

## exercices théoriques

1. Donner la forme algébrique, le module et l'argument des nombres :

$$a = \sqrt{3} + i; \quad b = (1 - i)(1 + \sqrt{3}i); \quad c = \frac{1+i}{2-i}; \quad d = -1 - 3i;$$

$$e = 3 - i; \quad f = \frac{3}{1-i}; \quad g = (1 - \sqrt{3}i)^{2016}; \quad h = \frac{-2+4i}{1+3i}.$$

corrigé succinct :

$$a = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}};$$

le module de  $a$  est 2, son argument est  $\frac{\pi}{6}$ .

Pour  $b$ , en développant on trouve  $b = 1 + \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i$ . Pour déterminer sa

forme trigonométrique, il est plus simple de calculer séparément celle de  $1 - i$  et celle de  $1 + \sqrt{3}i$  avant de multiplier les modules et d'additionner les arguments pour obtenir ceux de

$$b : 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ et } 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \text{ donc } b = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Pour  $c$  on obtient la forme algébrique (cartésienne) avec la méthode de la quantité conjuguée : on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué  $2 + i$  du dénominateur

$$2 - i : c = \frac{(2 + i)(1 + i)}{(2 + i)(2 - i)}, \text{ d'où } c = \frac{1 + 3i}{5}.$$

On trouve alors directement son module  $\sqrt{10}/5$  et son argument  $\arctan(3)$  : la forme

$$\text{exponentielle est donc } c = \frac{\sqrt{10}}{5}e^{i \arctan(3)}.$$

Enfin on trouve directement  $d = \sqrt{10}e^{i(\arctan(\frac{-3}{1})+\pi)} = -\sqrt{10}e^{i(\arctan(3))}.$

Pour  $e$ , le module est  $\sqrt{10}$  et l'argument  $\arctan(-1/3)$ .

Pour  $f$ , le module est  $3/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}/2$  et l'argument est  $\pi/4$ .

Pour  $g$ , le module est  $2^{2016}$  et l'argument est  $-2016\pi/3$ .

Pour  $h$ , le module est  $\sqrt{2}$  et l'argument  $\pi - \arctan(2) - \arctan(3)$  (si on le calcule comme différence des arguments) ou  $\arctan(1)$  (si on met d'abord  $h$  sous sa forme algébrique  $1 + i$ ). Ce qui fournit au passage la relation  $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$ .

2. Calculer  $\sin 5\theta$  en fonction de  $\sin \theta$ .

corrigé succinct : On utilise la formule de Moivre :

$$\sin 5\theta = \operatorname{im}(\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \operatorname{im}(\cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta - 10i \cos^2 \theta \sin^3 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta + i \sin^5 \theta) = 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta. \text{ Il ne reste plus qu'à utiliser les relations } \cos^4 \theta = (1 - \sin^2 \theta)^2 = \sin^4 \theta - 2 \sin^2 \theta + 1 \text{ et } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ pour trouver, après simplification :}$$

$$\sin 5\theta = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta.$$

3. Linéariser : (a)  $\sin^2 \theta$  (b)  $\cos^4 \theta$  (c)  $\sin^3 \theta \cos^2 \theta$

corrigé succinct : on utilise les formules d'Euler...

$$(a) \sin^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}), \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta).$$

(b) De même en développant  $\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4$ , on trouve

$$\cos^4 \theta = \frac{\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3}{8}.$$

(c) De même,  $\sin^3 \theta \cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2$ , donc

$$\sin^3 \theta \cos^2 \theta = \frac{-\sin 5\theta + \sin 3\theta + 2 \sin \theta}{16}.$$

4. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  les équations :

$$(a) x^2 + 3 = 0 \quad (b) x^2 + x + 1 = 0 \quad (c) x^3 = 1$$

corrigé succinct : On utilise les formules avec le discriminant :

(a) ici le discriminant est inutile :  $x^2 = -3$  a deux solutions non réelles conjuguées,  $+\sqrt{3}i$  et  $-\sqrt{3}i$

(b) le discriminant vaut  $-3$ , donc les racines non réelles conjuguées sont  $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(c) on cherche les solutions sous la forme  $x = re^{i\theta}$ . On a donc  $x^3 = r^3 e^{3i\theta} = 1$  donc en identifiant module et argument :  $r^3 = 1$  et  $3\theta = 2\pi + 2k\pi$ , soit  $r = 1$  et  $\theta = 2\pi/3 + 2k\pi/3$ , ce qui donne les trois solutions  $e^{i0/3}$ ,  $e^{2i\pi/3}$  et  $e^{4i\pi/3}$  soit

$$1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ et } \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

5. \* On considère pour  $x \in ]-\pi/2, +\pi/2[$   $f(x) = \frac{1 + i \tan x}{1 - i \tan x}$ .

Donner les parties réelle et imaginaire, le module, l'argument de  $f(x)$ .  
En déduire l'expression de  $\cos(2x)$  en fonction de  $\tan x$ .

corrige succinct :  $f(x) = \frac{(1 + i \tan x)^2}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \tan^2 x + 2i \tan x}{1 + \tan^2 x}$ , donc  
 $\operatorname{re}(f(x)) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$  et  $\operatorname{im}(f(x)) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ .  
 $|f(x)| = \frac{(1 - \tan^2 x)^2 + (2 \tan x)^2}{(1 + \tan^2 x)^2} = \frac{1 + \tan^4 x + 2 \tan^2 x}{(1 + \tan^2 x)^2} = 1$ .

Mais on voit aussi, en multipliant numérateur et dénominateur par  $\cos x$ , que  
 $f(x) = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x : \arg(f(x)) = 2x$ , et donc  
 $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$  et de plus en comparant les deux expressions de  $f(x)$ ,

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

6. Effectuer la division selon les puissances décroissantes de :

(a)  $X^4 - X^3 + 3X^2 + 1$  par  $X^2 + 3X + 1$

(b)  $X^5 + 2X^3 - 3X - 2$  par  $X^3 + X + 1$

(c)  $6X^5 - 7X^4 + 1$  par  $(X - 1)^2$

corrige succinct :

(a) On pose la division :

$X^4$	$-$	$X^3$	$+$	$3X^2$	$+$	$1$	$ $	$X^2$	$+$	$3X$	$+$	$1$
$X^4$	$+$	$3X^3$	$+$	$X^2$	$+$	$1$	$ $	$X^2$	$-$	$4X$	$+$	$14$
	$-$	$4X^3$	$+$	$2X^2$	$+$	$1$	$ $					
	$-$	$4X^3$	$-$	$12X^2$	$-$	$4X$	$ $					
				$14X^2$	$+$	$4X$	$+$	$1$				
				$14X^2$	$+$	$42X$	$+$	$14$				
					$-$	$38X$	$-$	$13$				

donc  $X^4 - X^3 + 3X^2 + 1 = (X^2 + 3X + 1)(X^2 - 4X + 14) - 38X - 13$ .

(b) De même on trouve  $X^5 + 2X^3 - 3X - 2 = (X^3 + X + 1)(X^2 + 1) - X^2 - 4X - 3$ .

(c) De même  $6X^5 - 7X^4 + 1 = (X^2 - 2X + 1)(6X^3 + 5X^2 + 4X + 3) + 2X - 2$ .

7. Factoriser sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{R}$  les polynômes :

(a)  $X^2 + 2X - 3$     (b)  $X^4 + 2X^2 - 3$     (c)  $X^3 - X^2 + 2X - 2$

(d)  $2X^4 + 2$     (e)  $X^4 - 2X^3 + X - 2$     (f)  $2X^3 - 3X^2 - 3X + 2$

corrige succinct : (a) Le discriminant de ce polynôme du second degré est 16, et ses racines

sont -3 et 1. Ainsi,  $X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$ .

(b) On utilise le résultat précédent  $X^4 + 2X^2 - 3 = (X^2 - 1)(X^2 + 3)$ . Il reste à factoriser chacun de ces deux facteurs.

On a  $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ , et  $X^2 + 3$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$ , et vaut  $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i)$  sur  $\mathbb{C}$ .

Ainsi, sur  $\mathbb{R}$ ,  $X^4 + 2X^2 - 3 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 3)$ , et

sur  $\mathbb{C}$ ,  $X^4 + 2X^2 - 3 = (X - 1)(X + 1)(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i)$ .

(c) On commence par déterminer une racine "évidente", à chercher parmi les diviseurs du terme constant -2 : on teste donc 2, -2, 1, -1, pour constater que 1 est effectivement racine (et pas les trois autres nombres).

Alors on effectue la division de  $X^3 - X^2 + 2X - 2$  par  $X - 1$  (on sait à l'avance que le reste doit être nul) :  $X^3 - X^2 + 2X - 2 = (X - 1)(X^2 + 2)$ .  $X^2 + 2$  étant irréductible

sur  $\mathbb{R}$ , la décomposition est : sur  $\mathbb{R}$ ,  $X^3 - X^2 + 2X - 2 = (X - 1)(X^2 + 2)$ , et

sur  $\mathbb{C}$ ,  $X^3 - X^2 + 2X - 2 = (X - 1)(X + \sqrt{2}i)(X - \sqrt{2}i)$ .

(d) Il est plus simple de commencer par factoriser ce polynôme sur  $\mathbb{C}$ . Pour cela on doit trouver ses racines, ce qui revient à déterminer les racines quatrième de -1 : ce sont  $e^{i\pi/4}$ ,  $e^{3i\pi/4}$ ,  $e^{5i\pi/4}$ ,  $e^{7i\pi/4}$  et  $e^{-i\pi/4}$  (utiliser la méthode de résolution de  $X^3 = 1$  vue plus haut, en cherchant des solutions sous la forme  $re^{i\theta}$ ).

Ainsi, sur  $\mathbb{C}$ ,  $2X^4 + 2 = 2(X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})$

(attention à bien laisser un 2 en facteur devant !)

Pour obtenir la décomposition sur  $\mathbb{R}$ , on développe les deux produits correspondants aux racines conjuguées :

$(X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4}) = X^2 - 2\cos(\pi/4)X + 1 = X^2 - \sqrt{2}X + 1$  et  
 $(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4}) = X^2 - 2\cos(3\pi/4)X + 1 = X^2 + \sqrt{2}X + 1$ . Ainsi,

sur  $\mathbb{R}$ ,  $X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$ .

(e) On trouve -1 et 2 comme "racines évidentes". On peut alors diviser le polynôme par  $(X + 1)(X - 2) = X^2 - X - 2$  et obtenir  $X^4 - 2X^3 + X - 2 = (X + 1)(X - 2)(X^2 - X + 1)$ .

Le polynôme  $X^2 - X + 1$  n'a pas de racines réelles : la factorisation sur  $\mathbb{R}$  est donc  $X^4 - 2X^3 + X - 2 = (X + 1)(X - 2)(X^2 - X + 1)$ .

Ses racines complexes (calculées à l'aide du discriminant) sont  $e^{i\pi/3}$  et  $e^{-i\pi/3}$ , donc la factorisation sur  $\mathbb{C}$  est  $X^4 - 2X^3 + X - 2 = (X + 1)(X - 2)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})$ .

(f) On commence par déterminer une "racine évidente" en cherchant parmi les diviseurs du terme constant 2. On constate que -1 est racine et 2 aussi : le polynôme est donc divisible par  $(X + 1)(X - 2) = X^2 - X - 2 : 2X^3 - 3X^2 - 3X + 2 = (X + 1)(X - 2)(2X - 1)$  soit encore  $2(X - 1/2)(X + 1)(X - 2)$ .

exercices pratiques

1. TPs « circuits RC » (électricité S1) et « filtrage » (électronique S2)

On considère un circuit composé d'une résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$ , montés de sorte que la fonction de transfert du

circuit soit  $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ .

- (a) calculer le module  $|\underline{H}|$  et le gain en décibels  $G_{dB} = 20 \log_{10} |\underline{H}|$
- (b) calculer l'argument de  $\underline{H}$
- (c) calculer la valeur de ces fonctions pour la pulsation de coupure  $\omega_c = 1/RC$
- (d) déterminer les limites de ces fonctions quand  $\omega$  tend vers  $0^+$
- (e) déterminer les limites de ces fonctions quand  $\omega$  tend vers l'infini