TD 3 : Nombres complexes et polynômes - corrigé

exercices théoriques

1. Donner la forme algébrique et le module des nombres complexes :
$a = (3-2i)(1+4i)$; $b = i(1+i)$; $c = (2-3i)(2+3i)$
$d = \dfrac{1}{2+i}$; $e = \dfrac{1-i}{2+i}$; $f = (1+2i)^2$

2. Donner la forme algébrique, le module et l'argument des nombres :
$a = R + jL\omega$; $b = (1-i)(1+\sqrt{3}i)$; $c = \frac{1+i}{2-i}$; (*) $d = \frac{e^{1+2i}-1}{1+2i}$;
$e = \frac{U}{1+jRC\omega}$(U>0); $f = (1-\sqrt{3}i)^{2021}$; (*) $g = \dfrac{1}{1-xe^{i\theta}}$ si $x \in]-1,1[$.

corrigé succinct :

$\boxed{\text{le module de } a \text{ est } \sqrt{R^2+(L\omega)^2}, \text{ son argument est } \arctan(L\omega/R).}$

Pour b, en développant on trouve $\boxed{b = 1+\sqrt{3}+(-1+\sqrt{3})i.}$ Pour déterminer sa forme trigonométrique, il est plus simple de calculer séparément celle de $1-i$ et celle de $1+\sqrt{3}i$ avant de multiplier les modules et d'additionner les arguments pour obtenir ceux de b :
$1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $\boxed{b = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.}$

Pour c on obtient la forme algébrique (cartésienne) avec la méthode de la quantité conjuguée : on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $2+i$ du dénominateur $2-i$:
$c = \dfrac{(2+i)(1+i)}{(2+i)(2-i)}$, d'où $\boxed{c = \dfrac{1+3i}{5}.}$

On trouve alors directement son module $\sqrt{10}/5$ et son argument $\arctan(3)$: la forme exponentielle est donc $\boxed{c = \dfrac{\sqrt{10}}{5}e^{i\arctan(3)}.}$

Pour d on écrit le numérateur sous sa forme algébrique $(e\cos(2)-1)+ie\sin(2)$, puis on obtient la forme algébrique de la fraction avec la méthode de la quantité conjuguée (on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $1-2i$ du dénominateur) :

$$\boxed{d = \frac{e\cos(2)-1+2e\sin(2)+i(-2e\cos(2)+2+e\sin(2))}{5}.}$$

Pour trouver la forme exponentielle il est préférable de revenir à la forme de l'énoncé : le module vaut $\boxed{|d| = \dfrac{\sqrt{(e\cos(2)-1)^2+(e\sin(2))^2}}{\sqrt{5}}}$ et l'argument est la différence entre l'argument du numérateur et celui du dénominateur, soit

$$\boxed{\arg(d) = \arctan(e\sin(2)/(e\cos(2)-1))+\pi-\arctan(2).}$$

Pour e, le module vaut $\boxed{U/\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ et l'argument vaut $\arg(U)-\arg(1+jRC\omega) = 0-\arctan(RC\omega)$ soit $\boxed{-\arctan(RC\omega).}$

La forme algébrique est $\boxed{e = U\dfrac{1-jRC\omega}{1+(RC\omega)^2}.}$

Le module de f est 2^{2021} et l'argument de g est $-2021\pi/3$ soit encore $-(336*6+5)\pi/3 = -5\pi/3 = \pi/3$. On peut donc écrire la forme algébrique à partir de la forme trigonométrique $\boxed{f = 2^{2021}(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)) = 2^{2021}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}).}$

Pour g en multipliant par le conjugué du dénominateur, c'est-à-dire par $1-xe^{-i\theta} = 1-x\cos(\theta)+ix\sin(\theta)$, on trouve $\boxed{g = \dfrac{1-x\cos\theta+ix\sin\theta}{1+x^2-2x\cos\theta}.}$

3. Calculer $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

corrigé succinct : On utilise la formule de Moivre :
$\sin 5\theta = \text{im}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \text{im}(\cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$. Il ne reste plus qu'à utiliser les relations $\cos^4\theta = (1-\sin^2\theta)^2 = \sin^4\theta - 2\sin^2\theta + 1$ et $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ pour trouver, après simplification :

$$\boxed{\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta.}$$

4. Linéariser : (a) $\sin^2\theta$ (b) $\cos^4\theta$ (c) $\sin^3\theta\ \cos^2\theta$

corrigé succinct : on utilise les formules d'Euler...

(a) $\sin^2\theta = (\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})^2 = -\dfrac{1}{4}(e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta})$, $\boxed{\sin^2\theta = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta).}$

(b) De même en développant $\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4$, on trouve $\boxed{\cos^4\theta = \dfrac{\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3}{8}.}$

(c) De même, $\sin^3\theta\ \cos^2\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$, donc

$$\boxed{\sin^3\theta\ \cos^2\theta = \frac{-\sin 5\theta + \sin 3\theta + 2\sin\theta}{16}.}$$

5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les équations :
   (a) $x^2+3=0$ (b) $x^2+x+1=0$ (c) $2x^2+3x+5=0$
   (d) $x^2-x+2=0$ (e) $-3x^2+2x-1=0$ (f) $x^3=1$

corrigé succinct : On utilise les formules avec le discriminant :

(a) ici le discriminant est inutile : $x^2=-3$ a deux solutions non réelles conjuguées, $+\sqrt{3}i$ et $-\sqrt{3}i$

(b) le discriminant vaut -3, donc les racines non réelles conjuguées sont $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(f) on cherche les solutions sous la forme $x=re^{i\theta}$. On a donc $x^3=r^3e^{3i\theta}=1$ donc en identifiant module et argument : $r^3=1$ et $3\theta=2\pi+2k\pi$, soit $r=1$ et $\theta=2\pi/3+2k\pi/3$, ce qui donne les trois solutions $e^{i0/3}$, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$ soit $\boxed{1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ et } \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}.}$

6. * On considère pour $x\in]-\pi/2,+\pi/2[$ $f(x)=\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$.
   Donner les parties réelle et imaginaire, le module, l'argument de $f(x)$.
   En déduire l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\tan x$.

corrigé succinct : $f(x)=\dfrac{(1+i\tan x)^2}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1-\tan^2 x+2i\tan x}{1+\tan^2 x}$, donc $\mathrm{re}\,(f(x))=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et $\mathrm{im}\,(f(x))=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$. $|f(x)|=\dfrac{(1-\tan^2 x)^2+(2\tan x)^2}{(1+\tan^2 x)^2}=\dfrac{1+\tan^4 x+2\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)^2}=1.$

Mais on voit aussi, en multipliant numérateur et dénominateur par $\cos x$, que $f(x)=\dfrac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}=\dfrac{e^{ix}}{e^{-ix}}=e^{2ix}=\cos 2x+i\sin 2x$: $\arg(f(x))=2x$, et donc $\cos 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et de plus en comparant les deux expressions de $f(x)$, $\sin 2x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

7. Effectuer la division selon les puissances décroissantes de :
   (a) $X^4-X^3+3X^2+1$ par X^2+3X+1
   (b) X^5+2X^3-3X-2 par X^3+X+1
   (c) $6X^5-7X^4+1$ par $(X-1)^2$

corrigé succinct :

(a) On pose la division :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -X^3 & +3X^2 & & +1 & X^2+3X+1 \\
X^4 & +3X^3 & +X^2 & & & \overline{X^2-4X+14} \\ \hline
 & -4X^3 & +2X^2 & & +1 & \\
 & -4X^3 & -12X^2 & -4X & & \\ \hline
 & & 14X^2 & +4X & +1 & \\
 & & 14X^2 & +42X & +14 & \\ \hline
 & & & -38X & -13 &
\end{array}$$

donc $\boxed{X^4-X^3+3X^2+1=(X^2+3X+1)(X^2-4X+14)-38X-13.}$

(b) De même on pose la division :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^5 & +2X^3 & & -3X & -2 & X^3+X+1 \\
X^5 & +X^3 & +X^2 & & & \overline{X^2+1} \\ \hline
 & X^3 & -X^2 & -3X & -2 & \\
 & X^3 & & +X & +1 & \\ \hline
 & & -X^2 & -4X & -3 &
\end{array}$$

donc

on trouve $\boxed{X^5+2X^3-3X-2=(X^3+X+1)(X^2+1)-X^2-4X-3.}$

(c) Pour effectuer la division il faut commencer par développer le diviseur : $(X-1)^2=X^2-2X+1$. On procède alors de même et on obtient la relation

$$\boxed{6X^5-7X^4+1=(X^2-2X+1)(6X^3+5X^2+4X+3)+2X-2.}$$

8. Factoriser sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ les polynômes :
   (a) $3X^2+6X-15$ (b) $3X^4+6X^2-15$ (c) $3X^3-3X^2+6X-6$
   (d) X^4-16 (e) X^4+2X^3-X-2 (f) $2X^3-3X^2-3X+2$
   (g) $X^5+X^4-16X-16$ (h) X^3-X^2+X-1

corrigé succinct :

(a) $3X^2+6X-15$:

Pour factoriser un polynôme **de degré 2** il suffit de déterminer ses racines (et considérer son coefficient dominant) : s'il a des racines il peut alors s'écrire $a(X-r_1)(X-r_2)$, s'il n'a pas de racines (sur $\mathbb{R}$) il est irréductible.

Ici, le discriminant vaut 216, donc le polynôme est à racines réelles et elles valent $(-6+\sqrt{216})/6=-1+\sqrt{6}$ et $(-6-\sqrt{216})/6=-1-\sqrt{6}$.

Le polynôme est alors divisible par $X-(-1+\sqrt{6})$ et par $X-(-1-\sqrt{6})$.

Comme de plus le coefficient dominant est 3, on peut écrire sa factorisation, sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{3X^2+6X-15=3(X-(-1+\sqrt{6}))(X-(-1-\sqrt{6}))}$$

(remarque : il est préférable de laisser les parenthèses dans cette expression pour bien faire apparaître les $X-a$ où a est une racine)

(b) $3X^4+6X^2-15$

Ici on peut rechercher les racines en remarquant qu'il n'a que des puissances paires de X, on peut donc poser $Y=X^2$. Le polynôme vaut alors $3Y^2+6Y-15$, et on reconnaît le polynôme étudié à la question précédente.

On peut donc utiliser la factorisation précédente :
$3X^4+6X^2-15=3(X^2-(-1+\sqrt{6}))(X^2-(-1-\sqrt{6}))$.

Peut-on aller plus loin ? Il faut essayer de factoriser séparément chacun des deux polynômes apparus. Ont-ils des racines réelles ?

Oui pour le premier, on peut donc le factoriser sous la forme :
$X^2-(-1+\sqrt{6})=(X-\sqrt{-1+\sqrt{6}})(X+\sqrt{-1+\sqrt{6}})$ sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$.

Non pour le second : sur $\mathbb{R}$ il est irréductible, et donc le polynôme $3X^4+6X^2-15$ a pour factorisation réelle :

$$\boxed{3X^4+6X^2-15=3(X-\sqrt{-1+\sqrt{6}})(X+\sqrt{-1+\sqrt{6}})(X^2-(-1-\sqrt{6}))\text{ sur }\mathbb{R}}$$

En revanche, sur $\mathbb{C}$, $X^2-(-1-\sqrt{6})$ a pour racines $i\sqrt{1+\sqrt{6}}$ et $-i\sqrt{1+\sqrt{6}}$. Et on peut donc écrire : $X^2-(-1-\sqrt{6})=(X-i\sqrt{1+\sqrt{6}})(X+i\sqrt{1+\sqrt{6}})$.

Finalement sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{3X^4+6X^2-15=3(X-\sqrt{-1+\sqrt{6}})(X+\sqrt{-1+\sqrt{6}})(X-i\sqrt{1+\sqrt{6}})(X+i\sqrt{1+\sqrt{6}})}.$$

(c) $3X^3-3X^2+6X-6$:

Quand le polynôme à factoriser est de degré 3 ou plus, qu'il n'y a pas d'astuce comme celle de l'équation bicarrée du b), la méthode générale consistera à chercher une ou plusieurs racines "évidente", parmi les diviseurs du terme constant. On peut donc essayer successivement les diviseurs de 6 : 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6...jusqu'à trouver une racine.

Ici on a de la chance, car on voit tout de suite que 1 est racine : $3.1^3-3.1^2+6-6=0$.

On pose alors la division de $3X^3-3X^2+6X-6$ par $X-1$: on sait qu'elle tombera juste, le reste sera nul. On trouve : $3X^3-3X^2+6X-6=(X-1)(3X^2+6)$. Il reste à factoriser $3X^2+6$: il s'agit d'un polynôme de degré 2, sans racine réelle...il est donc irréductible sur $\mathbb{R}$, et donc :

sur $\mathbb{R}$, $\boxed{3X^3-3X^2+6X-6=(X-1)(3X^2+6)}$, on peut quand même sortir le coefficient 3 : $\boxed{3X^3-3X^2+6X-6=3(X-1)(X^2+2)}$.

Sur $\mathbb{C}$, $3X^2+6$ a pour racines $\pm i\sqrt{2}$, et donc on peut factoriser $3X^2+6=3(X-i\sqrt{2})(X+i\sqrt{2})$.

Et donc finalement, sur $\mathbb{C}$, $\boxed{3X^3-3X^2+6X-6=3(X-1)(X-i\sqrt{2})(X+i\sqrt{2})}$.

(d) X^4-16

Ici on pourrait chercher des racines "évidentes" (on trouverait 2, -2...), mais il sera plus rapide de remarquer que les racines de ce polynôme sont les racines 4èmes de 16.

Pour les déterminer on peut écrire $16=16e^{i0}$ et juste utiliser la formule de cours : les racines sont les $2e^{0/4+2ik\pi/4}$ soit : $2e^0$, $2e^{i\pi/2}$, $2e^{i\pi}$ et $2e^{3i\pi/2}$, soit $2,-2,2i,-2i$.

On obtient ainsi directement la factorisation sur $\mathbb{C}$

$$\boxed{X^4-16=(X-2)(X+2)(X-2i)(X+2i)}.$$

Pour en déduire la factorisation sur $\mathbb{R}$ il suffit de garder les facteurs réels, et de multiplier entre eux les facteurs non réels conjugués :

Sur $\mathbb{R}$ $\boxed{X^4-16=(X-2)(X+2)(X^2+4)}$.

(e) X^4+2X^3-X-2

On cherche des racines "évidentes"...et on en trouve deux : 1 et -2. On peut du coup diviser d'un coup par le produit $(X-1)(X-(-2))=X^2+X-2$, le quotient vaut X^2+X+1 et le reste est bien sûr nul (si ce n'était pas le cas, ce serait le signe que l'on a fait une erreur : sur les racines "évidentes" ou dans la division elle-même).

On obtient donc la factorisation $X^4+2X^3-X-2=(X-1)(X+2)(X^2+X+1)$.

Le polynôme X^2+X+1 de discriminant strictement négatif n'a pas de racine réelle.

Donc la factorisation est terminée sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{X^4+2X^3-X-2=(X-1)(X+2)(X^2+X+1)}.$$

Sur $\mathbb{C}$ on obtient les racines $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ et donc la factorisation :

sur $\mathbb{C}$: $\boxed{X^4+2X^3-X-2=(X-1)(X+2)(X-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(X-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})}$.

remarque : si l'on ne voit qu'une seule des deux racines évidentes, $r=1$ ou $r=-2$, on peut commencer par diviser par $X-r$, obtenir un quotient de degré 3, et recommencer : il aura l'autre racine comme racine évidente...c'est plus long mais correct.

(f) $2X^3-3X^2-3X+2$

Ici on trouve pour racine évidente -1.

La division du polynôme par $X+1$ donne pour quotient $2X^2-5X+2$, de discriminant $\Delta=25-16=9$. Les racines sont donc 2 et $1/2$.

Ainsi, sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$, $\boxed{2X^3-3X^2-3X+2=2(X+1)(X-1/2)(X-2)}$.

remarque 1 : attention au coefficient 2, présent dans le terme dominant $2X^3$ au début, à ne pas oublier dans la factorisation obtenue à l'aide des racines.

remarque 2 : si on repère à la fois -1 et 2 comme racines évidente, on peut diviser directement par $(X+1)(X-2)$ et gagner du temps.

(g) $X^5+X^4-16X-16$

-1 est une racine évidente. On peut donc diviser le polynôme par $X+1$, et le quotient obtenu est X^4-16. Mais X^4-16 a déjà été factorisé plus haut...

On obtient donc la factorisation sur $\mathbb{C}$ $\boxed{X^5+X^4-16X-16=(X+1)(X-2)(X+2)(X-2i)(X+2i)}$,

et sur $\mathbb{R}$ $\boxed{X^5+X^4-16X-16=(X+1)(X-2)(X+2)(X^2+4)}$.

(h) X^3-X^2+X-1

Ici 1 est racine évidente, et le quotient de la division par $X-1$ donc X^2+1.

Ainsi on obtient la factorisation sur $\mathbb{C}$ $\boxed{X^3-X^2+X-1=(X-1)(X-i)(X+i)}$,

et sur $\mathbb{R}$ $\boxed{X^3-X^2+X-1=(X-1)(X^2+1)}$.

exercices pratiques

1. **TPs « circuits RC » (électricité S1) et « filtrage » (électronique S2)**

   On considère un circuit composé d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C, montés de sorte que la fonction de transfert du circuit soit $\underline{H}(\omega)=\dfrac{1}{1+jRC\omega}$, où ω représente la pulsation du signal d'entrée.

   (a) calculer le module $|\underline{H}|$ et le gain en décibels $G_{\text{dB}}=20\log_{10}|\underline{H}|$

   (b) calculer l'argument de $\underline{H}$

   (c) calculer la valeur de ces fonctions pour la pulsation de coupure $\omega_c=1/RC$

   (d) déterminer les limites de ces fonctions quand ω tend vers 0^+ puis quand ω tend vers l'infini

   (e) quel est le lien entre la pulsation et la fréquence du signal d'entrée ? Déduire de la question précédente le type de filtre réalisé par ce circuit.

corrigé succinct :

1. ici on n'a aucune nécessité ni aucun intérêt à utiliser la forme algébrique.

   On peut directement écrire le module par quotient des modules $|\underline{H}|=\dfrac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$ est le gain est donc $G_{\text{dB}}=-10\log_{10}(1+R^2C^2\omega^2)$
2. Ici de même, on écrit l'argument comme différence des arguments : l'argument de $\underline{H}$ est $\arg(1)-\arg(1+jRC\omega)=0-\arctan(RC\omega)=-\arctan(RC\omega)$.
3. On trouve alors un gain qui vaut $-20\log_{10}(1+1)=-20\log_{10}(2)$ soit approximativement -3dB, et un argument $-\arctan(1)$ soit $-\pi/4$.
4. quand ω tend vers 0, le module tend vers 1, le gain vers 0, et l'argument vers 0.

   Quand ω tend vers $+\infty$, le module tend vers 0, le gain vers $-\infty$, et l'argument vers $-\pi/2$.
5. Le lien entre pulsation et fréquence est $\omega=2\pi f$.

   Ainsi, d'après la question précédente, en basse fréquence (quand $omega$ et donc f sont proches de 0) le filtre modifie peu le signal, en haute-fréquence (ω et f tendant vers l'infini) le signal est très atténué (module proche de 0) et déphasé (argument proche de $-\pi/2$) : il s'agit d'un filtre passe-bas.