-on aller plus loin ? Il faut essayer de factoriser séparément chacun des deux polynômes apparus. Ont-ils des racines réelles ?

Oui pour le premier, on peut donc le factoriser sous la forme :

$$X^2 - (-1 + \sqrt{6}) = (X - \sqrt{-1 + \sqrt{6}})(X + \sqrt{-1 + \sqrt{6}}) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ comme sur } \mathbb{C}.$$

Non pour le second : sur \mathbb{R} il est irréductible, et donc le polynôme $X^4 + 2X^2 - 5$ a pour factorisation réelle :

$$X^4 + 2X^2 - 5 = (X - \sqrt{-1 + \sqrt{6}})(X + \sqrt{-1 + \sqrt{6}})(X^2 - (-1 - \sqrt{6})) \text{ sur } \mathbb{R}$$

En revanche, sur \mathbb{C} , $X^2 - (-1 - \sqrt{6})$ a pour racines $i\sqrt{1 + \sqrt{6}}$ et $-i\sqrt{1 + \sqrt{6}}$. Et on peut donc écrire : $X^2 - (-1 - \sqrt{6}) = (X - i\sqrt{1 + \sqrt{6}})(X + i\sqrt{1 + \sqrt{6}})$.

Finalement sur \mathbb{C} :

$$X^4 + 2X^2 - 5 = (X - \sqrt{-1 + \sqrt{6}})(X + \sqrt{-1 + \sqrt{6}})(X - i\sqrt{1 + \sqrt{6}})(X + i\sqrt{1 + \sqrt{6}})$$

(c) $3X^3 - 3X^2 + 6X - 6 :$

Quand le polynôme à factoriser est de degré 3 ou plus, qu'il n'y a pas d'astuce comme celle de l'équation bicarrée du b), la méthode générale consistera à chercher une ou plusieurs racines "évidente", parmi les diviseurs du terme constant. On peut donc essayer successivement les diviseurs de 6 : 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6...jusqu'à trouver une racine.

Ici on a de la chance, car on voit tout de suite que 1 est racine : $3 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 6 - 6 = 0$.

On pose alors la division de $3X^3 - 3X^2 + 6X - 6$ par $X - 1$: on sait qu'elle tombera juste, le reste sera nul. On trouve : $3X^3 - 3X^2 + 6X - 6 = (X - 1)(3X^2 + 6)$. Il reste à factoriser $3X^2 + 6$: il s'agit d'un polynôme de degré 2, sans racine réelle...il est donc irréductible sur \mathbb{R} , et donc :

sur \mathbb{R} , $3X^3 - 3X^2 + 6X - 6 = (X - 1)(3X^2 + 6)$, on peut quand même sortir le

coefficient 3 : $3X^3 - 3X^2 + 6X - 6 = 3(X - 1)(X^2 + 2)$

Sur \mathbb{C} , $3X^2 + 6$ a pour racines $\pm i\sqrt{2}$, et donc on peut factoriser $3X^2 + 6 = 3(X - i\sqrt{2})(X + i\sqrt{2})$.

Et donc finalement, sur \mathbb{C} , $3X^3 - 3X^2 + 6X - 6 = 3(X - 1)(X - i\sqrt{2})(X + i\sqrt{2})$.

(d) $X^4 - 16$

Ici on pourrait chercher des racines "évidentes" (on trouverait 2, -2...), mais il sera plus rapide de remarquer que les racines de ce polynôme sont les racines 4èmes de 16.

Pour les déterminer on peut écrire $16 = 16e^{i0}$ et juste utiliser la formule de cours : les racines sont les $2e^{0/4 + 2ik\pi/4}$ soit : $2e^0, 2e^{i\pi/2}, 2e^{i\pi}$ et $2e^{3i\pi/2}$, soit 2, -2, 2i, -2i.

On obtient ainsi directement la factorisation sur \mathbb{C}

$$X^4 - 16 = (X - 2)(X + 2)(X - 2i)(X + 2i)$$

Pour en déduire la factorisation sur \mathbb{R} il suffit de garder les facteurs réels, et de multiplier entre eux les facteurs non réels conjugués :

$$\text{Sur } \mathbb{R} \quad X^4 - 16 = (X - 2)(X + 2)(X^2 + 4)$$

(e) $X^4 + 2X^3 - X - 2$

On cherche des racines "évidentes"...et on en trouve deux : 1 et -2. On peut du coup diviser d'un coup par le produit $(X - 1)(X - (-2)) = X^2 + X - 2$, le quotient vaut $X^2 + X + 1$ est le quotient est bien sûr nul (si ce n'était pas le cas, ce serait le signe que l'on a fait une erreur : sur les racines "évidentes" ou dans la division elle-même).

On obtient donc la factorisation $X^4 + 2X^3 - X - 2 = (X - 1)(X + 2)(X^2 + X + 1)$.

Le polynôme $X^2 + X + 1$ de discriminant n'a pas de racine réelle.

Donc la factorisation est terminée sur \mathbb{R} :

$$X^4 + 2X^3 - X - 2 = (X - 1)(X + 2)(X^2 + X + 1)$$

Sur \mathbb{C} on obtient les racines $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ et donc la factorisation :

$$\text{sur } \mathbb{C} : X^4 + 2X^3 - X - 2 = (X - 1)(X + 2)\left(X - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$

remarque : si l'on ne voit qu'une seule des deux racines évidentes, $r = 1$ ou $r = -2$, on peut commencer par diviser par $X - r$, obtenir un quotient de degré 3, et recommencer : il aura l'autre racine comme racine évidente...c'est plus long mais correct.

(f) $2X^3 - 3X^2 - 3X + 2$

Ici on trouve pour racine évidente -1.

La division du polynôme par $X + 1$ donne pour quotient $2X^2 - 5X + 2$, de discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$. Les racines sont donc 2 et 1/2.

Ainsi, sur \mathbb{R} comme sur \mathbb{C} , $2X^3 - 3X^2 - 3X + 2 = 2(X + 1)(X - 1/2)(X - 2)$

remarque 1 : attention au coefficient 2, présent dans le terme dominant $2X^3$ au début, à ne pas oublier dans la factorisation obtenue à l'aide des racines.

remarque 2 : si on repère à la fois -1 et 2 comme racines évidente, on peut diviser directement par $(X + 1)(X - 2)$ et gagner du temps.

(g) $3X^5 + 9$

Ici il n'y a aucune racine "évidente". La seule solution est de se ramener à un exercice de recherche de racines 5èmes : $3X^5 + 9 = 0$ équivaut à $X^5 = -3$.

On met -3 sous forme exponentielle $-3 = 3e^{i\pi}$, donc les racines 5èmes sont les $\sqrt[5]{3}e^{i(\pi/5 + 2k\pi/5)}$ pour k entre -2 et 2 (on pourrait aussi prendre k entre 0 et 4 mais cela compliquerait un peu la suite).

Si on liste les valeurs obtenues on obtient : $\sqrt[5]{3}e^{-3i\pi/5}$, $\sqrt[5]{3}e^{-i\pi/5}$, $\sqrt[5]{3}e^{i\pi/5}$, $\sqrt[5]{3}e^{3i\pi/5}$, $\sqrt[5]{3}e^{5i\pi/5}$. Cette dernière racine vaut simplement $-\sqrt[5]{3}$, les autres sont non-réelles.

La factorisation sur \mathbb{C} est donc

$$3X^5 + 9 = 3(X + \sqrt[5]{3})(X - \sqrt[5]{3}e^{-3i\pi/5})(X - \sqrt[5]{3}e^{-i\pi/5})(X - \sqrt[5]{3}e^{i\pi/5})(X - \sqrt[5]{3}e^{3i\pi/5})$$

Pour en déduire la factorisation sur \mathbb{R} , on regroupe deux par deux, dans la factorisation complexe, les termes conjugués.

Ici donc, on va calculer d'une part $(X - \sqrt[5]{3}e^{-3i\pi/5})(X - \sqrt[5]{3}e^{3i\pi/5}) = X^2 - 2\sqrt[5]{3}(e^{-3i\pi/5} + e^{3i\pi/5})X + \sqrt[5]{3}^2 e^{-3i\pi/5} e^{3i\pi/5}$,
ce qui donne (formule d'Euler et formule $e^a e^{-a} = 1$) le polynôme $X^2 - 4\sqrt[5]{3} \cos(3\pi/5)X + \sqrt[5]{3}^2$.

et d'autre part, de même : $(X - \sqrt[5]{3}e^{-i\pi/5})(X - \sqrt[5]{3}e^{i\pi/5}) = X^2 - 4\sqrt[5]{3} \cos(\pi/5)X + \sqrt[5]{3}^2$.

Finalement, la factorisation sur \mathbb{R} est

$$3X^5 + 9 = 3(X + \sqrt[5]{3})(X^2 - 4\sqrt[5]{3} \cos(\pi/5)X + \sqrt[5]{3}^2)(X^2 - 4\sqrt[5]{3} \cos(3\pi/5)X + \sqrt[5]{3}^2)$$

(h) $X^5 + X^4 - 16X - 16$

-1 est une racine évidente. On peut donc diviser le polynôme par $X + 1$, et le quotient obtenu est $X^4 - 16$. Mais $X^4 - 16$ a déjà été factorisé plus haut...

On obtient donc la factorisation sur \mathbb{C}

$$X^5 + X^4 - 16X - 16 = (X + 1)(X - 2)(X + 2)(X - 2i)(X + 2i)$$

et sur \mathbb{R} $X^5 + X^4 - 16X - 16 = (X + 1)(X - 2)(X + 2)(X^2 + 4)$

(i) $X^3 - X^2 + X - 1$

Ici 1 est racine évidente, et le quotient de la division par $X - 1$ donc $X^2 + 1$.

Ainsi on obtient la factorisation sur \mathbb{C} $X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X - i)(X + i)$

et sur \mathbb{R} $X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + 1)$

exercices pratiques

1. TPs « circuits RC » (électricité S1) et « filtrage » (électronique S2)

On considère un circuit composé d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C , montés de sorte que la fonction de transfert du circuit soit

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- (a) calculer le module $|\underline{H}|$ et le gain en décibels $G_{dB} = 20 \log_{10} |\underline{H}|$
- (b) calculer l'argument de \underline{H}
- (c) calculer la valeur de ces fonctions pour la pulsation de coupure $\omega_c = 1/RC$
- (d) déterminer les limites de ces fonctions quand ω tend vers 0^+
- (e) déterminer les limites de ces fonctions quand ω tend vers l'infini