exercices théoriques

1. Calculer les dérivées partielles et les différentielles des fonctions :
   (a) $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (b) $\theta(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ (c) $f(\lambda,a)=\frac{\lambda}{2a}$
   (d) $p(V,T)=nRT/V$ (e) $P(U,I,\varphi)=UI\cos(\varphi)$

corrigé succint :

(a) on calcule $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, la différentielle est donc $\mathrm{d}r=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$.

(b) $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, donc $\mathrm{d}\theta=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}=\dfrac{1}{2a}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial a}=\dfrac{-\lambda}{2a^2}$, donc $\mathrm{d}f=\dfrac{1}{2a}\mathrm{d}\lambda-\dfrac{\lambda}{2a^2}\mathrm{d}a$.

(d) $\dfrac{\partial p}{\partial V}=-nRT/V^2$ et $\dfrac{\partial p}{\partial T}=nR/V$ donc $\mathrm{d}p=-nRT\mathrm{d}V/V^2+nR\mathrm{d}T/V$.

(e) $\dfrac{\partial P}{\partial U}=I\cos(\varphi)$, $\dfrac{\partial P}{\partial I}=U\cos(\varphi)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial\theta}=-UI\sin(\varphi)$, et donc $\mathrm{d}P=I\cos(\varphi)\mathrm{d}U+U\cos(\varphi)\mathrm{d}I-UI\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

2. Montrer que, si $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, on a $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=1/r$.

corrigé succint :

les dérivées d'ordre 1 ont été calculées plus haut. On les redérive (il peut être intéressant d'écrire $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sous la forme $x(x^2+y^2)^{-1/2}$...)

$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}=y^2(x^2+y^2)^{-3/2}$ et $\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=x^2(x^2+y^2)^{-3/2}$, donc

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{-3/2}=(x^2+y^2)^{-1/2}=r^{-1}.$$

3. (a) Si on pose pour $x>0$ $y=x^2$, déterminer la différentielle dy en fonction de x et dx, puis exprimer dx en fonction de y et dy.
   (b) Mêmes questions avec $y=\tan x$ pour $-\pi/2<x<\pi/2$.

corrigé succinct : ces calculs se ramènent à des calculs de dérivées :

(a) si $y=x^2$, $\dfrac{dy}{dx}=y'(x)=2x$, donc $\boxed{dy=2xdx.}$ Mais comme $x>0$, $x=\sqrt{y}$ et donc $dx=dy/2x$, donc $\boxed{dx=\dfrac{dy}{2\sqrt{y}}.}$

(b) De même $\boxed{dy=(1+\tan^2 x)dx=\dfrac{dx}{\cos^2 x},}$ et par conséquent $\boxed{dx=\dfrac{dy}{1+y^2}.}$

4. Les formes différentielles suivantes sont-elles exactes ?
   Si oui, déterminer une fonction dont elles sont la différentielle totale.
   (a) $\omega=2x\mathrm{d}x+3y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$ (b) $\omega=(1+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$
   (c) $\omega=\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}$ (d) $\Omega=uv^2e^w\mathrm{d}u+u^2ve^w\mathrm{d}v+uv^2w\mathrm{d}w$
   (e) $\omega=(y-x)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$ (f) $\omega=\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$

corrigé succint : (a) les calculs de dérivées croisées donnent $\dfrac{\partial(2x)}{\partial y}=0=\dfrac{\partial(3y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0=\dfrac{\partial(3y)}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0=\dfrac{\partial(2x)}{\partial z}$. Ainsi, la forme est fermée, et comme elle est définie sur l'espace tout entier (ensembe "sans trou") elle est exacte.

On cherche une fonction $f(x,y,z)$ telle que $\omega=\mathrm{d}f$ donc telle que la dérivée par rapport à x soit $2x$, la dérivée par rapport à y soit $3y$ et la dérivée par rapport à z soit z : la fonction $f(x,y,z)=x^2+3y^2/2+z^2/2$ convient (et on peut rajouter à f n'importe quelle constante).

Si on ne "voit" pas la fonction f solution on peut chercher ainsi : $f(x,y,z)$ doit être égal respectivement à $x^2+u(y,z)$ (si on primitive par rapport à x), $3y^2/2+v(x,z)$ (si on primitive par rapport à y) et $z^2/2+w(x,y)$ (si on primitive par rapport à z). On cherche u, v, w telles que les trois expressions de f coïncident : on peut prendre $u(y,z)=3y^2/2+z^2/2$, $v(x,z)=x^2+z^2/2$, $w(x,y)=x^2+3y^2/2$, pour retrouver $f(x,y,z)=x^2+3y^2/2+z^2/2$.

(b) ici $\dfrac{\partial(1+y)}{\partial y}=1=\dfrac{\partial x}{\partial x}$ donc la forme est fermée, et étant définie sur le plan tout entier (ensemble "sans trou") elle est exacte.

On voit alors que $f(x,y)=x+xy$ est une primitive de ω, c'est-à-dire que $\omega=\mathrm{d}f$.

(c) $\dfrac{\partial x(1+x^2y^2)^{-1}}{\partial x}=\dfrac{\partial x(1+x^2y^2)^{-1}}{\partial y}=(1+x^2y^2)^{-2}(1-x^2y^2)$ donc la forme est fermée, donc exacte.

On constate que $f(x,y) = \arctan(xy)$ convient.
(d) le critère des dérivées partielles croisées n'est pas vérifié : la forme n'est pas fermée, donc pas exacte...
(e) la forme est fermée et on peut prendre $f(x,y) = xy - x^2/2$
(f) la forme n'est pas fermée donc pas exacte.

5. * On considère trois variables liées par une relation du type $f(x,y,z) = 0$.
En considérant z comme fonction de x et y, calculer dz, et en déduire dy en fonction de dx et dz. Puis en considérant y comme fonction de x et z, exprimer dy.
En combinant ces deux expressions de dy montrer que
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = 1 \text{ puis que } \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -1$$

corrigé succint :

(a) $\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$ donc $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}z - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$.

(b) $\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x$.

(c) En identifiant, dans les expressions obtenues aux deux questions précédentes, les coefficients devant dz on trouve la relation $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \dfrac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$, ce qui est la première relation demandée.
Les relations symétriques en permutant les rôles de x, y et z sont vérifiées de même.
En identifiant de même les coefficients devant dx, on trouve la relation $\dfrac{-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_y$, d'où le résultat en utilisant les relations précédemment montrées entre les paires de dérivées partielles inverses l'une de l'autre.

exercices pratiques

1. **Calcul d'erreur :** si l'on mesure à 1cm près 20cm pour rayon d'une boule, quel est le volume estimé ? Quelles sont les imprécisions absolue et relative sur le volume ?

corrigé succinct :

On sait que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Les incertitudes sur R et V étant "petites", on les assimile aux différentielles dR et dV, que l'on peut relier par la formule $dV = 4\pi R^2 dR$.

Par conséquent, le volume estimé est $\boxed{V \simeq 33510 \text{ cm}^3 \simeq 33.5 \text{ l},}$ avec une incertitude de $\boxed{dV = 5027 \text{ cm}^3 \simeq 5 \text{ l}.}$ L'incertitude relative sur la mesure du rayon est $\frac{dR}{R} = 1/20 = 5\%$, et l'incertitude relative sur la mesure du volume est par conséquent $\boxed{\frac{dV}{V} = 3\frac{dR}{R} = 15\%.}$

2. **Longueurs, surface, volume d'un pavé :** si la longueur de chacun des trois côtés d'un pavé augmente de 1%, de combien augmentent son volume et sa surface ?

corrigé succint : si les côtés sont x, y et z, le volume est $V(x,y,z) = xyz$ et la surface $S(x,y,z) = 2(xy + yz + xz)$.
Par conséquent, $\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z}{xyz} = \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mathrm{d}z}{z}$. L'énoncé exprime que $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z} = 1\%$, donc finalement l'accroissement relatif du volume est de 3%.
Par des calculs analogues on montre que l'accroissement relatif de la surface est de 2%.

3. **Gaz de van der Waals :** on considère l'équation d'état d'un gaz de van der Waals $(p + \frac{n^2a}{V^2})(V - nb) = nk_BT$.
   (a) Exprimer p en fonction de V et T, puis $\frac{\partial p}{\partial T}$ en fonction de V et T.
   (b) De même déterminer une expression de $\frac{\partial T}{\partial V}$ en fonction de p et V.
   (c) Peut-on exprimer V en fonction de p et T ?
   (d) En dérivant par rapport à p l'équation d'état, calculer $\frac{\partial V}{\partial p}$ en fonction de p et V.
   (e) Que vaut le produit $\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial p}$?

4. **Chaleur et entropie**
les variables d'état p, V, T d'un quantité de gaz parfait sont liées par l'équation $pV = nRT$.

(a) Montrer que $\delta Q_{\text{rev}} = C_v(T)\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V$ n'est pas une forme différentielle exacte.
($C_v(T)$ est une fonction ne dépendant que de T)

(b) Montrer que $\delta Q_{\text{rev}}/T$ est une différentielle exacte.

corrigé succint :

a) La forme δQ_{rev} n'est pas fermée car $\dfrac{\partial c_v(T)}{\partial p} = 0$ alors que $\dfrac{\partial p}{\partial T} = nR/V$. Elle n'est donc pas exacte.

b) Ici les deux dérivées partielles sont nulles donc la forme est fermée. Étant défini sur un quart de plan ($T > 0$, $p > 0$) qui est "sans trou", elle est exacte et admet donc une primitive : il existe une fonction $S(T,p)$ telle que $\mathrm{d}S = \delta Q_{\text{rev}}/T$. S est l'entropie.