

exercices théoriques

1. Calculer les dérivées partielles et les différentielles des fonctions :

- (a)  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$       (b)  $\theta(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$       (c)  $f(\lambda, a) = \frac{\lambda}{2a}$   
 (d)  $p(V, T) = nRT/V$       (e)  $P(U, I, \varphi) = UI \cos(\varphi)$

corrigé succinct :

(a) on calcule  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  et  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , la différentielle est donc  

$$dr = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy.$$

(b)  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ , donc  $d\theta = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$

(c)  $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{1}{2a}$  et  $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{-\lambda}{2a^2}$ , donc  $df = \frac{1}{2a}d\lambda - \frac{\lambda}{2a^2}da.$

(d)  $\frac{\partial p}{\partial V} = -nRT/V^2$  et  $\frac{\partial p}{\partial T} = nR/V$  donc  $dp = -nRTdV/V^2 + nRdT/V.$

(e)  $\frac{\partial P}{\partial U} = I \cos(\varphi)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial I} = U \cos(\varphi)$  et  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = -UI \sin(\varphi)$ , et donc  

$$dP = I \cos(\varphi)dU + U \cos(\varphi)dI - UI \sin(\varphi)d\varphi.$$

2. Montrer que, si  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , on a  $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 1/r.$

corrigé succinct :

les dérivées d'ordre 1 ont été calculées plus haut. On les redérive (il peut être intéressant d'écrire  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  sous la forme  $x(x^2 + y^2)^{-1/2}$ ...)

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = y^2(x^2 + y^2)^{-3/2} \text{ et } \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = x^2(x^2 + y^2)^{-3/2}, \text{ donc}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{-3/2} = (x^2 + y^2)^{-1/2} = r^{-1}.$$

3.(a) Si on pose pour  $x > 0$   $y = x^2$ , déterminer la différentielle  $dy$  en fonction de  $x$  et  $dx$ , puis exprimer  $dx$  en fonction de  $y$  et  $dy$ .

(b) Mêmes questions avec  $y = \tan x$  pour  $-\pi/2 < x < \pi/2$ .

corrigé succinct : ces calculs se ramènent à des calculs de dérivées :

(a) si  $y = x^2$ ,  $\frac{dy}{dx} = y'(x) = 2x$ , donc  $dy = 2xdx$ . Mais comme  $x > 0$ ,  $x = \sqrt{y}$  et donc

$dx = dy/2x$ , donc  $dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$ .

(b) De même  $dy = (1 + \tan^2 x)dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$ , et par conséquent  $dx = \frac{dy}{1 + y^2}$ .

4. Les formes différentielles suivantes sont-elles exactes ?

Si oui, déterminer une fonction dont elles sont la différentielle totale.

(a)  $\omega = 2xdx + 3ydy + zdz$       (b)  $\omega = (1 + y)dx + xdy$

(c)  $\omega = \frac{ydx + xdy}{1 + x^2y^2}$       (d)  $\Omega = uv^2e^w du + u^2ve^w dv + uv^2w dw$

(e)  $\omega = (y - x)dx + xdy$       (f)  $\omega = dx - xdy$

corrigé succinct : (a) les calculs de dérivées croisées donnent  $\frac{\partial(2x)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial(3y)}{\partial x}$ ,

$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 = \frac{\partial(3y)}{\partial z}$  et  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0 = \frac{\partial(2x)}{\partial z}$ . Ainsi, la forme est fermée, et comme elle est définie sur

l'espace tout entier (ensemble "sans trou") elle est exacte.

On cherche une fonction  $f(x, y, z)$  telle que  $\omega = df$  donc telle que la dérivée par rapport à  $x$  soit  $2x$ , la dérivée par rapport à  $y$  soit  $3y$  et la dérivée par rapport à  $z$  soit  $z$  : la fonction  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2/2 + z^2/2$  convient (et on peut rajouter à  $f$  n'importe quelle constante).

Si on ne "voit" pas la fonction  $f$  solution on peut chercher ainsi :  $f(x, y, z)$  doit être égal respectivement à  $x^2 + u(y, z)$  (si on primitive par rapport à  $x$ ),  $3y^2/2 + v(x, z)$  (si on primitive par rapport à  $y$ ) et  $z^2/2 + w(x, y)$  (si on primitive par rapport à  $z$ ). On cherche  $u, v, w$  telles que

les trois expressions de  $f$  coïncident : on peut prendre  $u(y, z) = 3y^2/2 + z^2/2$ ,  $v(x, z) = x^2 + z^2/2$ ,  $w(x, y) = x^2 + 3y^2/2$ , pour retrouver  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2/2 + z^2/2$ .

(b) ici  $\frac{\partial(1 + y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial x}{\partial x}$  donc la forme est fermée, et étant définie sur le plan tout entier (ensemble "sans trou") elle est exacte.

On voit alors que  $f(x, y) = x + xy$  est une primitive de  $\omega$ , c'est-à-dire que  $\omega = df$ .

(c)  $\frac{\partial x(1 + x^2y^2)^{-1}}{\partial x} = \frac{\partial x(1 + x^2y^2)^{-1}}{\partial y} = (1 + x^2y^2)^{-2}(1 - x^2y^2)$  donc la forme est fermée, donc exacte.

On constate que  $f(x, y) = \arctan(xy)$  convient.

(d) le critère des dérivées partielles croisées n'est pas vérifié : la forme n'est pas fermée, donc pas exacte...

(e) la forme est fermée et on peut prendre  $f(x, y) = xy - x^2/2$

(f) la forme n'est pas fermée donc pas exacte.

5. \* On considère trois variables liées par une relation du type  $f(x, y, z) = 0$ .

En considérant  $z$  comme fonction de  $x$  et  $y$ , calculer  $dz$ , et en déduire  $dy$  en fonction de  $dx$  et  $dz$ . Puis en considérant  $y$  comme fonction de  $x$  et  $z$ , exprimer  $dy$ .

En combinant ces deux expressions de  $dy$  montrer que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = 1 \text{ puis que } \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -1$$

corrigé succinct :

$$(a) \quad dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \text{ donc } dy = \frac{dz - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$$

$$(b) \quad dy = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_y dx$$

(c) En identifiant, dans les expressions obtenues aux deux questions précédentes, les coefficients devant  $dz$  on trouve la relation  $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$ , ce qui est la première relation demandée.

Les relations symétriques en permutant les rôles de  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont vérifiées de même.

En identifiant de même les coefficients devant  $dx$ , on trouve la relation  $-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$

$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_y$ , d'où le résultat en utilisant les relations précédemment montrées entre les paires de dérivées partielles inverses l'une de l'autre.

exercices pratiques

1. **Calcul d'erreur :** si l'on mesure à 1cm près 20cm pour rayon d'une boule, quel est le volume estimé? Quelles sont les imprécisions absolue et relative sur le volume?

corrigé succinct :

On sait que  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Les incertitudes sur  $R$  et  $V$  étant "petites", on les assimile aux différentielles  $dR$  et  $dV$ , que l'on peut relier par la formule  $dV = 4\pi R^2 dR$ .

Par conséquent, le volume estimé est  $V \simeq 33510 \text{ cm}^3 \simeq 33.5 \text{ l}$ , avec une incertitude de

$dV = 5027 \text{ cm}^3 \simeq 5 \text{ l}$ . L'incertitude relative sur la mesure du rayon est  $\frac{dR}{R} = 1/20 = 5\%$ ,

et l'incertitude relative sur la mesure du volume est par conséquent  $\frac{dV}{V} = 3\frac{dR}{R} = 15\%$ .

2. **Longueurs, surface, volume d'un pavé :** si la longueur de chacun des trois côtés d'un pavé augmente de 1%, de combien augmentent son volume et sa surface?

corrigé succinct : si les côtés sont  $x$ ,  $y$  et  $z$ , le volume est  $V(x, y, z) = xyz$  et la surface  $S(x, y, z) = 2(xy + yz + xz)$ .

Par conséquent,  $\frac{dV}{V} = \frac{yzdx + xzdy + xydz}{xyz} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$ . L'énoncé exprime que

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = 1\%, \text{ donc finalement l'accroissement relatif du volume est de } 3\%.$$

Par des calculs analogues on montre que l'accroissement relatif de la surface est de 2%.

3. (\*) **Gaz de van der Waals :** on considère l'équation d'état d'un gaz de van der Waals  $(p + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) = nk_B T$ .

(a) Exprimer  $p$  en fonction de  $V$  et  $T$ , puis  $\frac{\partial p}{\partial T}$  en fonction de  $V$  et  $T$ .

(b) De même déterminer une expression de  $\frac{\partial T}{\partial V}$  en fonction de  $p$  et  $V$ .

(c) Peut-on exprimer  $V$  en fonction de  $p$  et  $T$ ?

(d) En dérivant par rapport à  $p$  l'équation d'état, calculer  $\frac{\partial V}{\partial p}$  en fonction de  $p$  et  $V$ .

(e) Que vaut le produit  $\frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial p}$ ?

4. **Chaleur et entropie**

les variables d'état  $p, V, T$  d'un quantité de gaz parfait sont liées par l'équation  $pV = nRT$ .

(a) Montrer que  $\delta Q_{\text{rev}} = C_v(T) dT + p dV$  n'est pas une forme différentielle exacte.

( $C_v(T)$  est une fonction ne dépendant que de  $T$ )

(b) Montrer que  $\delta Q_{\text{rev}}/T$  est une différentielle exacte.

a) La forme  $\delta Q_{\text{rev}}$  n'est pas fermée car  $\frac{\partial c_v(T)}{\partial p} = 0$  alors que  $\frac{\partial p}{\partial T} = nR/V$ . Elle n'est donc pas exacte.

corrigé succinct :

b) Ici les deux dérivées partielles sont nulles donc la forme est fermée. Étant défini sur un quart de plan ( $T > 0, p > 0$ ) qui est "sans trou", elle est exacte et admet donc une primitive : il existe une fonction  $S(T, p)$  telle que  $dS = \delta Q_{\text{rev}}/T$ .  $S$  est l'entropie.