TD 6 : Equations différentielles : corrigé

exercices théoriques

1. variables séparables

(a) $y' = xe^y$,
(b) $yy' = x$,
(c) $y' = \sqrt{y}$.

corrigé succinct : On peut écrire chacune de ces équations sous la forme $y'f(y) = g(x)$ pour f et g deux fonctions. En considérant des primitives F et G de f et g, l'équation se ramène alors à résoudre $F(y) = G(x) + c$, qui n'est plus une équation différentielle mais une "simple" équation numérique.

(a) L'équation $y' = xe^y$ est équivalente à $y'e^{-y} = x$, donc a $-e^{-y} = x^2/2 + c$, soit encore à $\boxed{y(x) = -\ln(-x^2/2 - c),\ c \in \mathbb{R}.}$ Pour que les solutions soient définies, il faut donc que c soit strictement négatif, et la solution est alors définie sur $]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$.

(b) $yy' = x$ devient $y^2/2 = x^2/2 + c$ donc $y^2 = x^2 + 2c$ d'où $\boxed{y(x) = \pm\sqrt{x^2 + 2c},\ c \in \mathbb{R}.}$

(c) L'équation s'écrit $y'/\sqrt{y} = 1$ d'où $2\sqrt{y} = x + c$ d'où $\boxed{y = (x + c)^2/4,\ c \in \mathbb{R}.}$

2. linéaires du premier ordre sans second membre

(a) $y' = 3y$,
(b) $y' = 2\dfrac{y}{x}$,
(c) $y' - xy = 0$,
(d) $y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = 0$,
(e) $y' = 2xy$,
(f) $y' = \cos(x)y$.

corrigé succinct :

Toutes ces équations sont des équations à variables séparables de la forme $y'/y = a(x)$. Si A est une primitive de a, elles se ramènent donc toutes à $\ln|y| = A(x) + c$ donc à $y(x) = Ce^{A(x)}$.

(a) On trouve $\boxed{y = Ce^{3x},\ C \in \mathbb{R}.}$

(b) $y'/y = 2/x$, soit en prenant les primitives $\ln|y| = 2\ln|x| + c = \ln(x^2) + c$, donc $y(x| = e^c e^{\ln(x^2)}$. Ainsi, $y = \pm e^c x^2$, donc y est de la forme $\boxed{y(x) = Cx^2,\ C \in \mathbb{R}.}$

(c) $y'/y = x$, $\ln|y| = x^2/2 + c$, $\boxed{y(x) = Ce^{x^2/2}.}$

(d) $y'/y = -1/\sqrt{x}$, d'où $\ln|y| = -2\sqrt{x} + c$ et donc $\boxed{y(x) = Ce^{-2\sqrt{x}},\ C \in \mathbb{R}.}$

(e) $y'/y = 2x$, d'où $\ln|y| = x^2 + c$ et donc $\boxed{y(x) = Ce^{x^2},\ C \in \mathbb{R}.}$

(f) $y'/y = \cos(x)$, d'où $\ln|y| = \sin(x) + c$ et donc $\boxed{y(x) = Ce^{\sin(x)},\ C \in \mathbb{R}.}$

3. linéaire du premier ordre avec second membre « simple »

(a) $y' = ay + b$,
(b) $y' + 2y = \sin(x)$,
(c) $y' + y = \cos(2x)$,
(d) $y' + y = e^{3x}$,
(e) $y' - y = e^x$,
(f) $y' - y = x$.

corrigé succinct : Il suffit de trouver y_{SSM} solution générale de l'équation sans second membre (voir exercice précédent),
puis y_p une solution particulière ressemblant au second membre
(constante si le second membre est constant, de la forme $a\cos + b\sin$ si le second membre est en cosinus ou sinus, exponentiel si le second membre est exponentiel, polynomial si le second membre est un polynôme),
puis de rajouter les deux.

(a) $y' = ay$ a pour solutions $y_{SSM} = C\exp(ax)$. On cherche une solution constante y_p, alors $y_p' = 0$ donc $0 = ay_p + b$ donc $y_p = -b/a$. Donc finalement les $y = y_{SSM} + y_p$ soit $\boxed{y(x) = C\exp(ax) - b/a,\ C \in \mathbb{R}.}$

(b) $y' + 2y = 0$ a pour solutions $y_{SSM} = C\exp(-2x)$.
Le second membre est une fonction trigonométrique de pulsation 1, donc on cherche une solution constante $y_p = a\cos(x) + b\sin(x)$.
Alors $y_p' + 2y_p = (-a\sin(x) + b\cos(x)) + 2(a\cos(x) + b\sin(x)) = (b + 2a)\cos(x) + (-a + 2b)\sin(x)$, donc par identification avec le second membre $\sin(x)$ de l'équation de départ,
$b + 2a = 0$ (égalité des coefficients devant les cosinus)
et $-a + 2b = 1$ (égalité des coefficients devant les sinus)
donc $5b = 2$ et $a = 2b - 1$,
soit encore $b = 2/5$ et $a = -1/5$. Donc $y_p(x) = -\dfrac{1}{5}\cos(x) + \dfrac{2}{5}\sin(x)$.

Finalement, $\boxed{y(x) = C\exp(-2x) - \dfrac{1}{5}\cos(x) + \dfrac{2}{5}\sin(x),\ C \in \mathbb{R}.}$

(c) $y' + y = 0$ a pour solutions $y_{SSM} = C\exp(-x)$.
Le second membre est une fonction trigonométrique de pulsation 2, donc on cherche une solution particulière $y_p = a\cos(2x) + b\sin(2x)$.
Alors $y_p' + y_p = (-2a\sin(x) + 2b\cos(x)) + (a\cos(x) + b\sin(x)) = (2b+a)\cos(x) + (-2a+b)\sin(x)$, donc par identification avec le second membre $\cos(2x)$ de l'équation de départ,
$2b + a = 1$ (identification des coefficients devant les cosinus)
et $-2a + b = 0$ (coefficients devant les sinus)
donc $5a = 1$ et $b = 2a$, soit encore $a = 1/5$ et $b = 2/5$.
Donc $y_p(x) = \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(2x)$.

Finalement, $\boxed{y(x) = C\exp(-x) + \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(2x), C \in \mathbb{R}.}$

Si on a besoin d'écrire la solution particulière sous forme d'un seul cosinus (régime permanent, en électricité...) on peut alors l'écrire
$\frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(2x) = \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(2x) + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(2x))$
puis en posant $\varphi = \arctan(2)$:
$\frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(2x) = \frac{\sqrt{5}}{5}(\cos\varphi\cos(2x) + \sin(\varphi)\sin(2x))$
soit enfin $\frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(2x) = \frac{\sqrt{5}}{5}\cos(2x - \arctan(2))$

Le même résultat peut être obtenu avec les représentations complexes (on remplace le cosinus par une exponentielle imaginaire), soit en cherchant y_p sous la forme $Ae^{i\varphi}e^{2ix}$, donc en dérivant puis reportant dans l'équation :
$2iAe^{i\varphi}e^{2ix} + Ae^{i\varphi}e^{2ix} = e^{2ix}$ soit $(2i+1)Ae^{i\varphi} = 1$ donc $Ae^{i\varphi} = \frac{1}{1+2i}$ donc en prenant le module,
$A = 1/\sqrt{5}$ et en prenant l'argument, $\varphi = -\arctan(2)$,
on retrouve bien $y_p = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{i(2x - \arctan(2))}$, c'est bien la représentation complexe de la fonction trouvée plus haut.

(d) $y' + y = 0$ a pour solutions $y_{SSM} = C\exp(-x)$.
Le second membre est une exponentielle, on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p = ae^{3x}$.
Alors $y_p' + y_p = (3a + a)e^{3x} = 4ae^{3x}$, donc en identifiant avec le second membre de l'équation de départ, $4a = 1$ donc $a = 1/4$.

Finalement $\boxed{y(x) = C\exp(-x) + \exp(3x)/4, C \in \mathbb{R}.}$

(e) $y' - y = 0$ a pour solutions $y_{SSM} = C\exp(x)$.
Ici on peut commencer par chercher une solution $y_p = ae^x$; mais alors $y_p' - y_p$ vaut 0, et ne vaudrait jamais e^x, c'est impossible de trouver une telle solution particulière (puisque le coefficient devant y est l'opposé du paramètre de l'exponentielle...c'était prévisible)
On cherche donc finalement une solution particulière de la forme $y_p = axe^x$ (on rajoute un facteur x devant l'exponentielle, cf le cours).
Alors on calcule $y_p' - y_p = ae^x$, donc en identifiant avec le second membre de l'équation de départ, $a = 1$.

Finalement $\boxed{y(x) = C\exp(x) + x\exp(x), C \in \mathbb{R}.}$

(f) $y' - y = 0$ a pour solutions $y_{SSM} = C\exp(x)$.
Comme le second membre est un polynôme, on cherche pour solution un polynome de même degré, donc un polynôme de la forme $y_p(x) = ax + b$.
Alors $y_p' - y_p = a - (ax + b) = -ax + a - b$, donc en identifiant avec le second membre x, $-a = 1$ (égalité des coefficients devant x) et $a - b = 0$ (égalité des constantes) donc $a = b = -1$, et $y_p(x) = -x - 1$.

Finalement $\boxed{y(x) = C\exp(x) - x - 1, C \in \mathbb{R}.}$

4. * méthode de variation de la constante

(a) $y' = 2\frac{y}{x} - 1$, (b) $y' - xy = x$, (c) $y' - 2xy = 3xe^{x^2}$.

corrigé succinct : Le cours fournit une méthode systématique de résolution, qui se ramène à deux calculs de primitive.
L'un lors de la résolution de l'équation sans second membre associée pour en trouver la solution générale y_{SSM}, l'autre dans l'utilisation de la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière y_p de l'équation.
La solution cherchée est alors $y_{SSM} + y_p$.

(a) On résoud d'abord l'équation sans second membre associée $y' = 2\frac{y}{x}$: elle entraîne que $y'/y = 2/x$, soit en prenant les primitives $\ln|y| = 2\ln|x| + c = \ln(x^2) + c$, donc $|y| = e^c e^{\ln(x^2)}$. Ainsi, $y = \pm e^c x^2$, donc y est de la forme $y(x) = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$.
Pour résoudre l'équation initiale, on sait qu'il suffit d'additionner une solution particulière à la solution générale de l'équation sans second membre. Et on peut bien sûr remarquer que x est une solution particulière : ainsi, la solution générale de l'équation est $\boxed{y(x) = Cx^2 + x, C \in \mathbb{R}.}$
Si on ne devine pas cette solution particulière, il faut alors utiliser la méthode de "variation de la constante". On cherche une solution y sous la forme $y(x) = C(x)x^2$ (on remplace la constante C apparue dans la résolution de l'équation sans second membre par une fonction $C(x)$).
L'équation devient alors, en remplaçant y et y' par leur expression en fonction de C : $C'(x)x^2 + 2xC(x) = 2C(x)x^2/x - 1$, soit après simplification $C'(x) = -1/x^2$.

Ainsi, $C(x) = 1/x + c$, et les solutions sont donc bien les $\boxed{y(x) = C(x)x^2 = x + cx^2, c \in \mathbb{R}}$.

(b) On résoud d'abord l'équation sans second membre associée $y' - xy = 0$: $y'/y = x$, $\ln|y| = x^2/2 + c$, $y = Ce^{x^2/2}$. Et on remarque ensuite que -1 est une solution particulière. La solution générale de l'équation est donc $\boxed{y(x) = -1 + Ce^{x^2/2}, C \in \mathbb{R}.}$

(c) On résoud l'équation sans second membre $y' - 2xy = 0$, et on trouve $y(x) = Ce^{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. En l'absence de solution particulière "évidente" pour l'équation générale, on peut appliquer la méthode de variation de la constante : on cherche les solutions sous la forme $y(x) = Ce^{x^2}$, ce qui fournit l'équation $C'(x)e^{x^2} = 3xe^{x^2}$, donc $C'(x) = 3x$ et donc $C(x) = 3x^2/2 + c$.

Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = (3x^2/2 + c)e^{x^2}.}$

5. **second ordre à coefficients constants**

(a) $y'' + y' + y = 0.$

(b) $y'' + 2y' + y = 2,$

(c) $y'' = \omega^2 y,$

(d) $y'' + \omega^2 y = 1,$

(e) $y'' + 2y' + 5y = 5\cos x,$

(f) $y'' + y' - 2y = e^{-2x},$

corrigé succinct :

(a) L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$.
Son discriminant est -3, ses racines sont $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$,
et par conséquent les solutions de l'équation différentielle sont les

$$\boxed{y(x) = (A\cos(\sqrt{3}x/2) + B\sin(\sqrt{3}x/2))e^{-x/2},\ A, B \in \mathbb{R}.}$$

(b) On résoud d'abord l'équation homogène $y'' + 2y' + y = 0$, dont l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ admet une solution unique $r = -1$.
Les solutions de l'équation homogène sont alors $y(x) = (Ax + B)e^{-x}$.
Comme 2 est une solution constante "évidente", on en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = 2 + (Ax + B)e^{-x},\ A, B \in \mathbb{R}.}$

(c) L'équation caractéristique associée est $r^2 - \omega^2 = 0$, ses solutions sont $\pm\omega$, et les solutions de l'équation différentielle sont ainsi les fonctions de la forme

$$\boxed{y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x},\ A, B \in \mathbb{R}.}$$

(d) L'équation caractéristique de l'équation sans second membre associée a pour solutions $i\omega$ et $-i\omega$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, $A, B \in \mathbb{R}$.
Comme d'autre part $1/\omega^2$ est une solution constante évidente de l'équation $y'' + \omega^2 y = 1$, les solutions de l'équation initiale sont les fonctions

$$\boxed{y(x) = 1/\omega^2 + A\cos\omega x + B\sin\omega x,\ A, B \in \mathbb{R}.}$$

(e) L'équation caractéristique $X^2 + 2X + 5 = 0$ a pour solutions $-1 - 2i$ et $-1 + 2i$, donc l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 5y = 0$ a pour solutions les fonctions $y(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.
On peut chercher une solution particulière « ressemblant » au second membre, qui est un $\cos x$: $a\cos x + b\sin x$. Alors l'équation devient $(-a\cos x - b\sin x) + 2(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x) = 5\cos x$. En identifiant les coefficients du sinus et du cosinus, on en déduit le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4a + 2b & = & 5 \\ -2a + 4b & = & 0 \end{array}\right.$, dont les solutions sont $a = 1$ et $b = 1/2$.
$\cos x + \dfrac{\sin x}{2}$ est une solution particulière, et les solutions de l'équation initiale sont ainsi les fonctions $\boxed{y(x) = \cos x + \dfrac{\sin x}{2} + Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x.}$

(f) L'équation homogène $y'' + y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{x}$.
On peut chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = axe^{-2x}$. Alors $y'(x) = (a - 2ax)e^{-2x}$ et $y''(x) = (-4a + 4ax)e^{-2x}$, et l'équation devient donc $(-4a + 4ax) + (a - 2ax) - 2ax = 1$, soit $-4a + a = 1$, soit $a = -1/3$. $-xe^{-2x}/3$ est une solution particulière de l'équation, et les solutions sont ainsi de la forme

$$\boxed{y(x) = -xe^{-2x}/3 + Ae^{-2x} + Be^{x},\ A, B \in \mathbb{R}.}$$

exercices pratiques

1. **pour la mécanique de S2** : la fonction cherchée est y ou v ou θ, la variable est le temps t, toutes les autres lettres désignent des constantes positives.

(a) frottements visqueux :
$m\dot{v} = -Kv + mg,$

(b) pendule :
$L\ddot{\theta} + g\theta = 0,$

(c) chute libre :
$\ddot{x} = -kg$

(d) frottements visqueux :
$\ddot{y} + \dfrac{k\eta}{m}\dot{y} = -g,$

(e) (*) pendule de torsion :
$I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C\theta = 0,$
On discutera selon que le terme B, correspondant aux frottements, est "petit" ou "grand"...

corrigé succinct :

(a) 1) l'équation sans second membre associée est $m\dot{v} + Kv = 0$, qui a pour solution $v_H = Ce^{-Kt/m}$.
2) le second membre est constant : on cherche une vitesse particulière constante solution de l'équation, c'est-à-dire de l'équation $0 = -Kv_p + mg$, on trouve $v_p = mg/K$.
3) les solutions de l'équation sont donc les fonctions $v(t) = Ce^{-Kt/m} + mg/K$ avec $C \in \mathbb{R}$

(b) $x(t) = -kgt^2/2 + At + B$

(c) $\theta(t) = A\cos(\sqrt{g/L}t) + B\sin(\sqrt{g/L}t)$

(d) $x(t) = A + Be^{-Kt/m} + \Gamma t^2/2 - m\Gamma t/K$

(e) $x(t) = A\cos(\sqrt{K/m_c}t) + B\sin(\sqrt{K/m_c}t) + k_d m_a g/K$

(f) $x(t) = A + Be^{-\eta kt/m}$

(g) $y(t) = A + Be^{-\eta kt/m} - gmt/(k\eta)$

(h) trois cas à distinguer selon le signe de $B^2 - 4IC$...

(i) $\theta(t) = A\cos(\sqrt{C/I}t) + B\sin(\sqrt{C/I}t) + \Gamma/C$.

2. **cinétique chimique :** lors de la décomposition de péroxyde d'hydrogène en eau et dioxygène, la concentration de H_2O_2 vérifie l'équation $k[H_2O_2]_t = -\dfrac{\mathrm{d}[H_2O_2]_t}{\mathrm{d}t}$ (avec k la constante de vitesse).
Déterminer cette concentration (en fonction de k et t) sachant qu'à l'instant 0 elle vaut 1 mol.L^{-1}.

corrigé succinct :

Il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre et sans second membre, on a $\dfrac{\frac{\mathrm{d}[H_2O_2]_t}{\mathrm{d}t}}{[H_2O_2]_t} = -k$ donc $\ln|[H_2O_2]_t| = -kt + a$, donc $[H_2O_2]_t = \pm e^a e^{-kt}$, et les solutions sont les $[H_2O_2]_t = Ae^{-kt}$ avec $A \in \mathbb{R}$.
Mais si on utilise la condition initiale indiquée, $[H_2O_2]_0 = 1 = Ae^0$, donc $A = 1$ mol.L^{-1}.
Ainsi, $\boxed{[H_2O_2]_t = e^{-kt} \text{ mol.L}^{-1}}$

3. **circuit LR série :** l'intensité du courant $i(t)$ qui circule dans un circuit LR soumis à une tension sinusoïdale vérifie l'équation $L\frac{di}{dt} + Ri = U\sin\omega t$. Déterminer i si $i(0) = 0$.

corrigé succinct : L'équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. La solution de l'équation sans second membre associée est $Ke^{-\frac{Rt}{L}}$.
On peut chercher une solution particulière de la forme $A\cos\omega t + B\sin\omega t$. En intégrant dans l'équation, on obtient le système $\omega BL + RA = 0$ et $-\omega AL + RB = U_0$, donc $B = \dfrac{RU_0}{(\omega L)^2 + R^2}$ et $A = \dfrac{-L\omega U_0}{(\omega L)^2 + R^2}$ en résolvant le système de deux équations à deux inconnues.
Mais $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\dfrac{L^2\omega^2 U_0^2 + R^2 U_0^2}{((\omega L)^2 + R^2)^2}} = U\sqrt{\dfrac{R^2 + L^2\omega^2}{((\omega L)^2 + R^2)^2}} = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$. Et avec $\varphi = -\arctan(\dfrac{R}{L\omega}) + \pi$, la solution particulière peut se mettre alors sous la forme $\dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi)$ soit encore

$$\boxed{i_p(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos(\omega t + \arctan(\frac{R}{L\omega}) - \pi)}$$

La solution générale est donc $\boxed{i(t) = Ke^{-\frac{Rt}{L}} + \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos(\omega t + \arctan(\dfrac{R}{L\omega}) - \pi),\ K \in \mathbb{R}}$, et la solution particulière pour $i(0) = 0$ est obtenue avec $K = -\dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos\varphi$, soit

$$\boxed{i(t) = -\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos\varphi\, e^{-Rt/L} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos(\omega t + \arctan(\frac{R}{L\omega}) - \pi).}$$

autre méthode avec les représentations complexes pour trouver la solution particulière :

On représente $i_p(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ par $Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}$,
et le second membre $U_0\sin(\omega t) = U_0\cos(\omega t - \pi/2)$ par $Ue^{j\omega t}e^{-j\pi/2}$.
Alors l'équation devient $(j\omega L + R)Ae^{j\varphi}e^{j\omega t} = Ue^{j\omega t}e^{-j\pi/2}$,
donc $(j\omega L + R)Ae^{j\varphi} = Ue^{-j\pi/2}$,
donc $Ae^{j\varphi} = \dfrac{Ue^{-j\pi/2}}{j\omega L + R}$.
Le module A est donc $\dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$ et l'argument est $-\pi/2 - \arctan\frac{R}{L\omega} = -\pi + (\pi/2 - \arctan\frac{R}{L\omega}) = -\pi + \arctan\frac{L\omega}{R}$, car si $x > 0$ $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$).