exercices théoriques

1. variables séparables

(a) $y' = xe^y$,
(b) $yy' = x$,
(c) $y' = \sqrt{y}$,
(d) $y' = b(y^2 - a^2)$.

corrigé succinct : On peut écrire chacune de ces équations sous la forme $y'f(y) = g(x)$ pour f et g deux fonctions. En considérant des primitives F et G de f et g, l'équation se ramène alors à résoudre $F(y) = G(x) + c$, qui n'est plus une équation différentielle mais une "simple" équation numérique.

(a) L'équation $y' = xe^y$ est équivalente à $y'e^{-y} = x$, donc a $-e^{-y} = x^2/2 + c$, soit encore à $\boxed{y(x) = -\ln(-x^2/2 - c),\, c \in \mathbb{R}.}$ Pour que les solutions soient définies, il faut donc que c soit strictement négatif, et la solution est alors définie sur $[-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}]$.

(b) $yy' = x$ devient $y^2/2 = x^2/2 + c$ donc $y^2 = x^2 + 2c$ d'où $\boxed{y(x) = \sqrt{x^2 + 2c},\, c \in \mathbb{R}.}$

(c) L'équation s'écrit $y'/\sqrt{y} = 1$ d'où $2\sqrt{y} = x + c$ d'où $\boxed{y = (x + c)^2/4,\, c \in \mathbb{R}.}$

(d) L'équation équivaut à $\dfrac{y'}{y^2 - a^2} = b$.

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{y^2 - a^2}$ est $\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{y - a} - \dfrac{1}{y + a}\right)$.

Une primitive de $\dfrac{y'}{y - a}$ est $\ln|y - a|$, une primitive de $\dfrac{y'}{y + a}$ est $\ln|y + a|$, donc une primitive de $\dfrac{y'}{y^2 - a^2}$ est $\dfrac{1}{2a}\ln|\dfrac{y - a}{y + a}|$.

Ainsi, on obtient l'équation $\dfrac{y - a}{y + a} = Ce^{2abx}$, $C \in \mathbb{R}$, soit finalement

$$\boxed{y(x) = a\frac{1 + Ce^{2abx}}{1 - Ce^{2abx}}.}$$

2. linéaires du premier ordre sans second membre

(a) $y' = 3y$,
(b) $y' = 2\dfrac{y}{x}$,
(c) $y' - xy = 0$,
(d) $y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = 0$,
(e) $y' = 2xy$,
(f) $y' = \cos(x)y$.

corrigé succinct :

Toutes ces équations sont des équations à variables séparables de la forme $y'/y = a(x)$. Si A est une primitive de a, elles se ramènent donc toutes à $\ln|y| = A(x) + c$ donc à $y(x) = Ce^{A(x)}$.

(a) On trouve $\boxed{y = Ce^{3x},\, C \in \mathbb{R}.}$

(b) $y'/y = 2/x$, soit en prenant les primitives $\ln|y| = 2\ln|x| + c = \ln(x^2) + c$, donc $y(x| = e^c e^{\ln(x^2)}$. Ainsi, $y = \pm e^c x^2$, donc y est de la forme $\boxed{y(x) = Cx^2,\, C \in \mathbb{R}.}$

(c) $y'/y = x$, $\ln|y| = x^2/2 + c$, $\boxed{y(x) = Ce^{x^2/2}.}$

(d) $y'/y = -1/\sqrt{x}$, d'où $\ln|y| = -2\sqrt{x} + c$ et donc $\boxed{y(x) = Ce^{-2\sqrt{x}},\, C \in \mathbb{R}.}$

(e) De même on trouve $\boxed{y(x) = Ce^{x^2},\, C \in \mathbb{R}.}$

(f) De même on trouve $\boxed{y(x) = Ce^{\sin(x)},\, C \in \mathbb{R}.}$

3. linéaire du premier ordre avec second membre « simple »

(a) $y' = ay + b$,
(b) $y' + 2y = \sin(x)$,
(c) $y' + y = \cos(2x)$,
(d) $y' + y = e^{3x}$,
(e) $y' - y = e^x$,
(f) $y' - y = x$.

corrigé succinct : Il suffit de trouver y_0 solution générale de l'équation sans second membre (voir exercice précédent), y_p une solution particulière ressemblant au second membre (constante si le second membre est constant, de la forme $a\cos + b\sin$ si le second membre est en cosinus ou sinus, exponentiel si le second membre est exponentiel), puis de rajouter les deux.

(a) $y' = ay$ a pour solutions $y_0 = C\exp(ax)$. On cherche une solution constante y_p, alors $y_p' = 0$ donc $0 = ay_p + b$ donc $y_p = -b/a$. Donc finalement les $y = y_0 + y_p$ soit $\boxed{y(x) = C\exp(ax) - b/a, C \in \mathbb{R}.}$

(b) $y' + 2y = 0$ a pour solutions $y_0 = C\exp(-2x)$.
Le second membre est une fonction trigonométrique de pulsation 1, donc on cherche une solution constante $y_p = a\cos(x) + b\sin(x)$.
Alors $y_p' + 2y_p = (-a\sin(x) + b\cos(x)) + 2(a\cos(x) + b\sin(x)) = (b+2a)\cos(x) + (-a+2b)\sin(x)$, donc par identification avec le second membre $\sin(x)$ de l'équation de départ, $b + 2a = 0$ et $-a + 2b = 1$ donc $5b = 2$ et $a = 2b - 1$, soit encore $b = 2/5$ et $a = -1/5$. Donc $y_p(x) = -\frac{1}{5}\cos(x) + \frac{2}{5}\sin(x)$.
Finalement, $\boxed{y(x) = C\exp(-2x) - \frac{1}{5}\cos(x) + \frac{2}{5}\sin(x), C \in \mathbb{R}.}$

(c) $y' + y = 0$ a pour solutions $y_0 = C\exp(-x)$.
Le second membre est une fonction trigonométrique de pulsation 2, donc on cherche une solution constante $y_p = a\cos(2x) + b\sin(2x)$.
Alors $y_p' + y_p = (-2a\sin(x) + 2b\cos(x)) + (a\cos(x) + b\sin(x)) = (2b+a)\cos(x) + (-2a+b)\sin(x)$, donc par identification avec le second membre $\cos(2x)$ de l'équation de départ, $2b + a = 1$ et $-2a + b = 0$ donc $5a = 1$ et $b = 2a$, soit encore $a = 1/5$ et $b = 2/5$. Donc $y_p(x) = \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(2x)$.
Finalement, $\boxed{y(x) = C\exp(-x) + \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(2x), C \in \mathbb{R}.}$

(d) $y' + y = 0$ a pour solutions $y_0 = C\exp(-x)$.
Le second membre est une exponentielle qui n'est pas solution de l'équation sans second membre, on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p = ae^{3x}$.
Alors $y_p' + y_p = (3a + a)e^{3x} = 4ae^{3x}$, donc en identifiant avec le second membre de l'équation de départ, $4a = 1$ donc $a = 1/4$.
Finalement $\boxed{y(x) = C\exp(-x) + \exp(3x)/4, C \in \mathbb{R}.}$

(e) $y' - y = 0$ a pour solutions $y_0 = C\exp(x)$.
Comme le second membre est une de ces solutions (de l'équation sans second membre) on cherche une solution particulière de la forme $y_p = axe^x$ (on rajoute un facteur x devant l'exponentielle).
Alors on calcule $y_p' - y_p = ae^x$, donc en identifiant avec le second membre de l'équation de départ, $a = 1$.
Finalement $\boxed{y(x) = C\exp(x) + x\exp(x), C \in \mathbb{R}.}$

(f) $y' - y = 0$ a pour solutions $y_0 = C\exp(x)$.
Comme le second membre est un polynôme qui n'est pas solution de l'équation sans second membre, on cherche pour solution un polynome de même degré, donc un polynôme de la forme $y_p(x) = ax + b$. Alors $y_p' - y_p = a - (ax + b) = -ax + a - b$, donc en identifiant avec le second membre x, $-a = 1$ et $a - b = 0$ donc $a = b = -1$, et $y_p(x) = -x - 1$.
Finalement $\boxed{y(x) = C\exp(x) - x - 1, C \in \mathbb{R}.}$

4. méthode de variation de la constante

(a) $y' = 2\frac{y}{x} - 1$, (b) $y' - xy = x$, (c) $y' - 2xy = 3xe^{x^2}$.

corrigé succinct : Le cours fournit une méthode systématique de résolution, qui se ramène à deux calculs de primitive.

L'un lors de la résolution de l'équation sans second membre associée pour en trouver la solution générale y_0, l'autre dans l'utilisation de la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière y_p de l'équation.

La solution cherchée est alors $y_0 + y_p$.

(a) On résoud d'abord l'équation sans second membre associée $y' = 2\frac{y}{x}$: elle entraîne que $y'/y = 2/x$, soit en prenant les primitives $\ln|y| = 2\ln|x| + c = \ln(x^2) + c$, donc $|y| = e^c e^{\ln(x^2)}$. Ainsi, $y = \pm e^c x^2$, donc y est de la forme $y(x) = Cx^2, C \in \mathbb{R}$.
Pour résoudre l'équation initiale, on sait qu'il suffit d'additionner une solution particulière à la solution générale de l'équation sans second membre. Et on peut bien sûr remarquer que x est une solution particulière : ainsi, la solution générale de l'équation est $\boxed{y(x) = Cx^2 + x, C \in \mathbb{R}.}$
Si on ne devine pas cette solution particulière, il faut alors utiliser la méthode de "variation de la constante". On cherche une solution y sous la forme $y(x) = C(x)x^2$ (on remplace la constante C apparue dans la résolution de l'équation sans second membre par une fonction $C(x)$). L'équation devient alors, en remplaçant y et y' par leur expression en fonction de C : $C'(x)x^2 + 2xC(x) = 2C(x)x^2/x - 1$, soit après simplification $C'(x) = -1/x^2$. Ainsi, $C(x) = 1/x + c$, et les solutions sont donc bien les $y(x) = C(x)x^2 = x + cx^2$, $c \in \mathbb{R}$.

(b) On résoud d'abord l'équation sans second membre associée $y' - xy = 0$: $y'/y = x$, $\ln|y| = x^2/2 + c$, $y = Ce^{x^2/2}$. Et on remarque ensuite que -1 est une solution particulière. La solution générale de l'équation est donc $\boxed{y(x) = -1 + Ce^{x^2/2}, C \in \mathbb{R}.}$

(c) On résoud l'équation sans second membre $y' - 2xy = 0$, et on trouve $y(x) = Ce^{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. En l'absence de solution particulière "évidente" pour l'équation générale, on peut appliquer la méthode de variation de la constante : on cherche les solutions sous la forme $y(x) = Ce^{x^2}$, ce qui fournit l'équation $C'(x)e^{x^2} = 3xe^{x^2}$, donc $C'(x) = 3x$ et donc $C(x) = 3x^2/2 + c$. Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = (3x^2/2 + c)e^{x^2}.}$

5. second ordre à coefficients constants

a) $y'' = \omega^2 y$, b) $y'' + 2y' + y = 2$,

c) $y'' + \omega^2 y = 1$, d) $y'' + 2y' + 5y = 5\cos x$,

e) $y'' + y' - 2y = e^{-2x}$, f) $y'' + y' + y = 0$.

corrigé succinct :

(a) L'équation caractéristique associée est $X^2 - \omega^2 = 0$, donc les solutions sont $\pm\omega$, et les solutions de l'équation différentielle sont ainsi les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}.}$
(en posant $\alpha = A + B$ et $\beta = A - B$ on peut aussi écrire $y(x) = \alpha \mathrm{ch}\, x + \beta \mathrm{sh}\, x$, une autre forme parfois préférable pour les solutions de cette équation)
2A=a+b B=a-b

(b) On résoud d'abord l'équation homogène $y'' + 2y' + y = 0$, dont l'équation caractéristique est $X^2 + 2X + 1 = 0$ qui admet une solution unique $X = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont alors $y(x) = (Ax + B)e^x$.
Comme 2 est une solution constante "évidente", on en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = 2 + (Ax + B)e^x.}$

(c) L'équation caractéristique de l'équation sans second membre associée a pour solutions $i\omega$ et $-i\omega$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, $A, B \in \mathbb{R}$.
Comme d'autre part $1/\omega^2$ est une solution constante évidente de l'équation $y'' + \omega^2 y = 1$, les solutions de l'équation initiale sont les fonctions $\boxed{y(x) = 1/\omega^2 + A\cos\omega x + B\sin\omega x,\ A, B \in \mathbb{R}.}$

(d) L'équation caractéristique $X^2 + 2X + 5 = 0$ a pour solutions $-1 - 2i$ et $-1 + 2i$, donc l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 5y = 0$ a pour solutions les fonctions $y(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.
On peut chercher une solution particulière « ressemblant » au second membre, qui est un $\cos x$: $a\cos x + b\sin x$. Alors l'équation devient $(-a\cos x - b\sin x) + 2(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x) = 5\cos x$. En identifiant les coefficients du sinus et du cosinus, on en déduit le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4a + 2b & = & 5 \\ -2a + 4b & = & 0 \end{array}\right.$, dont les solutions sont $a = 1$ et $b = 1/2$. $\cos x + \dfrac{\sin x}{2}$ est une solution particulière, et les solutions de l'équation initiale sont ainsi les fonctions $\boxed{y(x) = \cos x + \dfrac{\sin x}{2} + Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x.}$

(e) L'équation homogène $y'' + y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions $y(x) = Ae^{-2x} + Be^x$.
On peut chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = axe^{-2x}$. Alors $y'(x) = (a - 2ax)e^{-2x}$ et $y''(x) = (-4a + 4ax)e^{-2x}$, et l'équation devient donc $(-4a + 4ax) + (a - 2ax) - 2ax = 1$, soit $-4a + a = 1$, soit $a = -1/3$. $-xe^{-2x}/3$ est une solution particulière de l'équation, et les solutions sont ainsi de la forme $\boxed{y(x) = -xe^{-2x}/3 + Ae^{-2x} + Be^x.}$

(f) L'équation caractéristique associée est $X^2 + X + 1 = 0$. Son discriminant est -3, dont les racines sont $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, et par conséquent les solutions de l'équation différentielle sont $\boxed{y(x) = (A\cos(\sqrt{3}x/2) + B\sin(\sqrt{3}x/2))e^{-x/2}.}$

6. * plus dur...

(a) $xy' + y = xy^3$, (b) $y'' = 2\dfrac{y}{x^2}$, (c) $4xy'' + 2y' - y = 0$.

corrigé succinct :

(a) On pose $z = 1/y^2$. Alors l'équation devient $-z'/2 + z/x = 1$ linéaire du premier ordre à coefficients constants, on en déduit que $z = Cx^2 + 2x$ donc $y = 1/\sqrt{Cx^2 + 2x}$.

(b) On remarque que pour toute constante λ, $y = \lambda x^2$ est solution.
On souhaite trouver une deuxième famille de solutions pour l'équation : pour cela, et bien qu'il s'agisse d'une équation différentielle du second ordre, on applique aussi ici une méthode de "variation de la constante", en cherchant y sous la forme $y(x) = \lambda(x)x^2$.
Alors $y'(x) = \lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x)$, et on vérifie que $y''(x) = \lambda''(x)x^2 + 4x\lambda'(x) + 2\lambda(x)$, donc l'équation devient $\lambda''(x)x^2 + 4x\lambda'(x) = 0$, soit encore en simplifiant par x : $\lambda''(x) = -4/x\lambda'(x) = 0$, qui est une équation différentielle du premier ordre par rapport à la fonction λ'. On en déduit que $\ln|\lambda'(x)| = -4\ln|x|$, donc $\lambda'(x) = c/x^4$, $c \in \mathbb{R}$, donc $\lambda(x) = -\dfrac{c}{3x^3} + d$, $c, d \in \mathbb{R}$.
Ainsi, toutes les fonctions $\boxed{y(x) = -\dfrac{c}{x} + dx^2,\quad c, d \in \mathbb{R},}$ sont des solutions. Et on admettra que ce sont les seules, sur chaque intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

(c) indication : étudier la fonction $z(t) = y(t^2)$ (on pose $x = t^2$ soit $t = \sqrt{x}$).
On a alors $z'(t) = 2ty'(t^2)$ et $z''(t) = 4t^2y''(t^2) + 2y'(t^2)$. Mais d'après l'équation, $4xy''(x) + 2y'(x) = y(x)$ donc $z''(t) = z(t)$. Donc $z(t) = Ae^t + Be^{-t}$ (équation du second ordre, à coefficients constants sans second membre), donc finalement $\boxed{y(x) = Ae^{\sqrt{x}} + Be^{-\sqrt{x}},\ A, B \in \mathbb{R}.}$

exercices pratiques

1. **pour la mécanique de S2** : la fonction cherchée est x ou y ou v ou θ, la variable est le temps t, toutes les autres lettres désignent des constantes.

   (a) $m\dot{v} = -Kv + mg$,
   (b) $\ddot{x} = -kg$,
   (c) $L\ddot{\theta} + g\theta = 0$,
   (d) $m\ddot{x} + K\dot{x} = K\Gamma t$,
   (e) $-Kx + k_d m_a g = m_c\ddot{x}$,
   (f) $\ddot{x} + \dfrac{k\eta}{m}\dot{x} = 0$,
   (g) $\ddot{y} + \dfrac{k\eta}{m}\dot{y} = -g$,
   (h) $I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C\theta = 0$,
   (i) $I\ddot{\theta} + C\theta = \Gamma$.

   corrigé succinct :

   (a) $v(t) = Ce^{-Kt/m} + mg/K$
   (b) $x(t) = -kgt^2/2 + At + B$
   (c) $\theta(t) = A\cos(\sqrt{g/L}t) + B\sin(\sqrt{g/L}t)$
   (d) $x(t) = A + Be^{-Kt/m} + \Gamma t^2/2 - m\Gamma t/K$
   (e) $x(t) = A\cos(\sqrt{K/m_c}t) + B\sin(\sqrt{K/m_c}t) + k_d m_a g/K$
   (f) $x(t) = A + Be^{-\eta kt/m}$
   (g) $y(t) = A + Be^{-\eta kt/m} - gmt/(k\eta)$
   (h) trois cas à distinguer selon le signe de $B^2 - 4IC$...
   (i) $\theta(t) = A\cos(\sqrt{C/I}t) + B\sin(\sqrt{C/I}t) + \Gamma/C$.

2. **cinétique chimique :** lors de la décomposition de péroxyde d'hydrogène en eau et dioxygène, la concentration de H_2O_2 vérifie l'équation $k([H_2O_2]_t) = -\dfrac{\mathrm{d}[H_2O_2]_t}{\mathrm{d}t}$ (avec k la constante de vitesse). Déterminer cette concentration (en fonction de k et t) sachant qu'à l'instant 0 elle vaut 1 mol.L^{-1}.

3. **conduction :** soit $\theta(x)$ la température le long d'une barre semi-infinie. On note θ_0 sa température en $x = 0$ et θ_a sa température à l'infini.

   On admet que θ vérifie l'équation différentielle $\lambda S\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} = hp(\theta - \theta_a)$, λ, S, h et p étant des constantes. Déterminer θ pour $x > 0$.

4. **circuit LR série :** l'intensité du courant $i(t)$ qui circule dans un circuit LR soumis à une tension sinusoïdale vérifie l'équation $L\frac{di}{dt} + Ri = U_0\sin\omega t$. Déterminer i si $i(0) = 0$.

   corrigé succinct : L'équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. La solution de l'équation sans second membre associée est $Ke^{-\frac{Rt}{L}}$. On peut chercher une solution particulière de la forme $A\cos\omega t + B\sin\omega t$. En intégrant dans l'équation, on obtient le système $\omega BL + RA = 0$ et $-\omega AL + RB = U_0$, donc $B = \dfrac{RU_0}{(\omega L)^2 + R^2}$ et $A = \dfrac{-L\omega U_0}{(\omega L)^2 + R^2}$. On peut aussi écrire $A = U_0\cos\varphi$ et $B = U_0\sin\varphi$ avec $\varphi = \arccos(\dfrac{-L\omega}{(\omega L)^2 + R^2}) = \pi - \arctan(\dfrac{R}{L\omega})$, la solution particulière est alors $U_0\cos(\omega t - \varphi)$.

   La solution générale est donc $i(t) = Ke^{-\frac{Rt}{L}} + U_0\cos(\omega t - \varphi)$, $K \in \mathbb{R}$, et la solution particulière pour $i(0) = 0$ est obtenue avec $K = -U_0\cos\varphi$, soit

   $$\boxed{i(t) = -U_0\cos\varphi\, e^{-Rt/L} + U_0\cos(\omega t - \varphi).}$$

5. * **parachute :** un parachutiste est freiné par la résistance de l'air, proportionnelle au carré de sa vitesse. On note $k = 30$ Nm^{-2}s^2 ce coefficient de proportionnalité, et $m = 80$ kg la masse du parachutiste.

   (a) Montrer que sa vitesse v vérifie $v' = -\frac{k}{m}v^2 + g$.

   (b) A $t = 0$, ayant atteint en chute libre la vitesse de 250 km.h^{-1}, le parachutiste ouvre sa toile. Donner sa vitesse $v(t)$ pour $t > 0$. Quelle est la vitesse limite du mouvement ? Au bout de combien de temps la vitesse est-elle devenue inférieure à 20 km.h^{-1} ?

   corrigé succinct :

   (a) cf.cours de mécanique en S2...

   (b) On applique la question préliminaire avec $y = v$, $x = t$, $a = \sqrt{mg/k}$, $b = -k/m$. Alors $\dfrac{1+C}{1-C} = v(0)/a$, d'où $C = \dfrac{-a + v(0)}{a + v(0)}$, donc avec $v(0) = 250$km.h^{-1} $= 69.44$m.s^{-1} on obtient $C = 0.863$, et donc
   $$\boxed{v(t) = \sqrt{mg/k}\frac{1 + \frac{v(0)-a}{a+v(0)}e^{-2\sqrt{kg/m}t}}{1 - \frac{v(0)-a}{a+v(0)}e^{-2\sqrt{kg/m}t}} \simeq \frac{5.11 + 4.41e^{-3.83t}}{1 - 0.863e^{-3.83t}}.}$$
   donc $\boxed{v_\infty = \sqrt{mg/k} \simeq 5.11 m.s^{-1} = 18.4 km.h^{-1}.}$ Et on trouve $t \simeq 0.8$s.