exercices théoriques

1. **calcul par utilisation directe de primitives :**

$$A = \int_0^1 \sqrt{3x}\,\mathrm{d}x, \qquad B = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}x}{x^2+1}, \qquad C = \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}},$$
$$D = \int_0^{\sin\theta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad E = \int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad F = \int_1^8 \frac{\mathrm{d}V}{V^\gamma} \quad (\gamma > 0).$$

corrigé succinct : A : primitive $\frac{2}{9}(3x)^{3/2}$, $\boxed{A = 2/\sqrt{3}}$; B : primitive $2\arctan x$, $\boxed{B = \pi/2}$;

C : primitive $\sqrt{x^2+1}$, $\boxed{C = \sqrt{2}-1}$; D : primitive $\arcsin x$, $\boxed{D = \theta \text{ si } \theta \text{ dans } [-\pi/2;\pi/2]}$;

E : primitive $\operatorname{argch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$, donc $\boxed{E = \ln(4+\sqrt{15}) - \ln(2+\sqrt{3})}$.

F : si $\gamma \neq 1$, une primitive est $\dfrac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}$ donc $\boxed{F = \dfrac{8^{-\gamma+1}-1}{-\gamma+1}}$.

si $\gamma = 1$, une primitive est $\ln(V)$ donc $\boxed{F = \ln(8)}$

2. **calcul par intégrations par parties :**

$$A = \int_1^X \ln x\,\mathrm{d}x, \qquad B = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x, \qquad C = \int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x,$$
$$D = \int_0^{\pi/2} (3x^3-2x)\cos x\,\mathrm{d}x, \qquad E = \int_0^1 e^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x, \qquad F = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$$

corrigé succinct : A : on intègre $1\times\ln(x)$ par parties : on dérive le $\ln(x)$ et on primitive le 1.

$\ln(x) \xrightarrow{\text{D}} 1/x$ et $1 \xrightarrow{\text{P}} x$,

donc $A = [x\ln(x)]_1^X - \int_1^X x/x\,\mathrm{d}x = (X\ln(X)-0) + X - 1$ et donc $\boxed{A = X\ln X - X + 1.}$

B : on intègre par parties en dérivant x en 1 et en primitivant $\cos x$ en $\sin x$.
$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x = [x\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x = [x\sin x]_0^{\pi/2} - [-\cos x]_0^{\pi/2}$. Ainsi,
$\boxed{B = \pi/2 - 1.}$

C : avec $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x^2$,
c'est-à-dire $x^2 \xrightarrow{\text{D}} 2x$ et $e^x \xrightarrow{\text{P}} e^x$,
on obtient $C = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\mathrm{d}x = e - 2\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$.
Il faut recommencer une nouvelle intégration par parties...
$x \xrightarrow{\text{D}} 1$ et $e^x \xrightarrow{\text{P}} e^x$,
qui donne $C = e - 2([xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x)$
pour obtenir finalement $\boxed{C = e - 2.}$

D : avec trois intégrations par parties successives, où l'on dérive le polynôme et primitive le cos ou sin, on trouve $\boxed{D = 3\pi^3/8 - 10\pi + 20.}$

E : on peut intégrer deux fois par parties en primitivant à chaque fois l'exponentielle et en dérivant le sinus/cosinus :

La première i.p.p avec $\cos(2x) \xrightarrow{\text{D}} -2\sin(2x)$ et $e^x \xrightarrow{\text{P}} e^x$, on obtient

$$E = [e^x\cos(2x)]_0^1 - \int_0^1 -2e^x\sin(2x)\mathrm{d}x = [e^x\cos(2x)]_0^1 + 2\int_0^1 e^x\sin(2x)\mathrm{d}x$$

La deuxième i.p.p avec $\sin(2x) \xrightarrow{\text{D}} 2\cos(2x)$ et $e^x \xrightarrow{\text{P}} e^x$, on obtient

$$E = [e^x\cos(2x)]_0^1 + 2([e^x\sin(2x)]_0^1 - \int_0^1 2e^x\cos(2x)\mathrm{d}x)$$

donc
$E = e\ \cos(2) - 1 + 2([e^x\sin(2x)]_0^1 - 2\int_0^1 e^x\cos(2x)\mathrm{d}x) = e\cos(2) - 1 + 2e\sin(2) - 4E$,
et donc finalement

$5E = e\cos(2) - 1 + 2e\sin(2)$, donc $\boxed{E = \dfrac{e\cos(2) - 1 + 2e\sin(2)}{5}.}$

F :
on part de $H = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi/4$, que l'on intègre par parties, en dérivant la fraction et en primitivant 1.

On obtient alors $H = [\dfrac{x}{1+x^2}]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{-2x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 1/2 - 0/2 + 2\int_0^1 \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Mais $x^2 = x^2 + 1 - 1$, donc

$H = 1/2 + 2\int_0^1 \dfrac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 1/2 + 2(\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \dfrac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x) = 1/2 + 2H - 2F,$

et finalement, $2F = H + 1/2$ donc $2F = \pi/4 + 1/2$ donc $\boxed{F = \pi/8 + 1/4.}$

3. **calculs par changement de variable :** on posera $x = \cos\theta$ (A), $y = \sqrt{2}t$ (B), $t = \tan\frac{\theta}{2}$ (C), $y = x^2$ (D), $y = \cos x$ (E), $y = e^x$ (F).

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad B = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1}, \qquad C = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta},$$
$$D = \int_0^1 x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad E = \int_0^{\pi/4} \tan x\,\mathrm{d}x, \qquad F = \int_0^1 \frac{e^{2x}+2e^x}{e^x+1}\,dx.$$

<u>corrigé succinct :</u> A : en posant $u = \cos\theta$:
u varie entre $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$,
la différentielle vaut $\mathrm{d}u = -\sin\theta\, d\theta$,
et par ailleurs $\cos^2\theta = u^2$,

donc finalement $A = \int_1^{\sqrt{2}/2} -u^2\,du = [-u^3/3]_1^{\sqrt{2}/2} = \dfrac{-\sqrt{2}/4+1}{3}$: $\boxed{A = \dfrac{4-\sqrt{2}}{12}.}$

B : en posant $y = \sqrt{2}t$:
y varie entre 0 et $\sqrt{2}x$,
$\mathrm{d}y = \sqrt{2}dt$,

et donc $B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}x} \dfrac{dy}{y^2+1}$, et l'on reconnaît la dérive de la fonction arctan,

donc finalement $\boxed{B = \dfrac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}.}$

C : on pose $t = \tan\theta/2$.
Alors $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+t^2)\mathrm{d}\theta$, donc $\mathrm{d}\theta = 2\mathrm{d}t/(1+t^2)$.
De plus, $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$,

et donc $C = \displaystyle\int_{\tan\pi/8}^1 \dfrac{1-t^2}{2t}dt$ après simplification. Ainsi, $C = \frac{1}{2}[\ln t - t^2/2]_{\tan\pi/8}^1$.

Mais si $u = \tan\pi/8$, u est positif et $\tan\frac{\pi}{4} = \dfrac{2u}{1-u^2}$ donc $u = \sqrt{2}-1$, et finalement

$\boxed{C = \dfrac{1-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)}{2}.}$

D il faut enchaîner le changement de variable puis une intégration par parties. Au final l'intégrale vaut $\boxed{D = 1/2}$.

E a été pris en exemple en cours : on a vu que $E = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \mathrm{d}y/y = -[\ln(y)]_1^{\sqrt{2}/2} = -\ln(\sqrt{2}/2) + \ln(2) = \ln(\sqrt{2})$, donc $\boxed{E = \ln(2)/2}$

Pour l'intégrale F, on pose $y = e^x$ donc :
y varie entre $e^0 = 1$ et $e^1 = e$,
$\mathrm{d}y = e^x\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y/e^x = \mathrm{d}y/y$,
et ainsi

$$F = \int_1^e \frac{y^2+2y}{y+1}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_1^e \frac{y+2}{y+1}\mathrm{d}y = \int_1^e 1 + \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = (e-1) + \ln(1+e) - \ln(2),$$

donc finalement $\boxed{E = e - 1 + \ln(1+e) - \ln(2)}$

4. **calcul par décomposition en éléments simples :**

$A = \displaystyle\int_1^2 \dfrac{x^2+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ (mettre la fraction sous la forme $1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1}$),

$B = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{2x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$ (mettre la fraction sous la forme $\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1}$).

<u>corrigé succinct :</u>
pour le calcul de A :

partie entière : on effectue la division de x^2+1 par x^2+x : le quotient est 1 (et le reste, qui ne servira pas par la suite, vaut $-x+1$). Ce quotient 1 est la **partie entière** de la fraction.

factorisation du dénominateur : on constate que $x^2+x = x(x+1)$, c'est la factorisation sur $\mathbb{R}$ du dénominateur.

On en déduit que la décomposition en éléments simples de la fraction est $\frac{x^2+1}{x^2+x} = 1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1}$: on retrouve la partie entière et un élément simple pour chacun des facteurs du dénominateur (celui-ci vaut $x(x+1)$, donc x donne un élément simple $\frac{\alpha}{x}$ et $x+1$, un élément simple $\frac{\beta}{x+1}$).
Il reste à déterminer α et β...

détermination de α : on multplie par x ("ce qui est au dessous de α que l'on cherche") l'expression :
$\frac{(x^2+1)x}{x^2+x} = x + \frac{\alpha x}{x} + \frac{\beta x}{x+1}$
puis on simplifie les x/x :
$\frac{x^2+1}{x+1} = x + \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta x}{x+1}$
puis enfin on remplace, dans l'égalité ci-dessus valable pour tout x, x par la valeur qui annule le dénominateur de départ, donc $x = 0$:
$\frac{0^2+1}{0+1} = 0 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta 0}{0+1}$
et ainsi on obtient simplement $\alpha = 1$.

détermination de β : de même on multplie par $x+1$ ("ce qui est au dessous de β que l'on cherche") l'expression :
$\frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2+x} = (x+1) + \frac{\alpha(x+1)}{x} + \frac{\beta(x+1)}{x+1}$
puis on simplifie les $(x+1)/(x+1)$:
$\frac{x^2+1}{x} = (x+1) + \frac{\alpha(x+1)}{x} + \frac{\beta}{1}$
puis enfin on remplace, dans l'égalité ci-dessus valable pour tout x, x par la valeur qui annule le dénominateur de départ, donc $x+1=0$ soit $x=-1$:
$\frac{(-1)^2+1}{-1} = 0 + \frac{\alpha 0}{-1} + \frac{\beta}{1}$
et ainsi on obtient simplement $\beta = -2$.

calcul de l'intégrale : On a donc prouvé que $\frac{x^2+1}{x^2+x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}$...ce qui permet de calculer l'intégrale car on a remplacé la fraction de départ (dont on ne connaît pas de primitive simple) par une somme de trois fonctions que l'on sait facilement intégrer : une constante et des inverses de fonctions affines :
$$A = \int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x = [x+\ln(x) - 2\ln(x+1)]_1^2,$$
donc $A = (2+\ln(2)-2\ln(3)) - (1+\ln(1)-2\ln(2))$, et ainsi $\boxed{A = 1 + 3\ln 2 - 2\ln 3.}$

pour le calcul de B :

partie entière : on effectue la division de $2x$ par $(x+1)(x^2+1)$: pour l'effectuer on doit développer le dénominateur, il vaut x^3+x^2+x+1. Mais comme il est de degré 3, alors que le numérateur est de degré 1 seulement, le quotient est nul...

factorisation du dénominateur : ici le dénominateur est déja factorisé dans l'énoncé, il n'y a rien à faire.
On en déduit que la décomposition en éléments simples de la fraction est $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = 0 + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1}$: on retrouve la partie entière nulle, un élément simple $\alpha/(x+1)$ pour le facteur $x+1$ du dénominateur, et pour le facteur x^2+1 qui est de degré 2, un numérateur de degré 1 est à déterminer : l'élément simple sera de la forme $\frac{\beta x+\gamma}{x^2+1}$).
Il reste à déterminer α d'une part, β et γ d'autre part...

détermination de α : on multplie par $x+1$ puis on simplifie les $(x+1)/(x+1)$:
$\frac{2x}{x^2+1} = \frac{\alpha}{1} + \frac{(\beta x+\gamma)(x+1)}{x^2+1}$
puis enfin on remplace, dans l'égalité ci-dessus valable pour tout x, x par la valeur qui annule le dénominateur de départ, donc $x+1=0$, $x=-1$:
$\frac{-2}{(-1)^2+1} = \frac{\alpha}{1} + \frac{(\beta(-1)+\gamma)(0)}{(-1)^2+1}$
et ainsi on obtient simplement $\alpha = -2/2 = -1$.

détermination de β et γ : de même on multplie par x^2+1 ("ce qui est au dessous de β que l'on cherche") l'expression puis on simplifie les $(x^2+1)/(x^2+1)$:
$\frac{2x}{x+1} = \frac{\alpha(x^2+1)}{x+1} + \frac{(\beta x+\gamma)}{1}$
puis enfin on remplace, dans l'égalité ci-dessus valable pour tout x, x par une valeur qui annule le dénominateur de départ, donc $x^2+1=0$ soit $x=i$ (on pourrait aussi utiliser $-i$ à la place, mais il n'est pas utile de faire deux fois le calcul) :
$\frac{2i}{i+1} = \frac{\alpha 0}{i+1} + \frac{\beta i+\gamma}{1}$,
soit $\beta i+\gamma = \frac{2i}{i+1}$.
Là on remarque que $\beta i+\gamma$ est la forme algébrique d'un nombre complexe !
On écrit $\frac{2i}{i+1}$ sous forme algébrique en multipliant par le conjugué du dénominateur, $-i+1$.
On obtient :
$\beta i+\gamma = \frac{2i(-i+1)}{2}$ (le 2 au dénominateur est le carré du module du dénominateur initial), donc $\beta i+\gamma = \frac{2+2i}{2} = 1+i$,
et par identification, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$.

calcul de l'intégrale : On a donc prouvé que $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}$ ...ce qui permet de calculer l'intégrale car on a remplacé la fraction de départ (dont on ne connaît pas de primitive simple) par une somme de trois fonctions que l'on sait facilement intégrer : $\frac{-1}{x+1}$, $\frac{1}{x^2+1}$ et $\frac{x}{x^2+1}$.
$$B = \int_0^1 \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$
donc $B = [-\ln(x+1) + \arctan(x) + \ln(x^2+1)/2]_0^1$
et finalement $B = -\ln(2) + \arctan(1) + \ln(2)/2$, $\boxed{B = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.}$

5. **calcul par linéarisation de polynômes trigonométriques :**
$$A = \int_0^{\pi/3} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad B = \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad C = \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

corrigé succinct :

On sait (formule $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$) que $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$, donc inutile ici d'utiliser les formules d'Euler. On obtient
$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \sin 2\theta\; d\theta = \frac{-1}{4}[\cos(2\theta)]_0^{\pi/3} = -\cos(2\pi/3)/4 + 1/4 = 1/8 + 1/4$ donc
$\boxed{A = \frac{3}{8}.}$

Pour calculer B on linéarise $\sin^3\theta = \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}}{-8i}$, donc
$\sin^3\theta = \frac{2i\sin(3\theta) - 6i\sin(\theta)}{-8i} = \frac{-\sin 3\theta + 3\sin\theta}{4}$, et par conséquent
$B = [\frac{\cos(3\theta)/3 - 3\cos\theta}{4}]_0^{\pi/4} = -\sqrt{2}/24 - 3\sqrt{2}/8 - 1/12 + 3/4 =$
$-\sqrt{2}/24 - 9\sqrt{2}/24 - 1/12 + 9/12 = -10\sqrt{2}/24 + 8/12$, et finalement $\boxed{B = \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}.}$

Pour calculer C on peut linéariser comme les exercices précédents, et on obtient
$\cos^2\theta\,\sin\theta = \frac{1}{4}(\sin 3\theta + \sin\theta)$, que l'on sait primitiver.
On peut aussi directement remarquer que $\cos^2\theta\,\sin\theta$ est la dérivée de $-\cos^3\theta/3$, et calculer
$C = [-\cos^3\theta/3]_0^{\pi/4} = -\sqrt{2}^3/(8\times 3) + 1/3 = -2\sqrt{2}/24 + 1/3$
donc finalement $\boxed{C = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}.}$

6. **intégrales généralisées :**

$$A=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2},\qquad B=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}},\qquad C=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)},$$
$$D=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)},\qquad E=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x,\qquad F=\int_0^{+\infty}re^{-r^2}\,dr.$$

corrigé succinct :

Les deux premières intégrales se calculent directement, à l'aide d'une primitive :

$\boxed{A=[-1/x]_2^{+\infty}=1/2}$ et $\boxed{B=[3x^{2/3}/2]_0^1=3/2.}$

Pour C on décompose en éléments simples la fraction, on obtient $\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2})$, et donc $C=[(\ln x-\ln(x+2))/2]_1^{+\infty}$.

Chacun des deux logarithmes, séparément, à une limite infinie en $+\infty$, il est donc nécessaire de les regrouper pour lever l'indetermination : $C=[\ln\dfrac{x}{x+2}/2]_1^{+\infty}$.

La limite en l'infini de $\dfrac{x}{x+2}$ est 1, et donc le logarithme tend vers 0.

Ainsi $\boxed{C=\dfrac{\ln 3}{2}}$

De la même manière pour calculer D, on commence par décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$, ce qui permet de déterminer sa primitive $\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ et donc $D=[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_1^{+\infty}$.

Pour lever l'indétermination en $+\infty$ on doit regrouper les logarithmes : $\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, et la limite en l'infini est alors la même que celle de $\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}=\ln(x/x)=\ln(1)$, donc nulle.

Ainsi, $D=[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_1^{+\infty}=0-(\ln(1)-\frac{1}{2}\ln(2))$, donc $\boxed{D=\dfrac{\ln 2}{2}.}$

Pour calculer E on peut réaliser une double intégration par parties, comme déjà vu pour les intégrales de la forme $\exp\times\cos$ ou $\exp\times\sin$.

Mais on peut aussi utiliser les nombres complexes, pour remplacer ce calcul par le calcul de primitive d'une unique exponentielle.

En effet, $E=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{Im}(\cos(x)+i\sin(x))\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}(\int_0^{+\infty}e^{-x}(\cos(x)+i\sin(x)\,\mathrm{d}x)=\mathrm{Im}(\int_0^{+\infty}e^{-x}e^{ix}\,\mathrm{d}x)$, et donc

$E=\mathrm{Im}(\int_0^{+\infty}e^{(-1+i)x}\,\mathrm{d}x)=\mathrm{im}([\dfrac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}]_0^{+\infty})=\mathrm{Im}(\dfrac{-1}{-1+i})=\mathrm{Im}(\dfrac{-1(-1-i)}{2})$, et

finalement $\boxed{E=\dfrac{1}{2},}$

Pour calculer F on peut poser $x=r^2$, donc les bornes ne changent pas, la différentielle vaut $\mathrm{d}x=2r\mathrm{d}r$, et donc $F=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x$,

donc $F=[\dfrac{-e^{-x}}{2}]_0^{+\infty}=0-(-1/2)$, et ainsi $\boxed{F=\dfrac{1}{2}}$

exercices pratiques

1. **loi normale :** Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si et seulement si, pour tout x réel, $p(X<x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t.$

   On admet que l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-r^2}\mathrm{d}r$ vaut $\sqrt{\pi}$ (voir TD S2).

   (a) Calculer l'espérance $E(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$ et la variance $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$ de cette loi.

   (b) Si $k\in\mathbb{R}$, montrer que X/k suit une loi normale de paramètres μ/k et σ^2/k^2.

corrigé succinct :

(a) Dans l'expression de $E(X)$, on effectue le changement de variable $\tau=t-\mu$: alors $E(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(\tau+\mu)e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau.$

On va calculer séparément $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mu e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau=\dfrac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$ et $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\tau e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$

Pour le calcul de $\dfrac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$ on effectue un nouveau changement de variable $\tau=\sqrt{2}\sigma\ r$ l'expression vaut alors $\dfrac{\sqrt{2}\sigma\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-r^2}\mathrm{d}r$ soit après simplification (tenant compte du résultat admis dans l'énoncé), simplement μ.

D'autre part, l'intégrale $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\tau e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$ vaut (par utilisation de primitive) $[\dfrac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\times-\sigma^2\times e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}]_{-\infty}^{+\infty}$ autrement dit 0 !

Finalement on trouve $\boxed{E(X)=\mu+0=\mu.}$

De la même manière on peut montrer que $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$.

(b) On cherche la loi de $Y = X/k$.

Alors $p(Y < x) = p(X \le kx) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{t=-\infty}^{kx} e^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ (on applique juste la relation précédente en remplaçant x par kx).

On pose $t = ku$ ou $u = k/t$ dans l'intégrale (et donc $dt = kdu$, $du = kdt$) :

Ainsi après changement de variable $p(Y < x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{u=-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(ku-\mu)^2}{2\sigma^2}} kdu = \dfrac{k}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{u=-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(u-\mu/k)^2}{2\sigma^2/k^2}} du$ (dans l'exponentielle on divise numérateur et dénominateur par k^2, et par ailleurs on fait sortir le k apparu au côté de du de l'intégrale),

donc finalement $p(Y < x) = \dfrac{1}{\sigma/k\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{u=-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(u-\mu/k)^2}{2(\sigma/k)^2}} du$.

On est revenu à la définition ci-dessus de la loi normale : cela signifie exactement que Y suit une loi normale de paramètres d'espérance μ/k et d'écart-type σ/k.

2. Calculer la valeur moyenne des courants de période T suivants (on prend $I_0 > 0$) :
sinus $i_1(t) = I_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$;
sinus redressé simple alternance : $i_2(t) = I_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ si $\sin(\frac{2\pi}{T}t) \ge 0$, 0 sinon ;
sinus redressé double alternance : $i_3(t) = |I_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)|$.

corrigé succinct : La valeur moyenne d'une fonction i de période T est définie par $\dfrac{1}{T}\int_0^T i(t)\, dt$.

On calcule successivement

1) la valeur moyenne de i_1 : il s'agit de l'intégrale d'un sinus sur une période, on sait qu'elle est nulle sans nécessité d'expliciter le calcul.

Si on souhaite néanmoins le faire :

$\frac{1}{T}\int_0^T i_1(t)\, dt = \frac{I_0}{T}\int_0^T \sin(\frac{2\pi}{T}t)\, dt = \frac{I_0}{T}[\frac{-T}{2\pi}\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^T = \frac{I_0}{T}\frac{-T}{2\pi}(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0$.

2) la valeur moyenne de i_2 : $\sin(x)$ est positif sur $[0;\pi]$ et négatif sur $[\pi;2\pi]$, donc $\sin(2\pi/T)$ est positif sur $[0;T/2]$ et négatif sur $[T/2;T]$. Par conséquent, la valeur moyenne de i_2 est $\frac{1}{T}\int_0^T i_2(t)\, dt = \frac{I_0}{T}\int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t)\, dt$ car i_2 est nulle sur $[T/2;T]$.

Ainsi, $\frac{I_0}{T}\int_0^T i_2(t)\, dt = \frac{I_0}{T}\int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t)\, dt)\, dt = \frac{I_0}{T}\frac{T}{2\pi}[-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^{T/2} = \frac{I_0}{T}\frac{T}{2\pi}(-\cos(\pi) + \cos(0)) = \frac{I_0}{T}\frac{T}{2\pi}(2)$.

Donc $\boxed{\text{la valeur moyenne de } i_2 \text{ vaut } \dfrac{I_0}{\pi}.}$

3) pour calculer la valeur moyenne de i_3, on peut refaire un calcul analogue en enlevant la valeur absolue, pour séparer l'intégrale en deux : sur $[0;T/2]$ où le sinus est positif, et sur $[T/2;T]$ où il est négatif. Ainsi, $\frac{I_0}{T}\int_0^T |\sin(\frac{2\pi}{T}t)|\, dt = \frac{I_0}{T}(\int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t)\, dt + \int_{T/2}^T -\sin(\frac{2\pi}{T}t)\, dt) = \frac{I_0}{T}\frac{T}{2\pi}([-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^{T/2} - [-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_{T/2}^T) = \frac{I_0}{T}\frac{T}{2\pi}(-\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - \cos(\pi))$, soit $\dfrac{2I_0}{\pi}$.

Mais il est bien plus simple de remarquer que i_3 est aussi une fonction $T/2$ périodique ! Et donc calculer simplement $\frac{I_0}{T/2}\int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t)\, dt$: c'est le double de l'intégrale calculée pour i_2. Finalement,

$\boxed{\text{La valeur moyenne de } i_3 \text{ est donc } \dfrac{2I_0}{\pi}.}$

3. On définit les **coefficients de Fourier** d'une fonction de période T par (n étant un entier positif) :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})\, dt \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\, dt.$$

(a) calculer les coefficients de Fourier d'une fonction constante.

(b) montrer que si f est paire, pour tout n, $b_n = 0$ (de même f est impaire, $a_n = 0$).

(c) $m < M$ sont deux constantes : calculer les coefficients de Fourier de la fonction qui vaut M entre $-\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{4}$, m entre $\frac{T}{4}$ et $\frac{3T}{4}$, M entre $\frac{3T}{4}$ et $\frac{5T}{4}$, ...

(d) calculer les coefficients pour un cosinus redressé double alternance.

corrigé succinct :

(a) ici $f(t) = f$ est une constante.

Alors si $n = 0$, $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ donc on a $a_0 = 2f$ et $b_0 = 0$.

Si $n \ne 0$, on a $a_n = \dfrac{2f}{T}[\dfrac{\sin(\frac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_0^T$ soit $a_n = \dfrac{f}{\pi}[\sin(2\pi n) - \sin(0)] = 0$ car n est un entier donc $\sin(2\pi n) = 0$.

De même, on trouve que $b_n = 0$.

(b) f étant périodique de période T on peut calculer b_n par la formule $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\, dt$ (on calcule l'intégrale sur une période $[-T/2;T/2]$ plutôt que $[0;T]$).

On peut alors séparer en deux intégrales :

$b_n = \dfrac{2}{T}(\displaystyle\int_{-T/2}^{0} f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\, dt + \int_0^{T/2} f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\, dt)$.

On ne touche pas à la seconde, mais on pose $u = -t$ dans la première : on obtient alors :

$b_n = \dfrac{2}{T}(\displaystyle\int_{T/2}^{0} f(-u)\sin(\frac{-2\pi nu}{T})\,(-du) + \int_0^{T/2} f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\, dt)$.

f étant paire et sin impaire, $a_n = \dfrac{2}{T}(\displaystyle\int_{T/2}^{0} f(u)\sin(\frac{2\pi nu}{T})\, du + \int_0^{T/2} f(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})\, dt)$, ce qui vaut 0 (c'est la même fonction intégrée, avec les bornes ordonnées en sens inverse).

On montre de même que $a_n = 0$ si f est impaire.

(c) $a_n = \dfrac{2}{T}(\int_0^{T/4} M\cos(\dfrac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t + \int_{T/4}^{3T/4} m\cos(\dfrac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t + \int_{3T/4}^{T} M\cos(\dfrac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t)$ (on coupe l'intervalle $[0;T]$ en trois intervalles sur lesquels $f(t)$est constante).

On calcule alors par primitive :

$a_n = \dfrac{2}{T}(M[\dfrac{\sin(\frac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_0^{T/4} + m[\dfrac{\sin(\frac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_{T/4}^{3T/4} + M[\dfrac{\sin(\frac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_{3T/4}^{T})$ soit $\dfrac{1}{\pi n}(M\sin(\pi n/2) + m(\sin(3\pi n/2) - \sin(\pi n/2)) + M(0 - \sin(3\pi n/2))$.

Comme $\sin(3\pi n/2) = -\sin(\pi n/2)$, on en déduit que $a_n = \dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}(M - 2m + M)$ et donc finalement $a_n = \dfrac{2\sin(\pi n/2)(M-m)}{\pi n}$.

De même, on trouve $b_n = 0$ car la fonction est paire .

(d) Il s'agit de la fonction $I_0|\cos(2\pi t/T)|$ (avec un $I_0 > 0$), qui est paire, donc les b_n sont nuls.

Par ailleurs $a_n = \dfrac{2I_0}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |\cos(\dfrac{2\pi t}{T})|\cos(\dfrac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t$.

$\cos(\dfrac{2\pi t}{T})$ est positif entre $-T/4$ et $T/4$, négatif entre $-T/2$ et $-T/4$ et entre $T/4$ et $T/2$.
On peut donc écrire

$a_n = \dfrac{2I_0}{T}(-\int_{-T/2}^{-T/4}\cos(\dfrac{2\pi t}{T})\cos(\dfrac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t + \int_{-T/4}^{T/4}\cos(\dfrac{2\pi t}{T})\cos(\dfrac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t - \int_{T/4}^{T/2}\cos(\dfrac{2\pi t}{T})\cos(\dfrac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t)$.