exercices théoriques

1. Calculer les dérivées partielles et les différentielles des fonctions :
   (a) $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (b) $\theta(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$ (c) $f(\lambda, a) = \frac{\lambda}{2a}$
   (d) $p(V,T) = nRT/V$ (e) $P(U,I,\varphi) = UI\cos(\varphi)$

corrigé succint :

(a) on calcule $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, la différentielle est donc $\mathrm{d}r = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$.

(b) $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, donc $\mathrm{d}\theta = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = \dfrac{1}{2a}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial a} = \dfrac{-\lambda}{2a^2}$, donc $\mathrm{d}f = \dfrac{1}{2a}\mathrm{d}\lambda - \dfrac{\lambda}{2a^2}\mathrm{d}a$.

(d) $\dfrac{\partial p}{\partial V} = -nRT/V^2$ et $\dfrac{\partial p}{\partial T} = nR/V$ donc $\mathrm{d}p = -nRT\mathrm{d}V/V^2 + nR\mathrm{d}T/V$.

(e) $\dfrac{\partial P}{\partial U} = I\cos(\varphi)$, $\dfrac{\partial P}{\partial I} = U\cos(\varphi)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = -UI\sin(\varphi)$, et donc $\mathrm{d}P = I\cos(\varphi)\mathrm{d}U + U\cos(\varphi)\mathrm{d}I - UI\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

2. Montrer que, si $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, on a $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 1/r$.

corrigé succint :

les dérivées d'ordre 1 ont été calculées plus haut. On les redérive (il peut être intéressant d'écrire $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sous la forme $x(x^2+y^2)^{-1/2}$...)

$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = y^2(x^2+y^2)^{-3/2}$ et $\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = x^2(x^2+y^2)^{-3/2}$, donc

$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = (x^2+y^2)(x^2+y^2)^{-3/2} = (x^2+y^2)^{-1/2} = r^{-1}$.

3. (a) Si on pose pour $x > 0$ $y = x^2$, déterminer la différentielle dy en fonction de x et dx, puis exprimer dx en fonction de y et dy.
   (b) Mêmes questions avec $y = \tan x$ pour $-\pi/2 < x < \pi/2$.

corrigé succinct : ces calculs se ramènent à des calculs de dérivées :

(a) si $y = x^2$, $\dfrac{dy}{dx} = y'(x) = 2x$, donc $\boxed{dy = 2xdx.}$ Mais comme $x > 0$, $x = \sqrt{y}$ et donc $dx = dy/2x$, donc $\boxed{dx = \dfrac{dy}{2\sqrt{y}}.}$

(b) De même $\boxed{dy = (1+\tan^2 x)dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x},}$ et par conséquent $\boxed{dx = \dfrac{dy}{1+y^2}.}$

4. **approximation d'ordre 1 de la fonction sinus :** on s'intéresse à l'approximation du sinus par sa tangente en 0, autrement dit à l'approximation de $\sin(x)$ par x.
   (a) Déterminer l'équation de la tangente en 0 à la courbe $y = \sin(x)$. Représenter avec soin sur un même graphe la fonction sinus et sa tangente en 0 (si $x \in [-\pi;\pi]$). Que remarque-t-on si x est proche de 0 ?
   (b) On considère sur $[0;\pi/2]$ les fonctions $f(x) = \sin(x) - x$ et $g(x) = \sin(x) - x + x^3/6$.
      i. Quel est le signe de f' ? Que vaut $f(0)$? En déduire le signe de f.
      ii. Calculer g' et g''. Quel est le signe de g'' ? En déduire le signe de g' puis celui de g.
      iii. Déduire de ce qui précède que pour tout x entre 0 et $\pi/2$,
      $$-x^3/6 \leq \sin(x) - x \leq 0.$$
      iv. Pour chacun des angles 1°, 5°, 10°, 15°, 20°, 30° : après conversion en radians, calculer numériquement la valeur absolue de l'erreur commise, puis de l'erreur relative commise, en approchant le sinus de l'angle par sa valeur en radian.
      v. Dans le cas général, en utilisant la relation du iii, montrer que l'erreur commise est inférieure à 10% de la valeur de l'angle, pour tous les angles inférieurs à 40°.

corrigé succinct :

(a)

5. (*) On considère trois variables liées par une relation $f(x, y, z) = 0$. En considérant z comme fonction de x et y, calculer $\mathrm{d}z$, et en déduire $\mathrm{d}y$ en fonction de $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}z$. Puis en considérant y comme fonction de x et z, exprimer $\mathrm{d}y$.

En combinant ces deux expressions de $\mathrm{d}y$ montrer que $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = 1$ puis que $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -1$

corrigé succint :

(a) $\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$ donc $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}z - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$.

(b) $\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x$.

(c) En identifiant, dans les expressions obtenues aux deux questions précédentes, les coefficients devant $\mathrm{d}z$ on trouve la relation $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \dfrac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$, ce qui est la première relation demandée.
Les relations symétriques en permutant les rôles de x, y et z sont vérifiées de même.
En identifiant de même les coefficients devant $\mathrm{d}x$, on trouve la relation $\dfrac{-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_y$, d'où le résultat en utilisant les relations précédemment montrées entre les paires de dérivées partielles inverses l'une de l'autre.

exercices pratiques

1. **Calcul d'erreur :** si l'on mesure à 1cm près 20cm pour rayon d'une boule, quel est le volume estimé ? Quelles sont les imprécisions absolue et relative sur le volume ?

corrigé succinct :

On sait que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Les incertitudes sur R et V étant "petites", on les assimile aux différentielles dR et dV, que l'on peut relier par la formule $dV = 4\pi R^2 dR$.

Par conséquent, le volume estimé est $\boxed{V \simeq 33510 \text{ cm}^3 \simeq 33.5 \text{ l},}$ avec une incertitude de $\boxed{dV = 5027 \text{ cm}^3 \simeq 5 \text{ l}.}$ L'incertitude relative sur la mesure du rayon est $\frac{dR}{R} = 1/20 = 5\%$, et l'incertitude relative sur la mesure du volume est par conséquent $\boxed{\frac{dV}{V} = 3\frac{dR}{R} = 15\%.}$

2. **Longueurs, surface, volume d'un pavé :** si la longueur de chacun des trois côtés d'un pavé augmente de 1%, de combien augmentent son volume et sa surface ?

corrigé succint : si les côtés sont x, y et z, le volume est $V(x, y, z) = xyz$ et la surface $S(x, y, z) = 2(xy + yz + xz)$.
Par conséquent, $\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z}{xyz} = \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mathrm{d}z}{z}$. L'énoncé exprime que $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z} = 1\%$, donc finalement l'accroissement relatif du volume est de 3%.
Par des calculs analogues on montre que l'accroissement relatif de la surface est de 2%.

3. (*) **Gaz de van der Waals :** on considère l'équation d'état d'un gaz de van der Waals $(p + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) = nk_B T$.

   (a) Exprimer p en fonction de V et T, puis $\frac{\partial p}{\partial T}$ en fonction de V et T.

   (b) De même déterminer une expression de $\frac{\partial T}{\partial V}$ en fonction de p et V.

   (c) Peut-on exprimer V en fonction de p et T ?

   (d) En dérivant par rapport à p l'équation d'état, calculer $\frac{\partial V}{\partial p}$ en fonction de p et V.

   (e) Que vaut le produit $\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial p}$?