

exercices théoriques

1. calcul par utilisation directe de primitives :

$$A = \int_0^1 \sqrt{3x} \, dx, \quad B = \int_0^1 \frac{2dx}{x^2 + 1}, \quad C = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$D = \int_0^{\sin \theta} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad E = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad F = \int_1^8 \frac{dV}{V^\gamma} \quad (\gamma > 0).$$

corrigé succinct : A : primitive  $\frac{2}{9}(3x)^{3/2}$ ,  $A = 2/\sqrt{3}$  ;

B : primitive  $2 \arctan x$ ,

$$B = \pi/2 ;$$

C : primitive  $\sqrt{x^2 + 1}$ ,  $C = \sqrt{2} - 1$  ;

D : primitive  $\arcsin x$ ,

$$D = \theta \text{ si } \theta \text{ dans } [-\pi/2; \pi/2] ;$$

E : primitive  $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ , donc  $E = \ln(4 + \sqrt{15}) - \ln(2 + \sqrt{3})$ .

F : si  $\gamma \neq 1$ , une primitive est  $\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}$  donc  $F = \frac{8^{-\gamma+1} - 1}{-\gamma+1}$ .

si  $\gamma = 1$ , une primitive est  $\ln(V)$  donc  $F = \ln(8)$

2. calcul par intégrations par parties :

$$A = \int_1^X \ln x \, dx, \quad B = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx, \quad C = \int_0^1 x^2 e^x \, dx,$$

$$D = \int_0^{\pi/2} (3x^3 - 2x) \cos x \, dx, \quad E = \int_0^1 e^x \cos(2x) \, dx, \quad F = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

corrigé succinct : A : on intègre  $1 \times \ln(x)$  par parties : on dérive le  $\ln(x)$  et on primitive le 1.

$$\ln(x) \xrightarrow{D} 1/x \text{ et } 1 \xrightarrow{P} x,$$

donc  $A = [x \ln(x)]_1^X - \int_1^X x/x \, dx = (X \ln(X) - 0) + X - 1$  et donc

$$A = X \ln X - X + 1.$$

B : on intègre par parties en dérivant  $x$  en 1 et en primitivant  $\cos x$  en  $\sin x$ .  
 $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - [-\cos x]_0^{\pi/2}$ . Ainsi,

$$B = \pi/2 - 1.$$

C : avec  $u'(x) = e^x$  et  $v(x) = x^2$ ,

c'est-à-dire  $x^2 \xrightarrow{D} 2x$  et  $e^x \xrightarrow{P} e^x$ ,

on obtient  $C = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x \, dx = e - 2 \int_0^1 x e^x \, dx$ .

Il faut recommencer une nouvelle intégration par parties...

$x \xrightarrow{D} 1$  et  $e^x \xrightarrow{P} e^x$ ,

qui donne  $C = e - 2([x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx)$

pour obtenir finalement  $C = e - 2$ .

D : avec trois intégrations par parties successives, où l'on dérive le polynôme et primitive le cos

ou sin, on trouve  $D = 3\pi^3/8 - 10\pi + 20$ .

E : on peut intégrer deux fois par parties en primitivant à chaque fois l'exponentielle et en dérivant le sinus/cosinus :

La première i.p.p avec  $\cos(2x) \xrightarrow{D} -2 \sin(2x)$  et  $e^x \xrightarrow{P} e^x$ , on obtient

$$E = [e^x \cos(2x)]_0^1 - \int_0^1 -2e^x \sin(2x) \, dx = [e^x \cos(2x)]_0^1 + 2 \int_0^1 e^x \sin(2x) \, dx$$

La deuxième i.p.p avec  $\sin(2x) \xrightarrow{D} 2 \cos(2x)$  et  $e^x \xrightarrow{P} e^x$ , on obtient

$$E = [e^x \cos(2x)]_0^1 + 2([e^x \sin(2x)]_0^1 - \int_0^1 2e^x \cos(2x) \, dx)$$

donc

$$E = e \cos(2) - 1 + 2([e^x \sin(2x)]_0^1 - 2 \int_0^1 e^x \cos(2x) \, dx) = e \cos(2) - 1 + 2e \sin(2) - 4E,$$

et donc finalement

$$5E = e \cos(2) - 1 + 2e \sin(2), \text{ donc } E = \frac{e \cos(2) - 1 + 2e \sin(2)}{5}.$$

F :

on part de  $H = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi/4$ , que l'on intègre par parties, en dérivant la fraction et en primitivant 1.

On obtient alors  $H = [\frac{x}{1+x^2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2} \, dx = 1/2 - 0/2 + 2 \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx$ .

Mais  $x^2 = x^2 + 1 - 1$ , donc

$$H = 1/2 + 2 \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) - 1}{(1 + x^2)^2} dx = 1/2 + 2 \left( \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx \right) = 1/2 + 2H - 2F,$$

et finalement,  $2F = H + 1/2$  donc  $2F = \pi/4 + 1/2$  donc  $F = \pi/8 + 1/4$ .

3. **calculs par changement de variable** : on posera  $x = \cos \theta$  (A),  $y = \sqrt{2}t$  (B),  $t = \tan \frac{\theta}{2}$  (C),  $y = x^2$  (D),  $y = \cos x$  (E),  $y = e^x$  (F).

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta, \quad B = \int_0^x \frac{dt}{2t^2 + 1}, \quad C = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \cos \theta) \sin \theta},$$

$$D = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx, \quad E = \int_0^{\pi/4} \tan x dx, \quad F = \int_0^1 \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^x + 1} dx.$$

corrigé succinct : A : en posant  $u = \cos \theta$  :

$u$  varie entre  $\cos(0) = 1$  et  $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ ,  
la différentielle vaut  $du = -\sin \theta d\theta$ ,  
et par ailleurs  $\cos^2 \theta = u^2$ ,

donc finalement  $A = \int_1^{\sqrt{2}/2} -u^2 du = [-u^3/3]_1^{\sqrt{2}/2} = \frac{-\sqrt{2}/4 + 1}{3}$  :  $A = \frac{4 - \sqrt{2}}{12}$ .

B : en posant  $y = \sqrt{2}t$  :

$y$  varie entre 0 et  $\sqrt{2}x$ ,  
 $dy = \sqrt{2}dt$ ,

et donc  $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}x} \frac{dy}{y^2 + 1}$ , et l'on reconnaît la dérivée de la fonction arctan,

donc finalement  $B = \frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}$ .

C : on pose  $t = \tan \theta/2$ .

Alors  $dt = \frac{1}{2}(1 + t^2)d\theta$ , donc  $d\theta = 2dt/(1 + t^2)$ .

De plus,  $\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ ,  $\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$ ,

et donc  $C = \int_{\tan \pi/8}^1 \frac{1 - t^2}{2t} dt$  après simplification. Ainsi,  $C = \frac{1}{2} [\ln t - t^2/2]_{\tan \pi/8}^1$ .

Mais si  $u = \tan \pi/8$ ,  $u$  est positif et  $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{2u}{1 - u^2}$  donc  $u = \sqrt{2} - 1$ , et finalement

$$C = \frac{1 - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1)}{2}.$$

D il faut enchaîner le changement de variable puis une intégration par parties. Au final

l'intégrale vaut  $D = 1/2$ .

E a été pris en exemple en cours : on a vu que

$$E = - \int_1^{\sqrt{2}/2} dy/y = -[\ln(y)]_1^{\sqrt{2}/2} = -\ln(\sqrt{2}/2) + \ln(2) = \ln(\sqrt{2}), \text{ donc}$$

$$E = \ln(2)/2$$

Pour l'intégrale F, on pose  $y = e^x$  donc :

$y$  varie entre  $e^0 = 1$  et  $e^1 = e$ ,

$$dy = e^x dx \text{ donc } dx = dy/e^x = dy/y,$$

et ainsi

$$F = \int_1^e \frac{y^2 + 2y}{y + 1} \frac{dy}{y} = \int_1^e \frac{y + 2}{y + 1} dy = \int_1^e 1 + \frac{1}{y + 1} dy = (e - 1) + \ln(1 + e) - \ln(2),$$

donc finalement  $F = e - 1 + \ln(1 + e) - \ln(2)$

4. **calcul par linéarisation de polynômes trigonométriques** :

$$A = \int_0^{\pi/3} \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad B = \int_0^{\pi/4} \sin^3 \theta d\theta, \quad C = \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

corrigé succinct :

On sait (formule  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ ) que  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$ , donc inutile ici d'utiliser les formules d'Euler. On obtient

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sin 2\theta d\theta = \frac{-1}{4} [\cos(2\theta)]_0^{\pi/3} = -\cos(2\pi/3)/4 + 1/4 = 1/8 + 1/4 \text{ donc}$$

$$A = \frac{3}{8}.$$

Pour calculer B on linéarise  $\sin^3 \theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}}{-8i}$ , donc

$$\sin^3 \theta = \frac{2i \sin(3\theta) - 6i \sin(\theta)}{-8i} = \frac{-\sin 3\theta + 3 \sin \theta}{4}, \text{ et par conséquent}$$

$$B = \left[ \frac{\cos(3\theta)/3 - 3 \cos \theta}{4} \right]_0^{\pi/4} = -\sqrt{2}/24 - 3\sqrt{2}/8 - 1/12 + 3/4 =$$

$$-\sqrt{2}/24 - 9\sqrt{2}/24 - 1/12 + 9/12 = -10\sqrt{2}/24 + 8/12, \text{ et finalement } B = \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}.$$

Pour calculer C on peut linéariser comme les exercices précédents, et on obtient

$$\cos^2 \theta \sin \theta = \frac{1}{4} (\sin 3\theta + \sin \theta), \text{ que l'on sait primitiver.}$$

On peut aussi directement remarquer que  $\cos^2 \theta \sin \theta$  est la dérivée de  $-\cos^3 \theta/3$ , et calculer

$$C = [-\cos^3 \theta/3]_0^{\pi/4} = -\sqrt{2}^3/(8 \times 3) + 1/3 = -2\sqrt{2}/24 + 1/3$$

donc finalement  $C = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}$ .

5. **intégrales généralisées :**

$$A = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \quad B = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \quad C = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+2},$$

$$D = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}, \quad E = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx, \quad F = \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \, dr.$$

corrigé succinct :

Les deux premières intégrales se calculent directement, à l'aide d'une primitive :

$$A = [-1/x]_2^{+\infty} = 1/2$$

et

$$B = [3x^{2/3}/2]_0^1 = 3/2.$$

Pour  $C$ , une primitive de  $\frac{1}{x+2}$  est  $\ln|x+2|$  dont la limite en  $+\infty$  est infinie : ainsi l'intégrale  $C$  n'existe pas (ou diverge).

On peut calculer  $D$  par le changement de variable  $y = \sqrt{x}$  soit  $dy = dx/(2\sqrt{x})$ , et donc

$$D = \int_1^{+\infty} \frac{2dy}{y^2+1}. \text{ On reconnaît la dérivée de } 2 \arctan(y), \text{ donc}$$

$$D = [2 \arctan(y)]_1^{+\infty} = 2(\pi/2 - \pi/4) = \pi/2.$$

Pour calculer  $E$  on peut réaliser une double intégration par parties, comme déjà vu pour les intégrales de la forme  $\exp \times \cos$  ou  $\exp \times \sin$ .

Mais on peut aussi utiliser les nombres complexes, pour remplacer ce calcul par le calcul de primitive d'une unique exponentielle.

$$\text{En effet, } E = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \text{Im}(\cos(x) + i \sin(x)) dx =$$

$$\text{Im}(\int_0^{+\infty} e^{-x} (\cos(x) + i \sin(x)) dx) = \text{Im}(\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{ix} dx),$$

et donc

$$E = \text{Im}(\int_0^{+\infty} e^{(-1+i)x} dx) = \text{Im}([\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}]_0^{+\infty}) = \text{Im}(\frac{-1}{-1+i}) = \text{Im}(\frac{-1(-1-i)}{2}), \text{ et}$$

finallement  $E = \frac{1}{2},$

Pour calculer  $F$  on peut poser  $x = r^2$ , donc les bornes ne changent pas, la différentielle vaut  $dx = 2rdr$ , et donc  $F = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ ,

$$\text{donc } F = [\frac{-e^{-x}}{2}]_0^{+\infty} = 0 - (-1/2), \text{ et ainsi } F = \frac{1}{2}$$

exercices pratiques

1. Calculer la valeur moyenne des courants de période  $T$  suivants (on prend  $I_0 > 0$ ) :

**sinus**  $i_1(t) = I_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ ;

**sinus redressé simple alternance** :  $i_2(t) = I_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$  si  $\sin(\frac{2\pi}{T}t) \geq 0$ , 0 sinon ;

**sinus redressé double alternance** :  $i_3(t) = |I_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)|$ .

corrigé succinct : La valeur moyenne d'une fonction  $i$  de période  $T$  est définie par  $\frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$ .

On calcule successivement

1) la valeur moyenne de  $i_1$  : il s'agit de l'intégrale d'un sinus sur une période, on sait qu'elle est nulle sans nécessité d'explicitier le calcul.

Si on souhaite néanmoins le faire :

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_1(t) dt = \frac{I_0}{T} \int_0^T \sin(\frac{2\pi}{T}t) dt = \frac{I_0}{T} [\frac{-T}{2\pi} \cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^T = \frac{I_0}{T} \frac{-T}{2\pi} (\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0.$$

2) la valeur moyenne de  $i_2$  :  $\sin(x)$  est positif sur  $[0; \pi]$  et négatif sur  $[\pi; 2\pi]$ , donc  $\sin(2\pi/T)$  est positif sur  $[0; T/2]$  et négatif sur  $[T/2; T]$ . Par conséquent, la valeur moyenne de  $i_2$  est

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_2(t) dt = \frac{I_0}{T} \int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t) dt \text{ car } i_2 \text{ est nulle sur } [T/2; T].$$

$$\text{Ainsi, } \frac{I_0}{T} \int_0^T i_2(t) dt = \frac{I_0}{T} \int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t) dt = \frac{I_0}{T} \frac{T}{2\pi} [-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^{T/2} =$$

$$\frac{I_0}{T} \frac{T}{2\pi} (-\cos(\pi) + \cos(0)) = \frac{I_0}{T} \frac{T}{2\pi} (2).$$

Donc la valeur moyenne de  $i_2$  vaut  $\frac{I_0}{\pi}.$

3) pour calculer la valeur moyenne de  $i_3$ , on peut refaire un calcul analogue en enlevant la valeur absolue, pour séparer l'intégrale en deux : sur  $[0; T/2]$  où le sinus est positif, et sur  $[T/2; T]$  où il est négatif. Ainsi,

$$\frac{I_0}{T} \int_0^T |\sin(\frac{2\pi}{T}t)| dt = \frac{I_0}{T} (\int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t) dt + \int_{T/2}^T -\sin(\frac{2\pi}{T}t) dt) =$$

$$\frac{I_0}{T} \frac{T}{2\pi} ([-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^{T/2} - [-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_{T/2}^T) = \frac{I_0}{T} \frac{T}{2\pi} (-\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - \cos(\pi)),$$

soit  $\frac{2I_0}{\pi}.$

Mais il est bien plus simple de remarquer que  $i_3$  est aussi une fonction  $T/2$  périodique ! Et donc calculer simplement  $\frac{I_0}{T/2} \int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t) dt$  : c'est le double de l'intégrale calculée pour  $i_2$ .

Finallement,

La valeur moyenne de  $i_3$  est donc  $\frac{2I_0}{\pi}.$

2. (\*) **loi normale** : Une variable aléatoire  $X$  suit une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  si et seulement si, pour tout  $x$  réel,  $p(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ .

On admet que l'intégrale de Gauss  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr$  vaut  $\sqrt{\pi}$  (voir TD S2).

(a) Calculer l'espérance  $E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$  et la variance  $\text{Var}(X) =$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \text{ de cette loi.}$$

(b) Si  $k \in \mathbb{R}$ , montrer que  $X/k$  suit une loi normale de paramètres  $\mu/k$  et  $\sigma^2/k^2$ .

corrigé succinct :

(a) Dans l'expression de  $E(X)$ , on effectue le changement de variable  $\tau = t - \mu$  : alors

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + \mu) e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau.$$

On va calculer séparément  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau = \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau$  et  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau$

Pour le calcul de  $\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau$  on effectue un nouveau changement de variable

$\tau = \sqrt{2}\sigma r$  l'expression vaut alors  $\frac{\sqrt{2}\sigma\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr$  soit après simplification (tenant compte du résultat admis dans l'énoncé), simplement  $\mu$ .

D'autre part, l'intégrale  $\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau$  vaut (par utilisation de primitive)  $[\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \times -\sigma^2 \times e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}]_{-\infty}^{+\infty}$  autrement dit 0!

Finalement on trouve  $E(X) = \mu + 0 = \mu$ .

De la même manière on peut montrer que  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ .

(b) On cherche la loi de  $Y = X/k$ .

Alors  $p(Y < x) = p(X \leq kx) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{kx} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$  (on applique juste la relation précédente en remplaçant  $x$  par  $kx$ ).

On pose  $t = ku$  ou  $u = k/t$  dans l'intégrale (et donc  $dt = kdu$ ,  $du = kdt$ ) :

Ainsi après changement de variable  $p(Y < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^x e^{-\frac{(ku-\mu)^2}{2\sigma^2}} kdu =$

$\frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu/k)^2}{2\sigma^2/k^2}} du$  (dans l'exponentielle on divise numérateur et dénominateur par  $k^2$ , et par ailleurs on fait sortir le  $k$  apparu au côté de  $du$  de l'intégrale),

donc finalement  $p(Y < x) = \frac{1}{\sigma/k\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu/k)^2}{2(\sigma/k)^2}} du$ .

On est revenu à la définition ci-dessus de la loi normale : cela signifie exactement que  $Y$  suit une loi normale de paramètres d'espérance  $\mu/k$  et d'écart-type  $\sigma/k$ .

3. (\*) On définit les **coefficients de Fourier** d'une fonction de période  $T$  par ( $n$  étant un entier positif) :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt.$$

(a) calculer les coefficients de Fourier d'une fonction constante.

(b) montrer que si  $f$  est paire, pour tout  $n$ ,  $b_n = 0$  (de même  $f$  est impaire,  $a_n = 0$ ).

(c)  $m < M$  sont deux constantes : calculer les coefficients de Fourier de la fonction qui vaut  $M$  entre  $-\frac{T}{4}$  et  $\frac{T}{4}$ ,  $m$  entre  $\frac{T}{4}$  et  $\frac{3T}{4}$ ,  $M$  entre  $\frac{3T}{4}$  et  $\frac{5T}{4}$ , ...

(d) calculer les coefficients pour un cosinus redressé double alternance.

corrigé succinct :

(a) ici  $f(t) = f$  est une constante.

Alors si  $n = 0$ ,  $\cos(0) = 1$  et  $\sin(0) = 0$  donc on a  $a_0 = 2f$  et  $b_0 = 0$ .

Si  $n \neq 0$ , on a  $a_n = \frac{2f}{T} \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}{\frac{2\pi n}{T}} \right]_0^T$  soit  $a_n = \frac{f}{\pi} [\sin(2\pi n) - \sin(0)] = 0$  car  $n$  est un entier donc  $\sin(2\pi n) = 0$ .

De même, on trouve que  $b_n = 0$ .

(b)  $f$  étant périodique de période  $T$  on peut calculer  $b_n$  par la formule  $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$  (on calcule l'intégrale sur une période  $[-T/2; T/2]$  plutôt que  $[0; T]$ ).

On peut alors séparer en deux intégrales :

$$b_n = \frac{2}{T} \left( \int_{-T/2}^0 f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \int_0^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \right).$$

On ne touche pas à la seconde, mais on pose  $u = -t$  dans la première : on obtient alors :

$$b_n = \frac{2}{T} \left( \int_{T/2}^0 f(-u) \sin\left(\frac{-2\pi nu}{T}\right) (-du) + \int_0^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \right).$$

$f$  étant paire et  $\sin$  impaire,  $a_n = \frac{2}{T} \left( \int_{T/2}^0 f(u) \sin\left(\frac{2\pi nu}{T}\right) du + \int_0^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \right)$ , ce qui vaut 0 (c'est la même fonction intégrée, avec les bornes ordonnées en sens inverse).

On montre de même que  $a_n = 0$  si  $f$  est impaire.

(c)  $a_n = \frac{2}{T} \left( \int_0^{T/4} M \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \int_{T/4}^{3T/4} m \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \int_{3T/4}^T M \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \right)$  (on coupe l'intervalle  $[0; T]$  en trois intervalles sur lesquels  $f(t)$  est constante).

On calcule alors par primitive :

$$a_n = \frac{2}{T} \left( M \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}{\frac{2\pi n}{T}} \right]_0^{T/4} + m \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}{\frac{2\pi n}{T}} \right]_{T/4}^{3T/4} + M \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}{\frac{2\pi n}{T}} \right]_{3T/4}^T \right) \text{ soit } \frac{1}{\pi n} (M \sin(\pi n/2) + m(\sin(3\pi n/2) - \sin(\pi n/2)) + M(0 - \sin(3\pi n/2))).$$

Comme  $\sin(3\pi n/2) = -\sin(\pi n/2)$ , on en déduit que  $a_n = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} (M - 2m + M)$  et

$$\text{donc finalement } a_n = \frac{2 \sin(\pi n/2) (M - m)}{\pi n}.$$

De même, on trouve  $b_n = 0$  car la fonction est paire.

(d) Il s'agit de la fonction  $I_0 |\cos(2\pi t/T)|$  (avec un  $I_0 > 0$ ), qui est paire, donc les  $b_n$  sont nuls.

Par ailleurs  $a_n = \frac{2I_0}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)| \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$ .

$\cos(\frac{2\pi t}{T})$  est positif entre  $-T/4$  et  $T/4$ , négatif entre  $-T/2$  et  $-T/4$  et entre  $T/4$  et  $T/2$ .  
On peut donc écrire

$$a_n = \frac{2I_0}{T} \left( - \int_{-T/2}^{-T/4} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt + \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt - \int_{T/4}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \right).$$