

exercices théoriques

1. variables séparables

$$\begin{array}{l} \text{(a) } y' = xe^y, \\ \text{(b) } yy' = x, \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{(c) } y' = \sqrt{y}, \\ \text{(d) } y' = b(y^2 - a^2). \end{array} \right.$$

corrigé succinct : On peut écrire chacune de ces équations sous la forme $y'f(y) = g(x)$ pour f et g deux fonctions. En considérant des primitives F et G de f et g , l'équation se ramène alors à résoudre $F(y) = G(x) + c$, qui n'est plus une équation différentielle mais une "simple" équation numérique.

(a) L'équation $y' = xe^y$ est équivalente à $y'e^{-y} = x$, donc a $-e^{-y} = x^2/2 + c$, soit encore à $y(x) = -\ln(-x^2/2 - c)$, $c \in \mathbb{R}$. Pour que les solutions soient définies, il faut donc que c soit strictement négatif, et la solution est alors définie sur $[-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}]$.

(b) $yy' = x$ devient $y^2/2 = x^2/2 + c$ donc $y^2 = x^2 + 2c$ d'où $y(x) = \sqrt{x^2 + 2c}$, $c \in \mathbb{R}$.

(c) L'équation s'écrit $y'/\sqrt{y} = 1$ d'où $2\sqrt{y} = x + c$ d'où $y = (x + c)^2/4$, $c \in \mathbb{R}$.

(d) L'équation équivaut à $\frac{y'}{y^2 - a^2} = b$.

La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{y^2 - a^2}$ est $\frac{1}{2a} \left(\frac{1}{y - a} - \frac{1}{y + a} \right)$.

Une primitive de $\frac{y'}{y - a}$ est $\ln|y - a|$, une primitive de $\frac{y'}{y + a}$ est $\ln|y + a|$, donc une primitive de $\frac{y'}{y^2 - a^2}$ est $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{y - a}{y + a} \right|$.

Ainsi, on obtient l'équation $\frac{y - a}{y + a} = Ce^{2abx}$, $C \in \mathbb{R}$, soit finalement

$$y(x) = a \frac{1 + Ce^{2abx}}{1 - Ce^{2abx}}.$$

2. linéaires du premier ordre sans second membre

$$\begin{array}{l} \text{(a) } y' = 3y, \\ \text{(b) } y' = 2\frac{y}{x}, \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{(c) } y' - xy = 0, \\ \text{(d) } y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = 0, \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{(e) } y' = 2xy, \\ \text{(f) } y' = \cos(x)y. \end{array}$$

corrigé succinct :

Toutes ces équations sont des équations à variables séparables de la forme $y'/y = a(x)$. Si A est une primitive de a , elles se ramènent donc toutes à $\ln|y| = A(x) + c$ donc à $y(x) = Ce^{A(x)}$.

(a) On trouve $y = Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) $y'/y = 2/x$, soit en prenant les primitives $\ln|y| = 2\ln|x| + c = \ln(x^2) + c$, donc $y(x) = e^c e^{\ln(x^2)}$. Ainsi, $y = \pm e^c x^2$, donc y est de la forme $y(x) = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$.

(c) $y'/y = x$, $\ln|y| = x^2/2 + c$, $y(x) = Ce^{x^2/2}$.

(d) $y'/y = -1/\sqrt{x}$, d'où $\ln|y| = -2\sqrt{x} + c$ et donc $y(x) = Ce^{-2\sqrt{x}}$, $C \in \mathbb{R}$.

(e) $y'/y = 2x$, d'où $\ln|y| = x^2 + c$ et donc $y(x) = Ce^{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

(f) $y'/y = \cos(x)$, d'où $\ln|y| = \sin(x) + c$ et donc $y(x) = Ce^{\sin(x)}$, $C \in \mathbb{R}$.

3. linéaire du premier ordre avec second membre « simple »

$$\begin{array}{l} \text{(a) } y' = ay + b, \\ \text{(b) } y' + 2y = \sin(x), \\ \text{(c) } y' + y = \cos(2x), \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{(d) } y' + y = e^{3x}, \\ \text{(e) } y' - y = e^x, \\ \text{(f) } y' - y = x. \end{array} \right.$$

corrigé succinct : Il suffit de trouver y_{SSM} solution générale de l'équation sans second membre (voir exercice précédent),

puis y_p une solution particulière ressemblant au second membre

(constante si le second membre est constant, de la forme $a \cos + b \sin$ si le second membre est en cosinus ou sinus, exponentiel si le second membre est exponentiel, polynomial si le second membre est un polynôme), puis de rajouter les deux.

(a) $y' = ay$ a pour solutions $y_{SSM} = C \exp(ax)$. On cherche une solution constante y_p , alors $y'_p = 0$ donc $0 = ay_p + b$ donc $y_p = -b/a$. Donc finalement les $y = y_{SSM} + y_p$ soit

$$y(x) = C \exp(ax) - b/a, C \in \mathbb{R}.$$

(b) $y' + 2y = 0$ a pour solutions $y_{SSM} = C \exp(-2x)$.

Le second membre est une fonction trigonométrique de pulsation 1, donc on cherche une solution constante $y_p = a \cos(x) + b \sin(x)$.

Alors $y'_p + 2y_p = (-a \sin(x) + b \cos(x)) + 2(a \cos(x) + b \sin(x)) = (b + 2a) \cos(x) + (-a + 2b) \sin(x)$, donc par identification avec le second membre $\sin(x)$ de l'équation de départ,

$b + 2a = 0$ (égalité des coefficients devant les cosinus)

et $-a + 2b = 1$ (égalité des coefficients devant les sinus)

donc $5b = 2$ et $a = 2b - 1$,

soit encore $b = 2/5$ et $a = -1/5$. Donc $y_p(x) = -\frac{1}{5} \cos(x) + \frac{2}{5} \sin(x)$.

Finalement, $y(x) = C \exp(-2x) - \frac{1}{5} \cos(x) + \frac{2}{5} \sin(x), C \in \mathbb{R}$.

(c) $y' + y = 0$ a pour solutions $y_{SSM} = C \exp(-x)$.

Le second membre est une fonction trigonométrique de pulsation 2, donc on cherche une solution particulière $y_p = a \cos(2x) + b \sin(2x)$.

Alors $y'_p + y_p = (-2a \sin(x) + 2b \cos(x)) + (a \cos(x) + b \sin(x)) = (2b + a) \cos(x) + (-2a + b) \sin(x)$, donc par identification avec le second membre $\cos(2x)$ de l'équation de départ,

$2b + a = 1$ (identification des coefficients devant les cosinus)

et $-2a + b = 0$ (coefficients devant les sinus)

donc $5a = 1$ et $b = 2a$, soit encore $a = 1/5$ et $b = 2/5$.

Donc $y_p(x) = \frac{1}{5} \cos(2x) + \frac{2}{5} \sin(2x)$.

Finalement, $y(x) = C \exp(-x) + \frac{1}{5} \cos(2x) + \frac{2}{5} \sin(2x), C \in \mathbb{R}$.

Si on a besoin d'écrire la solution particulière sous forme d'un seul cosinus (régime permanent, en électricité...) on peut alors l'écrire

$$\frac{1}{5} \cos(2x) + \frac{2}{5} \sin(2x) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cos(2x) + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(2x) \right)$$

puis en posant $\varphi = \arctan(2)$:

$$\frac{1}{5} \cos(2x) + \frac{2}{5} \sin(2x) = \frac{\sqrt{5}}{5} (\cos \varphi \cos(2x) + \sin(\varphi) \sin(2x))$$

soit enfin $\frac{1}{5} \cos(2x) + \frac{2}{5} \sin(2x) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cos(2x - \arctan(2))$

Le même résultat peut être obtenu avec les représentations complexes (on remplace le cosinus par une exponentielle imaginaire), soit en cherchant y_p sous la forme $Ae^{i\varphi} e^{2ix}$, donc en dérivant puis reportant dans l'équation :

$$2iAe^{i\varphi} e^{2ix} + Ae^{i\varphi} e^{2ix} = e^{2ix} \text{ soit } (2i + 1)Ae^{i\varphi} = 1 \text{ donc } Ae^{i\varphi} = \frac{1}{1 + 2i} \text{ donc en prenant}$$

le module,

$$A = 1/\sqrt{5} \text{ et en prenant l'argument, } \varphi = -\arctan(2),$$

on retrouve bien $y_p = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{i(2x - \arctan(2))}$, c'est bien la représentation complexe de la fonction trouvée plus haut.

(d) $y' + y = 0$ a pour solutions $y_{SSM} = C \exp(-x)$.

Le second membre est une exponentielle, on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p = ae^{3x}$.

Alors $y'_p + y_p = (3a + a)e^{3x} = 4ae^{3x}$, donc en identifiant avec le second membre de l'équation de départ, $4a = 1$ donc $a = 1/4$.

Finalement $y(x) = C \exp(-x) + \exp(3x)/4, C \in \mathbb{R}$.

(e) $y' - y = 0$ a pour solutions $y_{SSM} = C \exp(x)$.

Ici on peut commencer par chercher une solution $y_p = ae^x$; mais alors $y'_p - y_p$ vaut 0, et ne vaudrait jamais e^x , c'est impossible de trouver une telle solution particulière (puisque le coefficient devant y est l'opposé du paramètre de l'exponentielle...c'était prévisible)

On cherche donc finalement une solution particulière de la forme $y_p = axe^x$ (on rajoute un facteur x devant l'exponentielle, cf le cours).

Alors on calcule $y'_p - y_p = ae^x$, donc en identifiant avec le second membre de l'équation de départ, $a = 1$.

Finalement $y(x) = C \exp(x) + x \exp(x), C \in \mathbb{R}$.

(f) $y' - y = 0$ a pour solutions $y_{SSM} = C \exp(x)$.

Comme le second membre est un polynôme, on cherche pour solution un polynôme de même degré, donc un polynôme de la forme $y_p(x) = ax + b$.

Alors $y'_p - y_p = a - (ax + b) = -ax + a - b$, donc en identifiant avec le second membre x , $-a = 1$ (égalité des coefficients devant x) et $a - b = 0$ (égalité des constantes) donc $a = b = -1$, et $y_p(x) = -x - 1$.

Finalement $y(x) = C \exp(x) - x - 1, C \in \mathbb{R}$.

4. * méthode de variation de la constante

(a) $y' = 2\frac{y}{x} - 1$, (b) $y' - xy = x$, (c) $y' - 2xy = 3xe^{x^2}$.

corrigé succinct : Le cours fournit une méthode systématique de résolution, qui se ramène à deux calculs de primitive.

L'un lors de la résolution de l'équation sans second membre associée pour en trouver la solution générale y_{SSM} , l'autre dans l'utilisation de la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière y_p de l'équation.

La solution cherchée est alors $y_{SSM} + y_p$.

(a) On résoud d'abord l'équation sans second membre associée $y' = 2\frac{y}{x}$: elle entraîne que $y'/y = 2/x$, soit en prenant les primitives $\ln|y| = 2 \ln|x| + c = \ln(x^2) + c$, donc $|y| = e^c e^{\ln(x^2)}$. Ainsi, $y = \pm e^c x^2$, donc y est de la forme $y(x) = Cx^2, C \in \mathbb{R}$.

Pour résoudre l'équation initiale, on sait qu'il suffit d'ajouter une solution particulière à la solution générale de l'équation sans second membre. Et on peut bien sûr remarquer que x est une solution particulière : ainsi, la solution générale de l'équation est

$y(x) = Cx^2 + x, C \in \mathbb{R}$.

Si on ne devine pas cette solution particulière, il faut alors utiliser la méthode de "variation de la constante". On cherche une solution y sous la forme $y(x) = C(x)x^2$ (on remplace la constante C apparue dans la résolution de l'équation sans second membre par une fonction $C(x)$).

L'équation devient alors, en remplaçant y et y' par leur expression en fonction de C : $C'(x)x^2 + 2xC(x) = 2C(x)x^2/x - 1$, soit après simplification $C'(x) = -1/x^2$.

Ainsi, $C(x) = 1/x + c$, et les solutions sont donc bien les $y(x) = C(x)x^2 = x + cx^2, c \in \mathbb{R}$

(b) On résoud d'abord l'équation sans second membre associée $y' - xy = 0 : y'/y = x$, $\ln|y| = x^2/2 + c$, $y = Ce^{x^2/2}$. Et on remarque ensuite que -1 est une solution particulière. La solution générale de l'équation est donc

$$y(x) = -1 + Ce^{x^2/2}, C \in \mathbb{R}.$$

(c) On résoud l'équation sans second membre $y' - 2xy = 0$, et on trouve $y(x) = Ce^{x^2}, C \in \mathbb{R}$. En l'absence de solution particulière "évidente" pour l'équation générale, on peut appliquer la méthode de variation de la constante : on cherche les solutions sous la forme $y(x) = Ce^{x^2}$, ce qui fournit l'équation $C'(x)e^{x^2} = 3xe^{x^2}$, donc $C'(x) = 3x$ et donc $C(x) = 3x^2/2 + c$.

Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y(x) = (3x^2/2 + c)e^{x^2}$.

5. second ordre à coefficients constants

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $y'' + y' + y = 0$, | (d) $y'' + \omega^2 y = 1$, | |
| (b) $y'' + 2y' + y = 2$, | | (e) $y'' + 2y' + 5y = 5 \cos x$, |
| (c) $y'' = \omega^2 y$, | | (f) $y'' + y' - 2y = e^{-2x}$, |

corrigé succinct :

(a) L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$.

Son discriminant est -3 , ses racines sont $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$,

et par conséquent les solutions de l'équation différentielle sont les

$$y(x) = (A \cos(\sqrt{3}x/2) + B \sin(\sqrt{3}x/2))e^{-x/2}, A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) On résoud d'abord l'équation homogène $y'' + 2y' + y = 0$, dont l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ admet une solution unique $r = -1$.

Les solutions de l'équation homogène sont alors $y(x) = (Ax + B)e^{-x}$.

Comme 2 est une solution constante "évidente", on en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = 2 + (Ax + B)e^{-x}, A, B \in \mathbb{R}$.

(c) L'équation caractéristique associée est $r^2 - \omega^2 = 0$, ses solutions sont $\pm\omega$, et les solutions de l'équation différentielle sont ainsi les fonctions de la forme

$$y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}, A, B \in \mathbb{R}.$$

(d) L'équation caractéristique de l'équation sans second membre associée a pour solutions $i\omega$ et $-i\omega$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x, A, B \in \mathbb{R}$.

Comme d'autre part $1/\omega^2$ est une solution constante évidente de l'équation $y'' + \omega^2 y = 1$, les solutions de l'équation initiale sont les fonctions

$$y(x) = 1/\omega^2 + A \cos \omega x + B \sin \omega x, A, B \in \mathbb{R}.$$

(e) L'équation caractéristique $X^2 + 2X + 5 = 0$ a pour solutions $-1 - 2i$ et $-1 + 2i$, donc l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 5y = 0$ a pour solutions les fonctions $y(x) = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^{-x}, A, B \in \mathbb{R}$.

On peut chercher une solution particulière « ressemblant » au second membre, qui est un $\cos x : a \cos x + b \sin x$. Alors l'équation devient $(-a \cos x - b \sin x) + 2(-a \sin x + b \cos x) + 5(a \cos x + b \sin x) = 5 \cos x$. En identifiant les coefficients du sinus et du cosinus,

on en déduit le système $\begin{cases} 4a + 2b = 5 \\ -2a + 4b = 0 \end{cases}$, dont les solutions sont $a = 1$ et $b = 1/2$.

$\cos x + \frac{\sin x}{2}$ est une solution particulière, et les solutions de l'équation initiale sont ainsi les

$$y(x) = \cos x + \frac{\sin x}{2} + Ae^{-x} \cos 2x + Be^{-x} \sin 2x.$$

(f) L'équation homogène $y'' + y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions $y(x) = Ae^{-2x} + Be^x$.

On peut chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = axe^{-2x}$. Alors $y'(x) = (a - 2ax)e^{-2x}$ et $y''(x) = (-4a + 4ax)e^{-2x}$, et l'équation devient donc $(-4a + 4ax) + (a - 2ax) - 2ax = 1$, soit $-4a + a = 1$, soit $a = -1/3$. $-xe^{-2x}/3$ est une solution particulière de l'équation, et les solutions sont ainsi de la forme

$$y(x) = -xe^{-2x}/3 + Ae^{-2x} + Be^x, A, B \in \mathbb{R}.$$

6. * plus dur..

- (a) $xy' + y = xy^3$, (b) $y'' = 2\frac{y}{x^2}$, (c) $4xy'' + 2y' - y = 0$.

corrigé succinct :

(a) On pose $z = 1/y^2$. Alors l'équation devient $-z'/2 + z/x = 1$ linéaire du premier ordre à coefficients constants, on en déduit que $z = Cx^2 + 2x$ donc $y = 1/\sqrt{Cx^2 + 2x}$.

(b) On remarque que pour toute constante λ , $y = \lambda x^2$ est solution.

On souhaite trouver une deuxième famille de solutions pour l'équation : pour cela, et bien qu'il s'agisse d'une équation différentielle du second ordre, on applique aussi ici une méthode de "variation de la constante", en cherchant y sous la forme $y(x) = \lambda(x)x^2$.

Alors $y'(x) = \lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x)$, et on vérifie que $y''(x) = \lambda''(x)x^2 + 4x\lambda'(x) + 2\lambda(x)$, donc l'équation devient $\lambda''(x)x^2 + 4x\lambda'(x) = 0$, soit encore en simplifiant par x : $\lambda''(x) = -4/x\lambda'(x) = 0$, qui est une équation différentielle du premier ordre par rapport à la fonction λ' . On en déduit que $\ln|\lambda'(x)| = -4 \ln|x|$, donc $\lambda'(x) = c/x^4, c \in \mathbb{R}$, donc $\lambda(x) = -\frac{c}{3x^3} + d, c, d \in \mathbb{R}$.

Ainsi, toutes les fonctions $y(x) = -\frac{c}{x} + dx^2$, $c, d \in \mathbb{R}$, sont des solutions. Et on admettra que ce sont les seules, sur chaque intervalle \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* .

(c) indication : étudier la fonction $z(t) = y(t^2)$ (on pose $x = t^2$ soit $t = \sqrt{x}$). On a alors $z'(t) = 2ty'(t^2)$ et $z''(t) = 4t^2y''(t^2) + 2y'(t^2)$. Mais d'après l'équation, $4xy''(x) + 2y'(x) = y(x)$ donc $z''(t) = z(t)$. Donc $z(t) = Ae^t + Be^{-t}$ (équation du second ordre, à coefficients constants sans second membre), donc finalement

$$y(x) = Ae^{\sqrt{x}} + Be^{-\sqrt{x}}, A, B \in \mathbb{R}.$$

exercices pratiques

1. **pour la mécanique de S2** : la fonction cherchée est x ou y ou v ou θ , la variable est le temps t , toutes les autres lettres désignent des constantes.

- | | |
|--|--|
| (a) $m\dot{v} = -Kv + mg$, | (f) $\ddot{x} + \frac{k\eta}{m}\dot{x} = 0$, |
| (b) $\ddot{x} = -kg$, | (g) $\ddot{y} + \frac{k\eta}{m}\dot{y} = -g$, |
| (c) $L\ddot{\theta} + g\theta = 0$, | (h) $I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C\theta = 0$, |
| (d) $m\ddot{x} + K\dot{x} = K\Gamma t$, | (i) $I\ddot{\theta} + C\theta = \Gamma$. |
| (e) $-Kx + k_d m_a g = m_c \ddot{x}$, | |

corrigé succinct :

- (a) 1) l'équation sans second membre associée est $m\dot{v} + Kv = 0$, qui a pour solution $v_H = Ce^{-Kt/m}$.
 2) le second membre est constant : on cherche une vitesse particulière constante solution de l'équation, c'est-à-dire de l'équation $0 = -Kv_p + mg$, on trouve $v_p = mg/K$.
 3) les solutions de l'équation sont donc les fonctions $v(t) = Ce^{-Kt/m} + mg/K$ avec $C \in \mathbb{R}$
- (b) $x(t) = -kgt^2/2 + At + B$
 (c) $\theta(t) = A \cos(\sqrt{g/L}t) + B \sin(\sqrt{g/L}t)$
 (d) $x(t) = A + Be^{-Kt/m} + \Gamma t^2/2 - m\Gamma t/K$
 (e) $x(t) = A \cos(\sqrt{K/m_c}t) + B \sin(\sqrt{K/m_c}t) + k_d m_a g/K$
 (f) $x(t) = A + Be^{-\eta kt/m}$
 (g) $y(t) = A + Be^{-\eta kt/m} - gmt/(k\eta)$
 (h) trois cas à distinguer selon le signe de $B^2 - 4IC...$
 (i) $\theta(t) = A \cos(\sqrt{C/I}t) + B \sin(\sqrt{C/I}t) + \Gamma/C$.

2. **cinétique chimique** : lors de la décomposition de peroxyde d'hydrogène en eau et dioxygène, la concentration de H_2O_2 vérifie l'équation $k[H_2O_2]_t = -\frac{d[H_2O_2]_t}{dt}$ (avec k la constante de vitesse).

Déterminer cette concentration (en fonction de k et t) sachant qu'à l'instant 0 elle vaut 1 mol.L⁻¹.

corrigé succinct :

Il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre et sans second membre, on a $\frac{d[H_2O_2]_t}{[H_2O_2]_t} = -k$ donc $\ln|[H_2O_2]_t| = -kt + a$, donc $[H_2O_2]_t = \pm e^a e^{-kt}$, et les solutions sont les $[H_2O_2]_t = Ae^{-kt}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Mais si on utilise la condition initiale indiquée, $[H_2O_2]_0 = 1 = Ae^0$, donc $A = 1$ mol.L⁻¹.

$$\text{Ainsi, } [H_2O_2]_t = e^{-kt} \text{ mol.L}^{-1}$$

3. **circuit LR série** : l'intensité du courant $i(t)$ qui circule dans un circuit LR soumis à une tension sinusoïdale vérifie l'équation $L\frac{di}{dt} + Ri = U_0 \sin \omega t$. Déterminer i si $i(0) = 0$.

corrigé succinct : L'équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. La solution de l'équation sans second membre associée est $Ke^{-\frac{Rt}{L}}$.

On peut chercher une solution particulière de la forme $A \cos \omega t + B \sin \omega t$. En intégrant dans l'équation, on obtient le système $\omega BL + RA = 0$ et $-\omega AL + RB = U_0$, donc $B = \frac{RU_0}{(\omega L)^2 + R^2}$ et $A = \frac{-L\omega U_0}{(\omega L)^2 + R^2}$ en résolvant le système de deux équations à deux inconnues.

Mais $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{L^2 \omega^2 U_0^2 + R^2 U_0^2}{((\omega L)^2 + R^2)^2}} = U_0 \sqrt{\frac{R^2 + L^2 \omega^2}{((\omega L)^2 + R^2)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$. Et avec $\varphi = -\arctan(\frac{R}{L\omega}) + \pi$, la solution particulière peut se mettre alors sous la forme

$$\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) \text{ soit encore}$$

$$i_p(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \arctan(\frac{R}{L\omega}) - \pi)$$

La solution générale est donc

$$i(t) = Ke^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \arctan(\frac{R}{L\omega}) - \pi), K \in \mathbb{R}$$

particulière pour $i(0) = 0$ est obtenue avec $K = -\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \varphi$, soit

$$i(t) = -\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \varphi e^{-Rt/L} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \arctan(\frac{R}{L\omega}) - \pi).$$

autre méthode avec les représentations complexes pour trouver la solution particulière :

On représente $i_p(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ par $Ae^{j\varphi} e^{j\omega t}$,
 et le second membre $U_0 \sin(\omega t) = U_0 \cos(\omega t - \pi/2)$ par $U_0 e^{j\omega t} e^{-j\pi/2}$.

Alors l'équation devient $(j\omega L + R)Ae^{j\varphi} e^{j\omega t} = U_0 e^{j\omega t} e^{-j\pi/2}$,

donc $(j\omega L + R)Ae^{j\varphi} = U_0 e^{-j\pi/2}$,

$$\text{donc } Ae^{j\varphi} = \frac{U_0 e^{-j\pi/2}}{j\omega L + R}.$$

Le module A est donc $\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$ et l'argument est $-\pi/2 - \arctan \frac{R}{L\omega} = -\pi + (\pi/2 - \arctan \frac{R}{L\omega}) = -\pi + \arctan \frac{L\omega}{R}$, car si $x > 0$
 $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.

4. * **parachute** : un parachutiste est freiné par la résistance de l'air, proportionnelle au carré de sa vitesse. On note $k = 30 \text{ Nm}^{-2}\text{s}^2$ ce coefficient de proportionnalité, et $m = 80 \text{ kg}$ la masse du parachutiste.

(a) Montrer que sa vitesse v vérifie $v' = -\frac{k}{m}v^2 + g$.

(b) A $t = 0$, ayant atteint en chute libre la vitesse de 250 km.h^{-1} , le parachutiste ouvre sa toile. Donner sa vitesse $v(t)$ pour $t > 0$. Quelle est la vitesse limite du mouvement ? Au bout de combien de temps la vitesse est-elle devenue inférieure à 20 km.h^{-1} ?

corrigé succinct :

(a) cf.cours de mécanique en S2...

(b) On applique la question préliminaire avec $y = v$, $x = t$, $a = \sqrt{mg/k}$, $b = -k/m$. Alors $\frac{1+C}{1-C} = v(0)/a$, d'où $C = \frac{-a + v(0)}{a + v(0)}$,
 donc avec $v(0) = 250 \text{ km.h}^{-1} = 69.44 \text{ m.s}^{-1}$ on obtient $C = 0.863$,

et donc

$$v(t) = \sqrt{mg/k} \frac{1 + \frac{v(0)-a}{a+v(0)} e^{-2\sqrt{kg/m}t}}{1 - \frac{v(0)-a}{a+v(0)} e^{-2\sqrt{kg/m}t}} \simeq \frac{5.11 + 4.41e^{-3.83t}}{1 - 0.863e^{-3.83t}}.$$

$$v_\infty = \sqrt{mg/k} \simeq 5.11 \text{ m.s}^{-1} = 18.4 \text{ km.h}^{-1}. \quad \text{Et on trouve } t \simeq 0.8 \text{ s}.$$