exercices théoriques

1. **calcul par utilisation directe de primitives :**

$$A=\int_0^1 \sqrt{3x}\,\mathrm{d}x,\qquad B=\int_0^1 \frac{2\mathrm{d}x}{x^2+1},\qquad C=\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}},$$
$$D=\int_0^{\sin\theta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad E=\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}},\qquad F=\int_1^8 \frac{\mathrm{d}V}{V^\gamma}\quad(\gamma>0).$$

corrigé succinct : A : primitive $\frac{2}{9}(3x)^{3/2}$, $\boxed{A=2/\sqrt{3}}$; B : primitive $2\arctan x$, $\boxed{B=\pi/2}$;

C : primitive $\sqrt{x^2+1}$, $\boxed{C=\sqrt{2}-1}$; D : primitive $\arcsin x$, $\boxed{D=\theta \text{ si } \theta \text{ dans } [-\pi/2;\pi/2]}$;

E : primitive $\mathrm{argch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, donc $\boxed{E=\ln(4+\sqrt{15})-\ln(2+\sqrt{3}).}$

F : si $\gamma\neq 1$, une primitive est $\dfrac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}$ donc $\boxed{F=\dfrac{8^{-\gamma+1}-1}{-\gamma+1}.}$

si $\gamma=1$, une primitive est $\ln(V)$ donc $\boxed{F=\ln(8)}$

2. **calcul par intégrations par parties :**

$$A=\int_1^X \ln x\,\mathrm{d}x,\qquad B=\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x,\qquad C=\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x,$$
$$D=\int_0^{\pi/2}(3x^3-2x)\cos x\,\mathrm{d}x,\qquad E=\int_0^1 e^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x,\qquad F=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$$

corrigé succinct : A : avec $u'(x)=1$ et $v(x)=\ln x$ on trouve $\boxed{A=X\ln X-X+1.}$

B : on intègre par parties en dérivant x en 1 et en primitivant $\cos x$ en $\sin x$. $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x=[x\sin x]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x=[x\sin x]_0^{\pi/2}-[-\cos x]_0^{\pi/2}$. Ainsi, $\boxed{B=\pi/2-1.}$

C : avec $u'(x)=e^x$ et $v(x)=x^2$, on trouve $C=e-2\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$, et une nouvelle intégration par parties donne $\boxed{C=e-2.}$

D : avec trois intégrations par parties successives, où l'on dérive le polynôme et primitive le cos ou sin, on trouve $\boxed{D=3\pi^3/8-10\pi+20.}$

E : on peut intégrer deux fois par parties en primitivant à chaque fois l'exponentielle et en dérivant le sinus.
Ainsi, $E=[e^x\cos(2x)]_0^1+2\int_0^1 e^x\sin(2x)\mathrm{d}x=$ $e\cos(2)+2([e^x\sin(2x)]_0^1-2\int_0^1 e^x\cos(2x)\mathrm{d}x)=e\cos(2)-1+2e\sin(2)-4E$, et donc finalement $5E=e\cos(2)-1+2e\sin(2)$, donc $\boxed{E=\dfrac{e\cos(2)-1+2e\sin(2)}{5}.}$

F : on part de $I=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\pi/4$ que l'on intègre par parties, en dérivant la fraction et en primitivant 1. On obtient alors $I=1/2+2\int_0^1\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}=1/2+2I-2F$ (en remarquant que $x^2=x^2+1-1$).

Par conséquent, $2F=I+1/2=\pi/4+1/2$ donc $\boxed{F=\pi/8+1/4.}$

3. **calculs par changement de variable :** on posera $x=\cos\theta$ (A), $y=\sqrt{2}t$ (B), $t=\tan\frac{\theta}{2}$ (C), $y=x^2$ (D), $y=\cos x$ (E), $y=e^x$ (F).

$$A=\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,\qquad B=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1},\qquad C=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta},$$
$$D=\int_0^1 x^3e^{x^2}\,\mathrm{d}x,\qquad E=\int_0^{\pi/4}\tan x\,\mathrm{d}x,\qquad F=\int_0^1\frac{e^{2x}+2e^x}{e^x+1}\,dx.$$

corrigé succinct : A : en posant $u=\cos\theta$, $du=-\sin\theta\ d\theta$, $\cos^2\theta=u^2$, et donc $A=\int_1^{\sqrt{2}/2}-u^2\,du$: $\boxed{A=\dfrac{4-\sqrt{2}}{12}.}$

B : en posant $y=\sqrt{2}t$ on a $dy=\sqrt{2}dt$ et $B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}x}\dfrac{dy}{y^2+1}$, $\boxed{B=\dfrac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}.}$

C : on pose $t=\tan\theta/2$. Alors $dt=\frac{1}{2}(1+t^2)d\theta$, donc $d\theta=2dt/(1+t^2)$. De plus, $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$, et donc $C=\displaystyle\int_{\tan\pi/8}^{1}\frac{1-t^2}{2t}dt$ après simplification. Ainsi, $C=\frac{1}{2}[\ln t-t^2/2]_{\tan\pi/8}^{1}$.

Mais si $u=\tan\pi/8$, $\tan\frac{\pi}{4}=\dfrac{2u}{1-u^2}$ donc $u=\sqrt{2}-1$, et finalement

$$\boxed{C=\frac{1-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)}{2}.}$$

D il faut enchaîner le changement de variable puis une intégration par parties. Au final l'intégrale vaut $1/2$.

$$E=-\int_1^{\sqrt{2}/2}\mathrm{d}y/y=\ln(\sqrt{2})$$

$$F=\int_1^e\frac{y+2}{y+1}\mathrm{d}y=\int_1^e 1+\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y=(e-1)+\ln(1+e)-\ln(2)$$

4. **calcul par décomposition en éléments simples :**

$A=\displaystyle\int_1^2\frac{x^2+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ (mettre la fraction sous la forme $1+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x+1}$),

$B=\displaystyle\int_0^1\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$ (mettre la fraction sous la forme $\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta x+\gamma}{x^2+1}$).

corrigé succinct : A : par identification on trouve $\dfrac{x^2+1}{x^2+x}=1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+1}$, donc une primitive de la fonction intégrée sur $[1,2]$ est $x+\ln x-2\ln(x+1)$, et par conséquent

$$\boxed{A=1+3\ln 2-2\ln 3.}$$

B : par identification on trouve $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2+1}$, donc une primitive de la fonction intégrée sur $[0,1]$ est $-\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x$, et donc

$$\boxed{B=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}.}$$

5. **calcul par linéarisation de polynômes trigonométriques :**

$$A=\int_0^{\pi/3}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,\qquad B=\int_0^{\pi/4}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta,\qquad C=\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

corrigé succinct : $A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\sin 2\theta\,d\theta$ donc $\boxed{A=\frac{3}{8}.}$

On sait (revoir le cours sur les nombres complexes) que $\sin^3\theta=\frac{1}{4}(-\sin 3\theta+3\sin\theta)$, et par conséquent on calcule $\boxed{B=\frac{2}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{12}.}$

On linéarise $\cos^2\theta\,\sin\theta=\frac{1}{4}(\sin 3\theta+\sin\theta)$, donc $\boxed{C=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{12}.}$

On sait que $\cos^4\theta=\dfrac{\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3}{8}$, et donc $\boxed{D=\frac{3\pi}{16}.}$

(revoir la feuille de TD sur la trigonométrie)

6. **intégrales généralisées :**

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2},\qquad B=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}},\qquad C=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)},$$

$$D=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)},\qquad E=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x,\qquad F=\int_0^{+\infty}re^{-r^2}\,dr.$$

corrigé succinct : $\boxed{A=[-1/x]_1^{+\infty}=1,}$ $\boxed{B=[2\sqrt{x}]_0^1=2,}$

$C=[\ln x-\ln(x+1)]_1^{+\infty}=[\ln\dfrac{x}{x+1}]_1^{+\infty}$ donc $\boxed{C=\ln 2}$ (on regroupe les deux logarithmes pour éviter une forme indeterminée),

$D=[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_1^{+\infty}$, $\boxed{D=\frac{\ln 2}{2}.}$

$E=\mathrm{im}(\int_0^{+\infty}e^{(-1+i)x}\,\mathrm{d}x)=\mathrm{im}([\dfrac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}]_0^{+\infty})=\mathrm{im}(\dfrac{-1}{-1+i})$, $\boxed{E=\frac{1}{2},}$

$$\boxed{F=[\frac{e^{-r^2}}{2}]_0^{+\infty}=\frac{1}{2},}$$

exercices pratiques

1. **loi normale :** Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si et seulement si, pour tout x réel, $p(X<x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$.

On admet que l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-r^2}\mathrm{d}r$ vaut $\sqrt{\pi}$ (voir TD S2).

(a) Calculer l'espérance $E(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$ et la variance $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$ de cette loi.

(b) Si $k\in\mathbb{R}$, montrer que X/k suit une loi normale de paramètres μ/k et σ^2/k^2.

corrigé succinct :

(a) Dans l'expression de $E(X)$, on effectue le changement de variable $\tau = t - \mu$, alors $E(X) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\tau+\mu)e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$.
L'intégrale $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$ vaut $\dfrac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$. Si on effectue un nouveau changement de variable $\tau = \sqrt{2}\sigma\ r$ l'expression vaut alors

$$\frac{\sqrt{2}\sigma\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-r^2}\mathrm{d}r$$

soit μ.
D'autre part, l'intégrale $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\tau$ vaut (par utilisation de primitive) $[\dfrac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\times -\sigma^2\times e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}]_{-\infty}^{+\infty}$ autrement dit 0 !
Finalement on trouve $E(X) = \mu + 0 = \mu$.
De la même manière on montre que $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

(b) On cherche la loi de $Y = X/k$.
Alors $p(Y < x) = p(X \le kx) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{t=-\infty}^{kx}e^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$ (on applique juste la relation précédente en remplaçant x par kx).
On pose $t = ku$ ou $u = k/t$ dans l'intégrale (et donc $\mathrm{d}t = k\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}u = k\mathrm{d}t$) :
Ainsi après changement de variable $p(Y < x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{u=-\infty}^{x}e^{-\dfrac{(ku-\mu)^2}{2\sigma^2}}k\mathrm{d}u = \dfrac{k}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{u=-\infty}^{x}e^{-\dfrac{(u-\mu/k)^2}{2\sigma^2/k^2}}\mathrm{d}u$ (dans l'exponentielle on divise numérateur et dénominateur par k^2, et par ailleurs on fait sortir le k apparu au côté de $\mathrm{d}u$ de l'intégrale),
donc finalement $p(Y < x) = \dfrac{1}{\sigma/k\sqrt{2\pi}}\int_{u=-\infty}^{x}e^{-\dfrac{(u-\mu/k)^2}{2(\sigma/k)^2}}\mathrm{d}u$.
On est revenu à la définition ci-dessus de la loi normale : cela signifie exactement que Y suit une loi normale de paramètres d'espérance μ/k et d'écart-type σ/k.

2. Calculer la valeur moyenne des courants de période T suivants (on prend $I_0 > 0$) :
sinus $i_1(t) = I_0\sin(\frac{2\pi}{T}t)$;
sinus redressé simple alternance : $i_2(t) = I_0\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ si $\sin(\frac{2\pi}{T}t) \ge 0$, 0 sinon ;
sinus redressé double alternance : $i_3(t) = |I_0\sin(\frac{2\pi}{T}t)|$.

corrigé succinct : On veut calculer les $\dfrac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt$. On trouve respectivement 0, $\dfrac{I_0}{\pi}$ et $\dfrac{2I_0}{\pi}$.

3. On définit les **coefficients de Fourier** d'une fonction de période T par (n étant un entier positif) :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t.$$

(a) calculer les coefficients de Fourier d'une fonction constante.
(b) montrer que si f est paire, pour tout n, $b_n = 0$ (de même f est impaire, $a_n = 0$).
(c) $m < M$ sont deux constantes : calculer les coefficients de Fourier de la fonction qui vaut M entre $-\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{4}$, m entre $\frac{T}{4}$ et $\frac{3T}{4}$, M entre $\frac{3T}{4}$ et $\frac{5T}{4}$, ...
(d) calculer les coefficients pour un cosinus redressé double alternance.

corrigé succinct :

(a) ici $f(t) = f$ est une constante.
Alors si $n = 0$, $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ donc on a $a_0 = 2f$ et $b_0 = 0$.
Si $n \ne 0$, on a $a_n = \dfrac{2f}{T}[\dfrac{\sin(\dfrac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_0^T$ soit $a_n = \dfrac{f}{\pi}[\sin(2\pi n) - \sin(0)] = 0$ car n est un entier donc $\sin(2\pi n) = 0$.
De même, on trouve que $b_n = 0$.

(b) f étant périodique de période T on peut calculer b_n par la formule $b_n = \dfrac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(\dfrac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t$ (on calcule l'intégrale sur une période $[-T/2;T/2]$ plutôt que $[0;T]$).
On peut alors séparer en deux intégrales :
$b_n = \dfrac{2}{T}(\int_{-T/2}^{0}f(t)\sin(\dfrac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t + \int_0^{T/2}f(t)\sin(\dfrac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t)$.
On ne touche pas à la seconde, mais on pose $u = -t$ dans la première : on obtient alors :
$b_n = \dfrac{2}{T}(\int_{T/2}^{0}f(-u)\sin(\dfrac{-2\pi nu}{T})\,(-\mathrm{d}u) + \int_0^{T/2}f(t)\sin(\dfrac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t)$.
f étant paire et sin impaire, $a_n = \dfrac{2}{T}(\int_{T/2}^{0}f(u)\sin(\dfrac{2\pi nu}{T})\,\mathrm{d}u + \int_0^{T/2}f(t)\cos(\dfrac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t)$, ce qui vaut 0 (c'est la même fonction intégrée, avec les bornes ordonnées en sens inverse).
On montre de même que $a_n = 0$ si f est impaire.

(c) $a_n = \dfrac{2}{T}(\int_0^{T/4}M\cos(\dfrac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t + \int_{T/4}^{3T/4}m\cos(\dfrac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t + \int_{3T/4}^{T}M\cos(\dfrac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t)$
(on coupe l'intervalle $[0;T]$ en trois intervalles sur lesquels $f(t)$est constante).
On calcule alors par primitive :
$a_n = \dfrac{2}{T}(M[\dfrac{\sin(\dfrac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_0^{T/4} + m[\dfrac{\sin(\dfrac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_{T/4}^{3T/4} + M[\dfrac{\sin(\dfrac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_{3T/4}^{T})$ soit $\dfrac{1}{\pi n}(M\sin(\pi n/2) + m(\sin(3\pi n/2) - \sin(\pi n/2)) + M(0 - \sin(3\pi n/2))$.
Comme $\sin(3\pi n/2) = -\sin(\pi n/2)$, on en déduit que $a_n = \dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}(M - 2m + M)$
et donc finalement $a_n = \dfrac{2\sin(\pi n/2)(M-m)}{\pi n}$.
De même, on trouve $b_n = 0$ car la fonction est paire

(d) Il s'agit de la fonction $I_0|\cos(2\pi t/T)|$ (avec un $I_0 > 0$), qui est paire, donc les b_n sont nuls.

Par ailleurs $a_n = \frac{2I_0}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |\cos(\frac{2\pi t}{T})| \cos(\frac{2\pi n t}{T})\ \mathrm{d}t$.

$\cos(\frac{2\pi t}{T})$ est positif entre $-T/4$ et $T/4$, négatif entre $-T/2$ et $-T/4$ et entre $T/4$ et $T/2$. On peut donc écrire

$$a_n = \frac{2I_0}{T}\left(-\int_{-T/2}^{-T/4} \cos(\frac{2\pi t}{T}) \cos(\frac{2\pi n t}{T})\ \mathrm{d}t + \int_{-T/4}^{T/4} \cos(\frac{2\pi t}{T}) \cos(\frac{2\pi n t}{T})\ \mathrm{d}t - \int_{T/4}^{T/2} \cos(\frac{2\pi t}{T}) \cos(\frac{2\pi n t}{T})\ \mathrm{d}t\right).$$