exercices théoriques

1. **calcul par utilisation directe de primitives :**

$$A=\int_0^1 \sqrt{3x}\,\mathrm{d}x,\qquad B=\int_0^1 \frac{2\mathrm{d}x}{x^2+1},\qquad C=\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}},$$
$$D=\int_0^{\sin\theta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad E=\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}},\qquad F=\int_1^8 \frac{\mathrm{d}V}{V^\gamma}\quad(\gamma>0).$$

corrigé succinct : A : primitive $\frac{2}{9}(3x)^{3/2}$, $\boxed{A=2/\sqrt{3}}$; B : primitive $2\arctan x$, $\boxed{B=\pi/2}$;

C : primitive $\sqrt{x^2+1}$, $\boxed{C=\sqrt{2}-1}$; D : primitive $\arcsin x$, $\boxed{D=\theta \text{ si } \theta \text{ dans } [-\pi/2;\pi/2]}$;

E : primitive $\mathrm{argch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, donc $\boxed{E=\ln(4+\sqrt{15})-\ln(2+\sqrt{3}).}$

F : si $\gamma\neq 1$, une primitive est $\dfrac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}$ donc $\boxed{F=\dfrac{8^{-\gamma+1}-1}{-\gamma+1}.}$

si $\gamma=1$, une primitive est $\ln(V)$ donc $\boxed{F=\ln(8)}$

2. **calcul par intégrations par parties :**

$$A=\int_1^X \ln x\,\mathrm{d}x,\qquad B=\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x,\qquad C=\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x,$$
$$D=\int_0^{\pi/2}(3x^3-2x)\cos x\,\mathrm{d}x,\qquad E=\int_0^1 e^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x,\qquad F=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$$

corrigé succinct : A : on intègre $1\times\ln(x)$ par parties : on dérive le $\ln(x)$ et on primitive le 1.
$\ln(x)\xrightarrow{\mathrm{D}}1/x$ et $1\xrightarrow{\mathrm{P}}x$,
donc $A=[x\ln(x)]_1^X-\int_1^X x/x\,\mathrm{d}x=(X\ln(X)-0)+X-1$ et donc
$\boxed{A=X\ln X-X+1.}$

B : on intègre par parties en dérivant x en 1 et en primitivant $\cos x$ en $\sin x$.
$\int_0^{\pi/2}x\cos x\,\mathrm{d}x=[x\sin x]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x=[x\sin x]_0^{\pi/2}-[-\cos x]_0^{\pi/2}$. Ainsi,
$\boxed{B=\pi/2-1.}$

C : avec $u'(x)=e^x$ et $v(x)=x^2$,
c'est-à-dire $x^2\xrightarrow{\mathrm{D}}2x$ et $e^x\xrightarrow{\mathrm{P}}e^x$,
on obtient $C=[x^2e^x]_0^1-\int_0^1 2xe^x\mathrm{d}x=e-2\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$.
Il faut recommencer une nouvelle intégration par parties...
$x\xrightarrow{\mathrm{D}}1$ et $e^x\xrightarrow{\mathrm{P}}e^x$,
qui donne $C=e-2([xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x\mathrm{d}x)$
pour obtenir finalement $\boxed{C=e-2.}$

D : avec trois intégrations par parties successives, où l'on dérive le polynôme et primitive le cos ou sin, on trouve $\boxed{D=3\pi^3/8-10\pi+20.}$

E : on peut intégrer deux fois par parties en primitivant à chaque fois l'exponentielle et en dérivant le sinus/cosinus :

La première i.p.p avec $\cos(2x)\xrightarrow{\mathrm{D}}-2\sin(2x)$ et $e^x\xrightarrow{\mathrm{P}}e^x$, on obtient

$E=[e^x\cos(2x)]_0^1-\int_0^1-2e^x\sin(2x)\mathrm{d}x=[e^x\cos(2x)]_0^1+2\int_0^1 e^x\sin(2x)\mathrm{d}x$

La deuxième i.p.p avec $\sin(2x)\xrightarrow{\mathrm{D}}2\cos(2x)$ et $e^x\xrightarrow{\mathrm{P}}e^x$, on obtient

$E=[e^x\cos(2x)]_0^1+2([e^x\sin(2x)]_0^1-\int_0^1 2e^x\cos(2x)\mathrm{d}x)$

donc
$E=e\ \cos(2)-1+2([e^x\sin(2x)]_0^1-2\int_0^1 e^x\cos(2x)\mathrm{d}x)=e\cos(2)-1+2e\sin(2)-4E$,
et donc finalement

$5E=e\cos(2)-1+2e\sin(2)$, donc $\boxed{E=\dfrac{e\cos(2)-1+2e\sin(2)}{5}.}$

F :
on part de $H=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\pi/4$, que l'on intègre par parties, en dérivant la fraction et en primitivant 1.
On obtient alors $H=[\dfrac{x}{1+x^2}]_0^1-\int_0^1\dfrac{-2x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=1/2-0/2+2\int_0^1\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.
Mais $x^2=x^2+1-1$, donc

$H = 1/2 + 2\int_0^1 \dfrac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)^2}\,dx = 1/2 + 2(\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \dfrac{1}{(1+x^2)^2}\,dx) = 1/2 + 2H - 2F,$

et finalement, $2F = H + 1/2$ donc $2F = \pi/4 + 1/2$ donc $\boxed{F = \pi/8 + 1/4.}$

3. **calculs par changement de variable :** on posera $x = \cos\theta$ (A), $y = \sqrt{2}t$ (B), $t = \tan\frac{\theta}{2}$ (C), $y = x^2$ (D), $y = \cos x$ (E), $y = e^x$ (F).

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \sin\theta\,d\theta, \qquad B = \int_0^x \frac{dt}{2t^2+1}, \qquad C = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\ d\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta},$$

$$D = \int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx, \qquad E = \int_0^{\pi/4} \tan x\,dx, \qquad F = \int_0^1 \frac{e^{2x}+2e^x}{e^x+1}\,dx.$$

corrigé succinct : A : en posant $u = \cos\theta$:
u varie entre $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$,
la différentielle vaut $du = -\sin\theta\,d\theta$,
et par ailleurs $\cos^2\theta = u^2$,

donc finalement $A = \int_1^{\sqrt{2}/2} -u^2\,du = [-u^3/3]_1^{\sqrt{2}/2} = \dfrac{-\sqrt{2}/4+1}{3}$: $\boxed{A = \dfrac{4-\sqrt{2}}{12}.}$

B : en posant $y = \sqrt{2}t$:
y varie entre 0 et $\sqrt{2}x$,
$dy = \sqrt{2}dt$,

et donc $B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}x} \dfrac{dy}{y^2+1}$, et l'on reconnaît la dérive de la fonction arctan,

donc finalement $\boxed{B = \dfrac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}.}$

C : on pose $t = \tan\theta/2$.
Alors $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)d\theta$, donc $d\theta = 2dt/(1+t^2)$.
De plus, $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$,

et donc $C = \displaystyle\int_{\tan\pi/8}^{1} \dfrac{1-t^2}{2t}dt$ après simplification. Ainsi, $C = \frac{1}{2}[\ln t - t^2/2]_{\tan\pi/8}^1$.

Mais si $u = \tan\pi/8$, u est positif et $\tan\frac{\pi}{4} = \dfrac{2u}{1-u^2}$ donc $u = \sqrt{2}-1$, et finalement

$\boxed{C = \dfrac{1-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)}{2}.}$

D il faut enchaîner le changement de variable puis une intégration par parties. Au final l'intégrale vaut $\boxed{D = 1/2}$.

E a été pris en exemple en cours : on a vu que $E = -\int_1^{\sqrt{2}/2} dy/y = -[\ln(y)]_1^{\sqrt{2}/2} = -\ln(\sqrt{2}/2) + \ln(2) = \ln(\sqrt{2})$, donc

$\boxed{E = \ln(2)/2}$

Pour l'intégrale F, on pose $y = e^x$ donc :
y varie entre $e^0 = 1$ et $e^1 = e$,
$dy = e^x dx$ donc $dx = dy/e^x = dy/y$,
et ainsi

$$F = \int_1^e \frac{y^2+2y}{y+1}\frac{dy}{y} = \int_1^e \frac{y+2}{y+1}dy = \int_1^e 1 + \frac{1}{y+1}dy = (e-1) + \ln(1+e) - \ln(2),$$

donc finalement $\boxed{E = e - 1 + \ln(1+e) - \ln(2)}$

4. **calcul par linéarisation de polynômes trigonométriques :**

$$A = \int_0^{\pi/3} \sin\theta\cos\theta\,d\theta, \qquad B = \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\,d\theta, \qquad C = \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta.$$

corrigé succinct :

On sait (formule $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$) que $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$, donc inutile ici d'utiliser les formules d'Euler. On obtient $A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \sin 2\theta\,d\theta = \frac{-1}{4}[\cos(2\theta)]_0^{\pi/3} = -\cos(2\pi/3)/4 + 1/4 = 1/8 + 1/4$ donc

$\boxed{A = \dfrac{3}{8}.}$

Pour calculer B on linéarise $\sin^3\theta = \dfrac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3}{(2i)^3} = \dfrac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}}{-8i}$, donc
$\sin^3\theta = \dfrac{2i\sin(3\theta) - 6i\sin(\theta)}{-8i} = \dfrac{-\sin 3\theta + 3\sin\theta}{4}$, et par conséquent
$B = [\dfrac{\cos(3\theta)/3 - 3\cos\theta}{4}]_0^{\pi/4} = -\sqrt{2}/24 - 3\sqrt{2}/8 - 1/12 + 3/4 =$

$-\sqrt{2}/24 - 9\sqrt{2}/24 - 1/12 + 9/12 = -10\sqrt{2}/24 + 8/12$, et finalement $\boxed{B = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5\sqrt{2}}{12}.}$

Pour calculer C on peut linéariser comme les exercices précédents, et on obtient $\cos^2\theta\,\sin\theta = \frac{1}{4}(\sin 3\theta + \sin\theta)$, que l'on sait primitiver.

On peut aussi directement remarquer que $\cos^2\theta\,\sin\theta$ est la dérivée de $-\cos^3\theta/3$, et calculer $C = [-\cos^3\theta/3]_0^{\pi/4} = -\sqrt{2}^3/(8\times 3) + 1/3 = -2\sqrt{2}/24 + 1/3$

donc finalement $\boxed{C = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{12}.}$

5. **intégrales généralisées :**

$$A=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2},\qquad B=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}},\qquad C=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x+2},$$
$$D=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)},\qquad E=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x,\qquad F=\int_0^{+\infty}re^{-r^2}\,dr.$$

corrigé succinct :

Les deux premières intégrales se calculent directement, à l'aide d'une primitive :

$\boxed{A=[-1/x]_2^{+\infty}=1/2}$ et $\boxed{B=[3x^{2/3}/2]_0^1=3/2.}$

Pour C, une primitive de $\dfrac{1}{x+2}$ est $\ln|x+2|$ dont la limite en $+\infty$ est infinie : ainsi l'intégrale C n'existe pas (ou diverge).

On peut calculer D par le changement de variable $y=\sqrt{x}$ soit $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x/(2\sqrt{x})$, et donc $D=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}y}{y^2+1}$. On reconnaît la dérivée de $2\arctan(y)$, donc $D=[2\arctan(y)]_1^{+\infty}=2(\pi/2-\pi/4)=\pi/2.$

Pour calculer E on peut réaliser une double intégration par parties, comme déjà vu pour les intégrales de la forme $\exp\times\cos$ ou $\exp\times\sin$.

Mais on peut aussi utiliser les nombres complexes, pour remplacer ce calcul par le calcul de primitive d'une unique exponentielle.

En effet, $E=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{Im}(\cos(x)+i\sin(x))\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}(\int_0^{+\infty}e^{-x}(\cos(x)+i\sin(x)\,\mathrm{d}x)=\mathrm{Im}(\int_0^{+\infty}e^{-x}e^{ix}\,\mathrm{d}x)$, et donc

$E=\mathrm{Im}(\int_0^{+\infty}e^{(-1+i)x}\,\mathrm{d}x)=\mathrm{im}([\dfrac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}]_0^{+\infty})=\mathrm{Im}(\dfrac{-1}{-1+i})=\mathrm{Im}(\dfrac{-1(-1-i)}{2})$, et finalement $\boxed{E=\dfrac{1}{2},}$

Pour calculer F on peut poser $x=r^2$, donc les bornes ne changent pas, la différentielle vaut $\mathrm{d}x=2r\mathrm{d}r$, et donc $F=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x$,

donc $F=[\dfrac{-e^{-x}}{2}]_0^{+\infty}=0-(-1/2)$, et ainsi $\boxed{F=\dfrac{1}{2}}$

exercices pratiques

1. Calculer la valeur moyenne des courants de période T suivants (on prend $I_0>0$) :
sinus $i_1(t)=I_0\sin(\frac{2\pi}{T}t)$;
sinus redressé simple alternance : $i_2(t)=I_0\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ si $\sin(\frac{2\pi}{T}t)\geq 0$, et sinon $i_2(t)=0$;
sinus redressé double alternance : $i_3(t)=|I_0\sin(\frac{2\pi}{T}t)|$.

corrigé succinct : La valeur moyenne d'une fonction i de période T est définie par $\dfrac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt$.

On calcule successivement

1) la valeur moyenne de i_1 : il s'agit de l'intégrale d'un sinus sur une période, on sait qu'elle est nulle sans nécessité d'expliciter le calcul.
Si on souhaite néanmoins le faire :
$\frac{1}{T}\int_0^T i_1(t)\,\mathrm{d}t=\frac{I_0}{T}\int_0^T\sin(\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t=\frac{I_0}{T}[\frac{-T}{2\pi}\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^T=\frac{I_0}{T}\frac{-T}{2\pi}(\cos(2\pi)-\cos(0))=0.$

2) la valeur moyenne de i_2 : $\sin(x)$ est positif sur $[0;\pi]$ et négatif sur $[\pi;2\pi]$, donc $\sin(2\pi/T)$ est positif sur $[0;T/2]$ et négatif sur $[T/2;T]$. Par conséquent, la valeur moyenne de i_2 est $\frac{1}{T}\int_0^T i_2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{I_0}{T}\int_0^{T/2}\sin(\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t$ car i_2 est nulle sur $[T/2;T]$.
Ainsi, $\frac{I_0}{T}\int_0^T i_2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{I_0}{T}\int_0^{T/2}\sin(\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t=\frac{I_0}{T}\frac{T}{2\pi}[-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^{T/2}=\frac{I_0}{T}\frac{T}{2\pi}(-\cos(\pi)+\cos(0))=\frac{I_0}{T}\frac{T}{2\pi}(2).$

Donc $\boxed{\text{la valeur moyenne de } i_2 \text{ vaut } \dfrac{I_0}{\pi}.}$

3) pour calculer la valeur moyenne de i_3, on peut refaire un calcul analogue en enlevant la valeur absolue, pour séparer l'intégrale en deux : sur $[0;T/2]$ où le sinus est positif, et sur $[T/2;T]$ où il est négatif. Ainsi, $\frac{I_0}{T}\int_0^T|\sin(\frac{2\pi}{T}t)|\,\mathrm{d}t=\frac{I_0}{T}(\int_0^{T/2}\sin(\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t+\int_{T/2}^T-\sin(\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t)=\frac{I_0}{T}\frac{T}{2\pi}([-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^{T/2}-[-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_{T/2)}^T)=\frac{I_0}{T}\frac{T}{2\pi}(-\cos(\pi)+\cos(0)+\cos(2\pi)-\cos(\pi)),$ soit $\dfrac{2I_0}{\pi}$.

Mais il est bien plus simple de remarquer que i_3 est aussi une fonction $T/2$ périodique ! Et donc calculer simplement $\frac{I_0}{T/2}\int_0^{T/2}\sin(\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{d}t$: c'est le double de l'intégrale calculée pour i_2. Finalement,

$\boxed{\text{La valeur moyenne de } i_3 \text{ est donc } \dfrac{2I_0}{\pi}.}$

2. (*) **loi normale :** Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si et seulement si, pour tout x réel, $p(X<x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$.

On admet que l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-r^2}\mathrm{d}r$ vaut $\sqrt{\pi}$ (voir TD S2).

(a) Calculer l'espérance $E(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$ et la variance $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$ de cette loi.

(b) Si $k \in \mathbb{R}$, montrer que X/k suit une loi normale de paramètres μ/k et σ^2/k^2.

corrigé succinct :

(a) Dans l'expression de $E(X)$, on effectue le changement de variable $\tau = t - \mu$: alors $E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\tau+\mu)e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$.

On va calculer séparément $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau = \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$ et $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$

Pour le calcul de $\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$ on effectue un nouveau changement de variable $\tau = \sqrt{2}\sigma\ r$ l'expression vaut alors $\frac{\sqrt{2}\sigma\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-r^2}\mathrm{d}r$ soit après simplification (tenant compte du résultat admis dans l'énoncé), simplement μ.

D'autre part, l'intégrale $\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$ vaut (par utilisation de primitive) $[\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \times -\sigma^2 \times e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}]_{-\infty}^{+\infty}$ autrement dit 0 !

Finalement on trouve $\boxed{E(X) = \mu + 0 = \mu.}$

De la même manière on peut montrer que $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

(b) On cherche la loi de $Y = X/k$.

Alors $p(Y < x) = p(X \leq kx) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{t=-\infty}^{kx}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$ (on applique juste la relation précédente en remplaçant x par kx).
On pose $t = ku$ ou $u = k/t$ dans l'intégrale (et donc $\mathrm{d}t = k\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}u = k\mathrm{d}t$) :

Ainsi après changement de variable $p(Y < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{u=-\infty}^{x}e^{-\frac{(ku-\mu)^2}{2\sigma^2}}k\mathrm{d}u = \frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{u=-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-\mu/k)^2}{2\sigma^2/k^2}}\mathrm{d}u$ (dans l'exponentielle on divise numérateur et dénominateur par k^2, et par ailleurs on fait sortir le k apparu au côté de $\mathrm{d}u$ de l'intégrale),

donc finalement $p(Y < x) = \frac{1}{\sigma/k\sqrt{2\pi}}\int_{u=-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-\mu/k)^2}{2(\sigma/k)^2}}\mathrm{d}u$.
On est revenu à la définition ci-dessus de la loi normale : cela signifie exactement que Y suit une loi normale de paramètres d'espérance μ/k et d'écart-type σ/k.

3. (*) On définit les **coefficients de Fourier** d'une fonction de période T par (n étant un entier positif) :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t.$$

(a) calculer les coefficients de Fourier d'une fonction constante.

(b) montrer que si f est paire, pour tout n, $b_n = 0$ (de même f est impaire, $a_n = 0$).

(c) $m < M$ sont deux constantes : calculer les coefficients de Fourier de la fonction qui vaut M entre $-\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{4}$, m entre $\frac{T}{4}$ et $\frac{3T}{4}$, M entre $\frac{3T}{4}$ et $\frac{5T}{4}$, ...

(d) calculer les coefficients pour un cosinus redressé double alternance.

corrigé succinct :

(a) ici $f(t) = f$ est une constante.
Alors si $n = 0$, $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ donc on a $a_0 = 2f$ et $b_0 = 0$.

Si $n \neq 0$, on a $a_n = \frac{2f}{T}[\frac{\sin(\frac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_0^T$ soit $a_n = \frac{f}{\pi}[\sin(2\pi n) - \sin(0)] = 0$ car n est un entier donc $\sin(2\pi n) = 0$.
De même, on trouve que $b_n = 0$.

(b) f étant périodique de période T on peut calculer b_n par la formule $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t$ (on calcule l'intégrale sur une période $[-T/2; T/2]$ plutôt que $[0; T]$).
On peut alors séparer en deux intégrales :
$b_n = \frac{2}{T}(\int_{-T/2}^{0}f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t + \int_0^{T/2}f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t)$.
On ne touche pas à la seconde, mais on pose $u = -t$ dans la première : on obtient alors :
$b_n = \frac{2}{T}(\int_{T/2}^{0}f(-u)\sin(\frac{-2\pi nu}{T})\ (-\mathrm{d}u) + \int_0^{T/2}f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t)$.

f étant paire et sin impaire, $a_n = \frac{2}{T}(\int_{T/2}^{0}f(u)\sin(\frac{2\pi nu}{T})\ \mathrm{d}u + \int_0^{T/2}f(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t)$, ce qui vaut 0 (c'est la même fonction intégrée, avec les bornes ordonnées en sens inverse).
On montre de même que $a_n = 0$ si f est impaire.

(c) $a_n = \frac{2}{T}(\int_0^{T/4}M\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t + \int_{T/4}^{3T/4}m\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t + \int_{3T/4}^{T}M\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t)$ (on coupe l'intervalle $[0; T]$ en trois intervalles sur lesquels $f(t)$est constante).
On calcule alors par primitive :

$a_n = \frac{2}{T}(M[\frac{\sin(\frac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_0^{T/4} + m[\frac{\sin(\frac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_{T/4}^{3T/4} + M[\frac{\sin(\frac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_{3T/4}^{T})$ soit $\frac{1}{\pi n}(M\sin(\pi n/2) + m(\sin(3\pi n/2) - \sin(\pi n/2)) + M(0 - \sin(3\pi n/2))$.

Comme $\sin(3\pi n/2) = -\sin(\pi n/2)$, on en déduit que $a_n = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}(M - 2m + M)$ et donc finalement $a_n = \frac{2\sin(\pi n/2)(M-m)}{\pi n}$.
De même, on trouve $b_n = 0$ car la fonction est paire .

(d) Il s'agit de la fonction $I_0|\cos(2\pi t/T)|$ (avec un $I_0 > 0$), qui est paire, donc les b_n sont nuls.

Par ailleurs $a_n = \dfrac{2I_0}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} |\cos(\frac{2\pi t}{T})|\cos(\frac{2\pi n t}{T})\ \mathrm{d}t$.

$\cos(\dfrac{2\pi t}{T})$ est positif entre $-T/4$ et $T/4$, négatif entre $-T/2$ et $-T/4$ et entre $T/4$ et $T/2$.

On peut donc écrire

$$a_n = \frac{2I_0}{T}\left(-\int_{-T/2}^{-T/4}\cos(\frac{2\pi t}{T})\cos(\frac{2\pi n t}{T})\ \mathrm{d}t + \int_{-T/4}^{T/4}\cos(\frac{2\pi t}{T})\cos(\frac{2\pi n t}{T})\ \mathrm{d}t - \int_{T/4}^{T/2}\cos(\frac{2\pi t}{T})\cos(\frac{2\pi n t}{T})\ \mathrm{d}t\right).$$