Dans tous les exercices, les coordonnées cartésiennes sont données dans un repère orthonormé direct du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ou de l'espace $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

exercices théoriques

1. convertir en coordonnées
   (a) cartésiennes les coordonnées cylindriques $r = 3$, $\theta = -\pi/6$, $z = 2$
   (b) cartésiennes les coordonnées sphériques $r = 2$, $\theta = \pi/6$, $\varphi = \pi/4$
   (c) cylindriques les coordonnées cartésiennes $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$, $z = 1$
   (d) sphériques les coordonnées cartésiennes $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

corrigé succint :

(a) $x = 3\sqrt{3}/2, y = -3/2, z = 2$
(b) $x = \sqrt{2}/2, y = \sqrt{2}/2, z = \sqrt{3}$
(c) $r = 2, \theta = \pi - \pi/4 = 3\pi/4, z = 1$
(d) $\boxed{r = \sqrt{3}}$, $y/x = \sin\varphi/\cos\varphi = \tan\varphi = 1$, donc φ est de la forme $\pi/4 + k\pi$. Mais comme θ est dans $[0, \pi]$, le fait que x et y soient positifs implique que $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ le sont, donc φ est entre 0 et $\pi/2$: $\boxed{\varphi = \pi/4}$.
Enfin, on obtient donc $\cos\theta = z/r = 1/\sqrt{3}$ donc $\boxed{\theta = \arccos 1/\sqrt{3}}$.

2. Décrire les surfaces suivantes dans le système de coordonnées le mieux adapté :
   (a) le demi-disque supérieur de centre O et rayon 2 en polaires
   (b) la surface triangulaire de sommets $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(2, 0)$
   (c) la portion de cylindre d'axe (Oz), de rayon 3, comprise entre les plans d'équations $z = 1$ et $z = 2$
   (d) le cône droit de base circulaire de rayon R et de hauteur H
   (e) le noyau externe de la Terre, d'épaisseur 2300km à partir de 1200km du centre

corrigé succint :

(a) $0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi$
(b) $1 \le x \le 2, 0 \le y \le -x + 2$
(c) $1 \le z \le 2, 0 \le r \le 3$
(d) $0 \le r \le R, 0 \le z \le H(R - r)/R$, ou bien $0 \le z \le H, 0 \le r \le R(H - z)/H$
(e) $2300 \le r \le 3500, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$

3. (a) Que valent $\dfrac{d\vec{u_r}}{dr}$ et $\dfrac{d\vec{u_\theta}}{dr}$?
   (b) Si r et θ sont des fonctions du temps, calculer $\dfrac{d\vec{u_r}}{dt}$ et $\dfrac{d\vec{u_\theta}}{dt}$.

corrigé succint :

(a) Aucun des deux vecteurs du repère polaire de dépend de θ..donc les dérivées sont nulles.
(b) On peut écrire (dérivation de fonction composées) : $\dfrac{d\vec{u_r}}{dt} = \dfrac{d\vec{u_r}}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dt}$, donc $\dfrac{d\vec{u_r}}{dt} = \theta'\vec{u_\theta}$.
De même, $\dfrac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -\theta'\vec{u_r}$.

4. Résoudre les systèmes $(S_1) : \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$ et $(S_2) : \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 4 \\ 4x - y + z = 5 \\ 6x - 4y + z = -1 \end{cases}$.

corrigé succint :
pour (S_1) on ne trouve pas de solution.
pour (S_2) $x = 9/5$, $y = 16/5$, $z = 1$.

5. On donne $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(0, -1, 1)$. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

corrigé succinct : $\vec{u}.\vec{v} = -3$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1, -1, -1)$

6. On considère $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
Déterminer leurs normes, leur produit scalaire, l'angle qu'ils forment entre eux, la projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$, un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

corrigé succinct : On a $||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$, et de même $||\vec{v}|| = \sqrt{6}$. Et $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 2 \times 1 = 3$.
Mais on sait que $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u}, \vec{v})$, donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 3/6 = 1/2$, et donc l'angle géométrique $(\vec{u}, \vec{v})$ vaut $\dfrac{\pi}{3}$.
Soit $\vec{w}$ le projeté de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$. Alors $\vec{w}$ est de la forme $\lambda\vec{v}$ et tel que $\vec{u} - \vec{w}$ soit orthogonal à $\vec{v}$: ainsi, $\vec{u}.\vec{v} - \lambda||\vec{v}||^2 = 0$. $\lambda = \vec{u}.\vec{v}/||\vec{v}||^2$, et donc $\boxed{\text{le projeté de } \vec{u} \text{ sur } \vec{v} \text{ est } \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}.}$ Ici, c'est donc le vecteur $\vec{v}/2$.
le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$...Et on calcule $\vec{u} \wedge \vec{v} = (3, -3, -3)$ (remarque : $(1, -1, -1)$ ou $(-1, 1, 1)$ sont aussi des solutions).

7. (a) Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par A, et M un point quelconque de l'espace. Déterminer la distance $d(M,P)$ en fonction de $\vec{AM}$ et $\vec{n}$.
   (b) Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A, et M un point quelconque ; calculer $d(M,D)$ en fonction de $\vec{AM}$ et $\vec{u}$. Applications numériques :
   (D_1) définie par $A(1,0,-1)$ et $\vec{u}(1,-2,1)$, $M_1(1,-1,3)$.
   (D_2) intersection de $3x+2y-z=7$ et $x+3y+z=0$, $M_2(2,1,-1)$.

corrigé succinct :

(a) Notons H la projection orthogonale de M sur P. La distance $d(M,P)$ cherchée est alors MH.
Mais $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$, et donc $\vec{AM}.\vec{n} = \vec{HM}.\vec{n}$ (car $\vec{AH}$ est un vecteur du plan P, donc est orthogonal à $\vec{n}$), et comme $\vec{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, le produit scalaire $\vec{HM}.\vec{n}$ vaut $\pm HM||\vec{n}||$. Ainsi, on a bien $HM = |\vec{AM}.\vec{n}|/||\vec{n}||$, d'où

$$\boxed{d(M,P) = \frac{|\vec{AM}.\vec{n}|}{||\vec{n}||}.}$$

(b) Appelons H la projection orthogonale de M sur D. Alors MH est la distance cherchée. On peut décomposer le vecteur $\vec{AM}$ en $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$, et on a $\vec{AM} \wedge \vec{u} = \vec{AH} \wedge \vec{u} + \vec{HM} \wedge \vec{u}$. Mais $\vec{u}$ et $\vec{AH}$ sont colinéaires, donc $\vec{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0} + \vec{HM} \wedge \vec{u}$. Et comme $\vec{u}$ et $\vec{HM}$ sont orthogonaux, finalement, $||\vec{AM} \wedge \vec{u}|| = ||\vec{HM}||.||\vec{u}||$. D'où la formule $\boxed{d(M,D) = ||\vec{HM}|| = \frac{||\vec{AM}\wedge\vec{u}||}{||\vec{u}||}.}$
Pour le premier exemple, il s'agit d'une application directe de la formule précédente. On trouve $d(M_1,D_1) = \frac{||(7,4,1)||}{||(1,-2,1)||} = \sqrt{11}$.
Dans le deuxième exemple, la difficulté est de trouver un vecteur directeur et un point de (D_2). La droite est définie comme intersection de deux plans, plans dont les vecteurs normaux $(3,2,-1)$ et $(1,3,1)$ sont orthogonaux à la direction de la droite. Par conséquent (cf. exercice T2), le vecteur $(3,2,-1) \wedge (1,3,1) = (5,-4,7)$ est un vecteur directeur de D.
Pour trouver un point de la droite, il faut fixer une de ses coordonnées librement puis résoudre un système pour trouver les deux autres. Par exemple cherchons le point A dont la côte z vaut 0 : ses coordonnées x et y vérifient $3x+2y=5$ et $x+3y=0$, d'où $x=3$ et $y=-1$: $A(3,-1,0)$.
Ainsi, $d(M_2,D_2) = \frac{||(-10,-2,6)||}{||(5,-4,7)||} = \sqrt{14}/3$.

exercices pratiques

1. Exprimer en coordonnées cartésiennes et cylindriques les vecteurs :
   (a) le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (la direction verticale est celle de $\vec{k}$),
   (b) une force élastique $\vec{F_1} = -k_1\vec{OM}$,
   (c) une force de frottement visqueux $\vec{F_2} = -k_2\vec{v}$,

corrigé succint :

(a)
(b)
(c)

2. **Élingage**
On attache une charge de masse $m = 50$ kg par deux câbles formant un angle α entre eux, puis on suspend le tout par un autre câble. Si chaque câble, individuellement, supporte une masse de 50 kg, le montage est-il solide ?

corrigé succinct : On appelle $\vec{P}$ le poids de la charge, $\vec{T}$ la tension du câble principal, et $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ les tensions des deux câbles de gauche et droite.
Alors $\vec{T} = -\vec{P}$ et $\vec{T} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$.
$\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ ont la même composante verticale, donc $||\vec{T}||^2 = -\vec{T}.(\vec{T_1}+\vec{T_2}) = -2\vec{T}.\vec{T_1} = 2||\vec{T}||.||\vec{T_1}||\cos(\alpha/2)$, et finalement $||\vec{T_1}|| = \frac{mg}{2\cos(\alpha/2)}$.
Pour que le système tienne, il faut que $||\vec{T_1}||$ soit supérieur à mg, donc $2\cos(\alpha/2) \geq 1$, ce qui est possible si et seulement si $|\alpha/2| \leq \frac{\pi}{3}$ (car la fonction cosinus est décroissante) donc il faut et il suffit que l'angle α soit inférieur à $2\pi/3$, soit $120°$.

3. **Particule dans un champ magnétique**
Une particule de charge q, de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est soumise à un champ magnétique constant $\vec{B}(0,0,B)$. Son mouvement est alors décrit par $m\vec{a} = \vec{F}$ (principe fondamental de la dynamique), avec $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ la force de Lorentz.
On note $(x(t), y(t), z(t))$ les coordonnées de la particule en fonction du temps, $(v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ leurs dérivées (les coordonnées de $\vec{v}$) et $(a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ les coordonnées de l'accélération.
   (a) Prévoir, sans calcul, l'allure de la trajectoire de la particule.
   (b) En projetant sur les trois axes le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = \vec{F}$, écrire les trois équations vérifiées par v_x, v_y, v_z et leurs dérivées.
   (c) A l'aide de la troisième de ces équations, déterminer v_z, puis z.
   (d) En dérivant la première équation, puis en combinant le résultat avec la deuxième, déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par v_x. En déduire v_x, puis x. En déduire v_y, puis y, et retrouver le résultat du 3a.

corrigé succinct :

(a)
(b) On calcule $\vec{F} = (qBv_y, -qBv_x, 0)$. Comme $m\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt})$, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m\frac{dv_x}{dt} & = & qBv_y \\ m\frac{dv_y}{dt} & = & -qBv_x \\ m\frac{dv_z}{dt} & = & 0 \end{array} \right.$$

(c) v_z est donc constante, et donc z est de la forme $\boxed{z(t) = z(0) + v_z t.}$

(d) En dérivant deux fois v_x on a : $\frac{d^2 v_x}{dt^2} = qB\frac{dv_y}{dt} = -(qB/m)^2 v_x$.
Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants. Elle admet donc comme solution $v_x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, où $\omega = qB/m$ et A, φ sont des paramètres réels.

Ainsi, $\boxed{x(t) = K + \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi),\ K \in \mathbb{R}.}$

Alors on obtient en dérivant $mv_y = -\frac{1}{qB}A\omega\sin(\omega t + \varphi)$, soit $v_y = -A\sin(\omega t + \varphi)$,

et donc $\boxed{y(t) = L + \frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi),\ L \in \mathbb{R}.}$

Ainsi selon x et y la particule décrit un cercle (x et y sont respectivement un sinus et un cosinus de même amplitude, même pulsation, même phase), alors que selon z elle a un mouvement rectiligne uniforme : finalement, la particule dans ce champ magnétique décrit une hélice.

4. **Géographie**

(a) Quelle est la correspondance entre les coordonnées sphériques θ et φ, et les latitude et longitude des coordonnées géographiques ?

(b) Sur Terre, calculer la distance entre deux points séparés par 1˚de latitude (et de même longitude). Même question pour deux points séparés par 1˚de longitude (et de même latitude).

(c) Calculer la distance entre le département Mesures Physiques (latitude $45˚11'33.1''N$, longitude $5˚43'03.1''E$, altitude 211m), et le Grand Pic de Belledonne (latitude $45˚10'14.2''N$, longitude $5˚59'29.0''E$, altitude 2977m),

corrigé succint :

La relation entre latitude et angle θ est $l = \pi/2 - \theta$, pour la longitude $L = \varphi$ si φ est entre 0 et π, $L = \varphi - 2\pi$.

Pour le département MPh, la latitude exprimée en fraction de degrés vaut 45.169033, la longitude 5.717183.

Pour le Grand Pic, la latitude exprimée en fraction de degrés vaut 45.18885, la longitude 5.988167.

Les coordonnées du département MPh sont donc $r_1 = 6378.211$, $\theta_1 = 0.7886942$, $\varphi_1 = 0.0997837$, soit en coordonnées cartésiennes $x_1 = 4502.409$, $y_1 = 450.7639$, $z_1 = 4524.917$.

Pour le Grand Pic de Belledonne : $r_2 = 6380.977$, $\theta_2 = 0.7883483$, $\varphi_2 = 0.1045132$, soit $x_2 = 4500.631$, $y_2 = 472.0956$, $z_2 = 4498.701$.

Et la distance vaut, au final, 33.8448 kilomètres.