

exercices théoriques

1. calcul par utilisation directe de primitives :

$$A = \int_0^1 \sqrt{3x} \, dx,$$

$$C = \int_0^1 \frac{2dx}{x^2 + 1},$$

$$E = \int_0^{\sin \theta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$B = \int_{-2}^4 (2x+1)^2 + x^3 \, dx,$$

$$D = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$F = \int_1^8 \frac{dV}{V^\gamma} \quad (\gamma > 0).$$

corrigé succinct : A : primitive $\frac{2}{9}(3x)^{3/2}$, $A = 2/\sqrt{3}$; B : primitive $(2x+1)^3/6 + x^4/4$,

donc l'intégrale vaut $B = (9^3/6 + 4^4/4) - ((-3)^3/6 + (-2)^4/4) = 3^5/2 + 2^6 + 9/2 - 4 = 243/2 + 64 + 9/2 - 4 = 126 + 60 = 186$,

C : primitive $2 \arctan x$, $B = \pi/2$;

D : primitive $\sqrt{x^2 + 1}$, $C = \sqrt{2} - 1$;

E : primitive $\arcsin x$,

$D = \theta$ si θ dans $[-\pi/2; \pi/2]$;

F : si $\gamma \neq 1$, une primitive est $\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}$ donc $F = \frac{8^{-\gamma+1} - 1}{-\gamma+1}$.

si $\gamma = 1$, une primitive est $\ln(V)$ donc $F = \ln(8)$

2. calcul par intégrations par parties :

$$A = \int_1^X \ln x \, dx,$$

$$B = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx,$$

$$C = \int_0^1 x^2 e^x \, dx,$$

$$D = \int_0^{\pi/2} (3x^3 - 2x) \cos x \, dx,$$

$$E = \int_0^1 e^x \cos(2x) \, dx,$$

$$F = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

corrigé succinct : A : on intègre $1 \times \ln(x)$ par parties : on dérive le $\ln(x)$ et on primitive le 1.

$\ln(x) \xrightarrow{D} 1/x$ et $1 \xrightarrow{P} x$,

donc $A = [x \ln(x)]_1^X - \int_1^X x/x \, dx = (X \ln(X) - 0) + X - 1$ et donc

$$A = X \ln X - X + 1.$$

B : on intègre par parties en dérivant x en 1 et en primitivant $\cos x$ en $\sin x$.
 $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - [-\cos x]_0^{\pi/2}$. Ainsi,

$$B = \pi/2 - 1.$$

C : avec $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x^2$,

c'est-à-dire $x^2 \xrightarrow{D} 2x$ et $e^x \xrightarrow{P} e^x$,

on obtient $C = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x \, dx = e - 2 \int_0^1 x e^x \, dx$.

Il faut recommencer une nouvelle intégration par parties...

$x \xrightarrow{D} 1$ et $e^x \xrightarrow{P} e^x$,

qui donne $C = e - 2([x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx)$

pour obtenir finalement $C = e - 2$.

D : avec trois intégrations par parties successives, où l'on dérive le polynôme et primitive le cos

ou sin, on trouve $D = 3\pi^3/8 - 10\pi + 20$.

E : on peut intégrer deux fois par parties en primitivant à chaque fois l'exponentielle et en dérivant le sinus/cosinus :

La première i.p.p avec $\cos(2x) \xrightarrow{D} -2 \sin(2x)$ et $e^x \xrightarrow{P} e^x$, on obtient

$$E = [e^x \cos(2x)]_0^1 - \int_0^1 -2e^x \sin(2x) \, dx = [e^x \cos(2x)]_0^1 + 2 \int_0^1 e^x \sin(2x) \, dx$$

La deuxième i.p.p avec $\sin(2x) \xrightarrow{D} 2 \cos(2x)$ et $e^x \xrightarrow{P} e^x$, on obtient

$$E = [e^x \cos(2x)]_0^1 + 2([e^x \sin(2x)]_0^1 - \int_0^1 2e^x \cos(2x) \, dx)$$

donc

$$E = e \cos(2) - 1 + 2([e^x \sin(2x)]_0^1 - 2 \int_0^1 e^x \cos(2x) \, dx) = e \cos(2) - 1 + 2e \sin(2) - 4E,$$

et donc finalement

$$5E = e \cos(2) - 1 + 2e \sin(2), \text{ donc } E = \frac{e \cos(2) - 1 + 2e \sin(2)}{5}.$$

F :

on part de $H = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi/4$, que l'on intègre par parties, en dérivant la fraction et en primitivant 1.

$$\text{On obtient alors } H = [\frac{x}{1+x^2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2} \, dx = 1/2 - 0/2 + 2 \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx.$$

Mais $x^2 = x^2 + 1 - 1$, donc

$$H = 1/2 + 2 \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) - 1}{(1 + x^2)^2} dx = 1/2 + 2 \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx \right) = 1/2 + 2H - 2F,$$

et finalement, $2F = H + 1/2$ donc $2F = \pi/4 + 1/2$ donc $F = \pi/8 + 1/4$.

3. **calculs par changement de variable** : on posera $x = \cos \theta$ (A), $y = \sqrt{2}t$ (B), $t = \tan \frac{\theta}{2}$ (C), $y = x^2$ (D), $y = \cos x$ (E), $y = e^x$ (F).

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta, \quad B = \int_0^x \frac{dt}{2t^2 + 1}, \quad C = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \cos \theta) \sin \theta},$$

$$D = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx, \quad E = \int_0^{\pi/4} \tan x dx, \quad F = \int_0^1 \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^x + 1} dx.$$

corrigé succinct : A : en posant $u = \cos \theta$:

u varie entre $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$,
la différentielle vaut $du = -\sin \theta d\theta$,
et par ailleurs $\cos^2 \theta = u^2$,

donc finalement $A = \int_1^{\sqrt{2}/2} -u^2 du = [-u^3/3]_1^{\sqrt{2}/2} = \frac{-\sqrt{2}/4 + 1}{3}$: $A = \frac{4 - \sqrt{2}}{12}$.

B : en posant $y = \sqrt{2}t$:
 y varie entre 0 et $\sqrt{2}x$,
 $dy = \sqrt{2}dt$,

et donc $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}x} \frac{dy}{y^2 + 1}$, et l'on reconnaît la dérivée de la fonction arctan,

donc finalement $B = \frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}$.

C : on pose $t = \tan \theta/2$.

Alors $dt = \frac{1}{2}(1 + t^2)d\theta$, donc $d\theta = 2dt/(1 + t^2)$.

De plus, $\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$,

et donc $C = \int_{\tan \pi/6}^{\tan \pi/4} \frac{1 - t^2}{2t} dt$ après simplification. Ainsi, $C = \frac{1}{2} [\ln t - t^2/2]_{1/\sqrt{3}}^1$.

Finalement $C = \frac{1 - \sqrt{2} + \ln(3)/2 + 1/6}{2}$.

D il faut enchaîner le changement de variable puis une intégration par parties. Au final

l'intégrale vaut $D = 1/2$.

E a été pris en exemple en cours : on a vu que $E = - \int_1^{\sqrt{2}/2} dy/y = -[\ln(y)]_1^{\sqrt{2}/2} = -\ln(\sqrt{2}/2) + \ln(2) = \ln(\sqrt{2})$, donc

$E = \ln(2)/2$

Pour l'intégrale F, on pose $y = e^x$ donc :

y varie entre $e^0 = 1$ et $e^1 = e$,

$dy = e^x dx$ donc $dx = dy/e^x = dy/y$,

et ainsi

$$F = \int_1^e \frac{y^2 + 2y}{y + 1} \frac{dy}{y} = \int_1^e \frac{y + 2}{y + 1} dy = \int_1^e 1 + \frac{1}{y + 1} dy = (e - 1) + \ln(1 + e) - \ln(2),$$

donc finalement $E = e - 1 + \ln(1 + e) - \ln(2)$

4. **calcul par linéarisation de polynômes trigonométriques** :

$$A = \int_0^{\pi/3} \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad B = \int_0^{\pi/4} \sin^3 \theta d\theta, \quad C = \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

corrigé succinct :

On sait (formule $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$) que $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$, donc inutile ici d'utiliser les formules d'Euler. On obtient

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sin 2\theta d\theta = \frac{-1}{4} [\cos(2\theta)]_0^{\pi/3} = -\cos(2\pi/3)/4 + 1/4 = 1/8 + 1/4$$
 donc

$A = \frac{3}{8}$.

Pour calculer B on linéarise $\sin^3 \theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}}{-8i}$, donc

$$\sin^3 \theta = \frac{2i \sin(3\theta) - 6i \sin(\theta)}{-8i} = \frac{-\sin 3\theta + 3 \sin \theta}{4},$$
 et par conséquent

$$B = \left[\frac{\cos(3\theta)/3 - 3 \cos \theta}{4} \right]_0^{\pi/4} = -\sqrt{2}/24 - 3\sqrt{2}/8 - 1/12 + 3/4 =$$

$$-\sqrt{2}/24 - 9\sqrt{2}/24 - 1/12 + 9/12 = -10\sqrt{2}/24 + 8/12, \text{ et finalement } B = \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}.$$

Pour calculer C on peut linéariser comme les exercices précédents, et on obtient

$$\cos^2 \theta \sin \theta = \frac{1}{4} (\sin 3\theta + \sin \theta), \text{ que l'on sait primitiver.}$$

On peut aussi directement remarquer que $\cos^2 \theta \sin \theta$ est la dérivée de $-\cos^3 \theta/3$, et calculer

$$C = [-\cos^3 \theta/3]_0^{\pi/4} = -\sqrt{2}^3/(8 \times 3) + 1/3 = -2\sqrt{2}/24 + 1/3$$

donc finalement $C = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}$.

5. **intégrales généralisées** :

$$A = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \quad B = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \quad C = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+2},$$

$$D = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}, \quad E = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx, \quad F = \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \, dr.$$

corrigé succinct :

Les deux premières intégrales se calculent directement, à l'aide d'une primitive :

$$A = [-1/x]_2^{+\infty} = 1/2$$

et

$$B = [3x^{2/3}/2]_0^1 = 3/2.$$

Pour C , une primitive de $\frac{1}{x+2}$ est $\ln|x+2|$ dont la limite en $+\infty$ est infinie : ainsi l'intégrale C n'existe pas (ou diverge).

On peut calculer D par le changement de variable $y = \sqrt{x}$ soit $dy = dx/(2\sqrt{x})$, et donc

$$D = \int_1^{+\infty} \frac{2dy}{y^2+1}. \text{ On reconnaît la dérivée de } 2 \arctan(y), \text{ donc}$$

$$D = [2 \arctan(y)]_1^{+\infty} = 2(\pi/2 - \pi/4) = \pi/2.$$

Pour calculer E on peut réaliser une double intégration par parties, comme déjà vu pour les intégrales de la forme $\exp \times \cos$ ou $\exp \times \sin$.

Mais on peut aussi utiliser les nombres complexes, pour remplacer ce calcul par le calcul de primitive d'une unique exponentielle.

$$\text{En effet, } E = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \text{Im}(\cos(x) + i \sin(x)) dx =$$

$$\text{Im}(\int_0^{+\infty} e^{-x} (\cos(x) + i \sin(x)) dx) = \text{Im}(\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{ix} dx),$$

et donc

$$E = \text{Im}(\int_0^{+\infty} e^{(-1+i)x} dx) = \text{Im}([\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}]_0^{+\infty}) = \text{Im}(\frac{-1}{-1+i}) = \text{Im}(\frac{-1(-1-i)}{2}), \text{ et}$$

$$\text{finalement } E = \frac{1}{2},$$

Pour calculer F on peut poser $x = r^2$, donc les bornes ne changent pas, la différentielle vaut $dx = 2rdr$, et donc $F = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$,

$$\text{donc } F = [\frac{-e^{-x}}{2}]_0^{+\infty} = 0 - (-1/2), \text{ et ainsi } F = \frac{1}{2}$$

exercices pratiques

1. Calculer la valeur moyenne des courants de période T suivants (on prend $I_0 > 0$) :

sinus $i_1(t) = I_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$;

sinus redressé simple alternance : $i_2(t) = I_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ si $\sin(\frac{2\pi}{T}t) \geq 0$, et sinon $i_2(t) = 0$;

sinus redressé double alternance : $i_3(t) = |I_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)|$.

corrigé succinct : La valeur moyenne d'une fonction i de période T est définie par $\frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$.

On calcule successivement

1) la valeur moyenne de i_1 : il s'agit de l'intégrale d'un sinus sur une période, on sait qu'elle est nulle sans nécessité d'explicitier le calcul.

Si on souhaite néanmoins le faire :

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_1(t) dt = \frac{I_0}{T} \int_0^T \sin(\frac{2\pi}{T}t) dt = \frac{I_0}{T} [\frac{-T}{2\pi} \cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^T = \frac{I_0}{T} \frac{-T}{2\pi} (\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0.$$

2) la valeur moyenne de i_2 : $\sin(x)$ est positif sur $[0; \pi]$ et négatif sur $[\pi; 2\pi]$, donc $\sin(2\pi/T)$ est positif sur $[0; T/2]$ et négatif sur $[T/2; T]$. Par conséquent, la valeur moyenne de i_2 est

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_2(t) dt = \frac{I_0}{T} \int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t) dt \text{ car } i_2 \text{ est nulle sur } [T/2; T].$$

$$\text{Ainsi, } \frac{I_0}{T} \int_0^T i_2(t) dt = \frac{I_0}{T} \int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t) dt = \frac{I_0}{T} \frac{T}{2\pi} [-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^{T/2} =$$

$$\frac{I_0}{T} \frac{T}{2\pi} (-\cos(\pi) + \cos(0)) = \frac{I_0}{T} \frac{T}{2\pi} (2) = \frac{I_0}{\pi}.$$

Donc la valeur moyenne de i_2 vaut $\frac{I_0}{\pi}$.

3) pour calculer la valeur moyenne de i_3 , on peut refaire un calcul analogue en enlevant la valeur absolue, pour séparer l'intégrale en deux : sur $[0; T/2]$ où le sinus est positif, et sur $[T/2; T]$ où il est négatif. Ainsi, $\frac{I_0}{T} \int_0^T |\sin(\frac{2\pi}{T}t)| dt = \frac{I_0}{T} (\int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t) dt + \int_{T/2}^T -\sin(\frac{2\pi}{T}t) dt) =$

$$\frac{I_0}{T} \frac{T}{2\pi} ([-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_0^{T/2} - [-\cos(\frac{2\pi}{T}t)]_{T/2}^T) = \frac{I_0}{T} \frac{T}{2\pi} (-\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - \cos(\pi)),$$

$$\text{soit } \frac{2I_0}{\pi}.$$

Mais il est bien plus simple de remarquer que i_3 est aussi une fonction $T/2$ périodique ! Et donc calculer simplement $\frac{I_0}{T/2} \int_0^{T/2} \sin(\frac{2\pi}{T}t) dt$: c'est le double de l'intégrale calculée pour i_2 .

Finalement,

La valeur moyenne de i_3 est donc $\frac{2I_0}{\pi}$.

2. (*) **loi normale** : Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si et seulement si, pour tout x réel, $p(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$.

On admet que l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr$ vaut $\sqrt{\pi}$ (voir TD S2).

(a) Calculer l'espérance $E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ et la variance $\text{Var}(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ de cette loi.

(b) Si $k \in \mathbb{R}$, montrer que X/k suit une loi normale de paramètres μ/k et σ^2/k^2 .

corrigé succinct :

(a) Dans l'expression de $E(X)$, on effectue le changement de variable $\tau = t - \mu$: alors

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + \mu) e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau.$$

On va calculer séparément $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau = \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau$ et $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau$

Pour le calcul de $\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau$ on effectue un nouveau changement de variable

$\tau = \sqrt{2}\sigma r$ l'expression vaut alors $\frac{\sqrt{2}\sigma\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr$ soit après simplification (tenant compte du résultat admis dans l'énoncé), simplement μ .

D'autre part, l'intégrale $\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau$ vaut (par utilisation de primitive) $[\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \times -\sigma^2 \times e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}]_{-\infty}^{+\infty}$ autrement dit 0!

Finalement on trouve $E(X) = \mu + 0 = \mu$.

De la même manière on peut montrer que $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

(b) On cherche la loi de $Y = X/k$.

Alors $p(Y < x) = p(X \leq kx) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{kx} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ (on applique juste la relation précédente en remplaçant x par kx).

On pose $t = ku$ ou $u = k/t$ dans l'intégrale (et donc $dt = kdu$, $du = kdt$) :

Ainsi après changement de variable $p(Y < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^x e^{-\frac{(ku-\mu)^2}{2\sigma^2}} kdu =$

$\frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu/k)^2}{2\sigma^2/k^2}} du$ (dans l'exponentielle on divise numérateur et dénominateur par k^2 , et par ailleurs on fait sortir le k apparu au côté de du de l'intégrale),

donc finalement $p(Y < x) = \frac{1}{\sigma/k\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu/k)^2}{2(\sigma/k)^2}} du$.

On est revenu à la définition ci-dessus de la loi normale : cela signifie exactement que Y suit une loi normale de paramètres d'espérance μ/k et d'écart-type σ/k .

3. (*) On définit les **coefficients de Fourier** d'une fonction de période T par (n étant un entier positif) :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt.$$

(a) calculer les coefficients de Fourier d'une fonction constante.

(b) montrer que si f est paire, pour tout n , $b_n = 0$ (de même f est impaire, $a_n = 0$).

(c) $m < M$ sont deux constantes : calculer les coefficients de Fourier de la fonction qui vaut M entre $-\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{4}$, m entre $\frac{T}{4}$ et $\frac{3T}{4}$, M entre $\frac{3T}{4}$ et $\frac{5T}{4}$, ...

(d) calculer les coefficients pour un cosinus redressé double alternance.

corrigé succinct :

(a) ici $f(t) = f$ est une constante.

Alors si $n = 0$, $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ donc on a $a_0 = 2f$ et $b_0 = 0$.

Si $n \neq 0$, on a $a_n = \frac{2f}{T} \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}{\frac{2\pi n}{T}} \right]_0^T$ soit $a_n = \frac{f}{\pi} [\sin(2\pi n) - \sin(0)] = 0$ car n est un entier donc $\sin(2\pi n) = 0$.

De même, on trouve que $b_n = 0$.

(b) f étant périodique de période T on peut calculer b_n par la formule $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$ (on calcule l'intégrale sur une période $[-T/2; T/2]$ plutôt que $[0; T]$).

On peut alors séparer en deux intégrales :

$$b_n = \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \int_0^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \right).$$

On ne touche pas à la seconde, mais on pose $u = -t$ dans la première : on obtient alors :

$$b_n = \frac{2}{T} \left(\int_{T/2}^0 f(-u) \sin\left(\frac{-2\pi nu}{T}\right) (-du) + \int_0^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \right).$$

f étant paire et \sin impaire, $a_n = \frac{2}{T} \left(\int_{T/2}^0 f(u) \sin\left(\frac{2\pi nu}{T}\right) du + \int_0^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \right)$, ce qui vaut 0 (c'est la même fonction intégrée, avec les bornes ordonnées en sens inverse).

On montre de même que $a_n = 0$ si f est impaire.

(c) $a_n = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/4} M \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \int_{T/4}^{3T/4} m \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \int_{3T/4}^T M \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \right)$ (on coupe l'intervalle $[0; T]$ en trois intervalles sur lesquels $f(t)$ est constante).

On calcule alors par primitive :

$$a_n = \frac{2}{T} \left(M \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}{\frac{2\pi n}{T}} \right]_0^{T/4} + m \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}{\frac{2\pi n}{T}} \right]_{T/4}^{3T/4} + M \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}{\frac{2\pi n}{T}} \right]_{3T/4}^T \right) \text{ soit } \frac{1}{\pi n} (M \sin(\pi n/2) + m(\sin(3\pi n/2) - \sin(\pi n/2)) + M(0 - \sin(3\pi n/2))).$$

Comme $\sin(3\pi n/2) = -\sin(\pi n/2)$, on en déduit que $a_n = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} (M - 2m + M)$ et

$$\text{donc finalement } a_n = \frac{2 \sin(\pi n/2) (M - m)}{\pi n}.$$

De même, on trouve $b_n = 0$ car la fonction est paire.

(d) Il s'agit de la fonction $I_0 |\cos(2\pi t/T)|$ (avec un $I_0 > 0$), qui est paire, donc les b_n sont nuls.

Par ailleurs $a_n = \frac{2I_0}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)| \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$.

$\cos(\frac{2\pi t}{T})$ est positif entre $-T/4$ et $T/4$, négatif entre $-T/2$ et $-T/4$ et entre $T/4$ et $T/2$.
On peut donc écrire

$$a_n = \frac{2I_0}{T} \left(- \int_{-T/2}^{-T/4} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt - \int_{T/4}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \right).$$