

Dans tous les exercices, les coordonnées cartésiennes sont données dans un repère ortho-normé direct du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) ou de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

exercices théoriques

1. convertir en coordonnées

- (a) cartésiennes les coordonnées cylindriques $r = 3, \theta = -\pi/6, z = 2$
- (b) cartésiennes les coordonnées sphériques $r = 2, \theta = \pi/6, \varphi = \pi/4$
- (c) cylindriques les coordonnées cartésiennes $x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}, z = 1$
- (d) sphériques les coordonnées cartésiennes $x = 1, y = 1, z = 1$

corrigé succinct :

- (a) $x = 3\sqrt{3}/2, y = -3/2, z = 2$
- (b) $x = \sqrt{2}/2, y = \sqrt{2}/2, z = \sqrt{3}$
- (c) $r = 2, \theta = \pi - \pi/4 = 3\pi/4, z = 1$

(d) $r = \sqrt{3}$, $y/x = \sin \varphi / \cos \varphi = \tan \varphi = 1$, donc φ est de la forme $\pi/4 + k\pi$. Mais comme θ est dans $[0, \pi]$, le fait que x et y soient positifs implique que $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ le sont, donc φ est entre 0 et $\pi/2$: $\varphi = \pi/4$.

Enfin, on obtient donc $\cos \theta = z/r = 1/\sqrt{3}$ donc $\theta = \arccos 1/\sqrt{3}$.

2. Décrire les surfaces suivantes dans le système de coordonnées le mieux adapté :

- (a) le demi-disque supérieur de centre O et rayon 2 en polaires
- (b) la surface triangulaire de sommets $A(1, 0), B(1, 1), C(2, 0)$
- (c) la portion de cylindre d'axe (Oz) , de rayon 3, comprise entre les plans d'équations $z = 1$ et $z = 2$
- (d) le cône droit de base circulaire de rayon R et de hauteur H
- (e) le noyau externe de la Terre, d'épaisseur 2300km à partir de 1200km du centre

corrigé succinct :

- (a) $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$
- (b) $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq -x + 2$
- (c) $1 \leq z \leq 2, 0 \leq r \leq 3$
- (d) $0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq H(R-r)/R$, ou bien $0 \leq z \leq H, 0 \leq r \leq R(H-z)/H$

(e) $2300 \leq r \leq 3500, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

3. Résoudre les systèmes $(S_1) : \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$, $(S_2) : \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 4 \\ 4x - y + z = 5 \\ 6x - 4y + z = -1 \end{cases}$,
 $(S_3) : \begin{cases} 2x + 3y - z = -5 \\ 3x - y + z = 6 \\ 4x + 3y - z = -7 \end{cases}$, $(S_4) : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - 3y + z = 4 \\ 4x - 5y + 3z = 10 \end{cases}$.

corrigé succinct :
pour (S_1) on ne trouve pas de solution.

pour (S_2) $x = 9/5, y = 16/5, z = 1$.

Le système S_3 équivaut successivement à :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 & (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ 3x - y + z = 6 \\ 7x + 2y = -1 & (L_3 \leftarrow L_1 + L_3) \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 3x - y + z = 6 \\ 2x = -2 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

d'où l'on déduit par la ligne 3 : $x = -1$, puis avec la ligne 1 : $y = 3$, puis avec la ligne 2 : $z = 12$.

Le système S_4 équivaut successivement à :

$$\begin{cases} 7y - 3z = -6 & (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\ x - 3y + z = 4 \\ 7y - z = -6 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2) \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} 7y - 3z = -6 \\ x - 3y + z = 4 \\ 2z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

d'où l'on déduit par la ligne 3 : $z = 0$, puis avec la ligne 1 : $y = -6/7$, puis avec la ligne 2 : $x = 4 + 3y - z = 4 - 18/7 + 0 = 10/7$.

4. On donne $\vec{u}(1, 2, -1), \vec{v}(0, -1, 1)$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

corrigé succinct : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3, \vec{u} \wedge \vec{v} = (1, -1, -1)$

5. On considère $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Déterminer leurs normes, leur produit scalaire, l'angle qu'ils forment entre eux, la projection de \vec{u} sur \vec{v} , un vecteur orthogonal à \vec{u} et \vec{v} .

corrigé succinct : On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$, et de même $\|\vec{v}\| = \sqrt{6}$. Et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 2 \times 1 = 3$.

Mais on sait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$, donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 3/6 = 1/2$, et donc l'angle géométrique (\vec{u}, \vec{v}) vaut $\frac{\pi}{3}$.

Soit \vec{w} le projeté de \vec{u} sur \vec{v} . Alors \vec{w} est de la forme $\lambda \vec{v}$ et tel que $\vec{u} - \vec{w}$ soit orthogonal à \vec{v} :

ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{v} - \lambda \|\vec{v}\|^2 = 0$. $\lambda = \vec{u} \cdot \vec{v} / \|\vec{v}\|^2$, et donc le projeté de \vec{u} sur \vec{v} est $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$. Ici, c'est

donc le vecteur $\vec{v}/2$.

le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à \vec{u} et \vec{v} ... Et on calcule $\vec{u} \wedge \vec{v} = (3, -3, -3)$ (remarque : $(1, -1, -1)$ ou $(-1, 1, 1)$ sont aussi des solutions).

6. (a) Soit (P) un plan de vecteur normal \vec{n} passant par A , et M un point quelconque de l'espace. Déterminer la distance $d(M, P)$ en fonction de \vec{AM} et \vec{n} .

(b) Soit (D) une droite de vecteur directeur \vec{u} passant par A , et M un point quelconque ; calculer $d(M, D)$ en fonction de \vec{AM} et \vec{u} . Applications numériques :

(D_1) définie par $A(1, 0, -1)$ et $\vec{u}(1, -2, 1)$, $M_1(1, -1, 3)$.

(D_2) intersection de $3x + 2y - z = 7$ et $x + 3y + z = 0$, $M_2(2, 1, -1)$.

corrigé succinct :

(a) Notons H la projection orthogonale de M sur P . La distance $d(M, P)$ cherchée est alors MH .

Mais $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$, et donc $\vec{AM} \cdot \vec{n} = \vec{HM} \cdot \vec{n}$ (car \vec{AH} est un vecteur du plan P , donc est orthogonal à \vec{n}), et comme \vec{HM} et \vec{n} sont colinéaires, le produit scalaire $\vec{HM} \cdot \vec{n}$ vaut

$\pm HM \|\vec{n}\|$. Ainsi, on a bien $HM = |\vec{AM} \cdot \vec{n}| / \|\vec{n}\|$, d'où $d(M, P) = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

(b) Appelons H la projection orthogonale de M sur D . Alors MH est la distance cherchée. On peut décomposer le vecteur \vec{AM} en $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$, et on a $\vec{AM} \wedge \vec{u} = \vec{AH} \wedge \vec{u} + \vec{HM} \wedge \vec{u}$. Mais \vec{u} et \vec{AH} sont colinéaires, donc $\vec{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0} + \vec{HM} \wedge \vec{u}$. Et comme \vec{u} et \vec{HM} sont orthogonaux, finalement, $\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{HM}\| \cdot \|\vec{u}\|$. D'où la

formule $d(M, D) = \|\vec{HM}\| = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Pour le premier exemple, il s'agit d'une application directe de la formule précédente. On trouve $d(M_1, D_1) = \frac{\|(7, 4, 1)\|}{\|(1, -2, 1)\|} = \sqrt{11}$.

Dans le deuxième exemple, la difficulté est de trouver un vecteur directeur et un point de (D_2) . La droite est définie comme intersection de deux plans, plans dont les vecteurs normaux $(3, 2, -1)$ et $(1, 3, 1)$ sont orthogonaux à la direction de la droite. Par conséquent (cf. exercice T2), le vecteur $(3, 2, -1) \wedge (1, 3, 1) = (5, -4, 7)$ est un vecteur directeur de D .

Pour trouver un point de la droite, il faut fixer une de ses coordonnées librement puis résoudre un système pour trouver les deux autres. Par exemple cherchons le point A dont la cote z vaut 0 : ses coordonnées x et y vérifient $3x + 2y = 5$ et $x + 3y = 0$, d'où $x = 3$ et $y = -1$: $A(3, -1, 0)$.

Ainsi, $d(M_2, D_2) = \frac{\|(-10, -2, 6)\|}{\|(5, -4, 7)\|} = \sqrt{14}/3$.

1. On considère un objet ponctuel de masse m , situé sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.

Donner en fonction de \vec{i} et \vec{j} l'expression du poids de l'objet (de norme mg), de la réaction du support de norme R , et d'une force de frottement de norme F et dirigée selon la direction du plan incliné.

corrigé succinct :

2. **Élingage**

On attache une charge de masse $m = 50$ kg par deux câbles formant un angle α entre eux, puis on suspend le tout par un autre câble. Si chaque câble, individuellement, supporte une masse de 50 kg, le montage est-il solide ?

corrigé succinct : On appelle \vec{P} le poids de la charge, \vec{T} la tension du câble principal, et \vec{T}_1 et \vec{T}_2 les tensions des deux câbles de gauche et droite.

Alors $\vec{T} = -\vec{P}$ et $\vec{T} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$.

\vec{T}_1 et \vec{T}_2 ont la même composante verticale, donc $\|\vec{T}\|^2 = -\vec{T} \cdot (\vec{T}_1 + \vec{T}_2) = -2\vec{T} \cdot \vec{T}_1 = 2\|\vec{T}\| \cdot \|\vec{T}_1\| \cos(\alpha/2)$, et finalement $\|\vec{T}_1\| = \frac{mg}{2 \cos(\alpha/2)}$.

Pour que le système tienne, il faut que $\|\vec{T}_1\|$ soit supérieur à mg , donc $2 \cos(\alpha/2) \geq 1$, ce qui est possible si et seulement si $|\alpha/2| \leq \frac{\pi}{3}$ (car la fonction cosinus est décroissante) donc il faut et il suffit que l'angle α soit inférieur à $2\pi/3$, soit 120° .

3. **Particule dans un champ magnétique**

Une particule de charge q , de masse m et de vitesse \vec{v} est soumise à un champ magnétique constant $\vec{B}(0, 0, B)$. Son mouvement est alors décrit par $m\vec{a} = \vec{F}$ (principe fondamental de la dynamique), avec $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ la force de Lorentz.

On note $(x(t), y(t), z(t))$ les coordonnées de la particule en fonction du temps, $(v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ leurs dérivées (les coordonnées de \vec{v}) et $(a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ les coordonnées de l'accélération.

(a) Prévoir, sans calcul, l'allure de la trajectoire de la particule.

(b) En projetant sur les trois axes le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = \vec{F}$, écrire les trois équations vérifiées par v_x, v_y, v_z et leurs dérivées.

(c) A l'aide de la troisième de ces équations, déterminer v_z , puis z .

(d) En dérivant la première équation, puis en combinant le résultat avec la deuxième, déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par v_x . En déduire v_x , puis x . En déduire v_y , puis y , et retrouver le résultat du 3a.

corrigé succinct :

(a)

(b) On calcule $\vec{F} = (qBv_y, -qBv_x, 0)$. Comme $m\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt})$, on obtient le système :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qBv_y \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

(c) v_z est donc constante, et donc z est de la forme $z(t) = z(0) + v_z t$.

(d) En dérivant deux fois v_x on a : $\frac{d^2 v_x}{dt^2} = qB \frac{dv_y}{dt} = -(qB/m)^2 v_x$.

Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants. Elle admet donc comme solution $v_x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, où $\omega = qB/m$ et A, φ sont des paramètres réels.

Ainsi, $x(t) = K + \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$, $K \in \mathbb{R}$.

Alors on obtient en dérivant $mv_y = -\frac{1}{qB} A \omega \sin(\omega t + \varphi)$, soit $v_y = -A \sin(\omega t + \varphi)$, et

donc $y(t) = L + \frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$, $L \in \mathbb{R}$.

Ainsi selon x et y la particule décrit un cercle (x et y sont respectivement un sinus et un cosinus de même amplitude, même pulsation, même phase), alors que selon z elle a un mouvement rectiligne uniforme : finalement, la particule dans ce champ magnétique décrit une hélice.

4. Géographie

(a) Quelle est la correspondance entre les coordonnées sphériques θ et φ , et les latitude et longitude des coordonnées géographiques ?

(b) Sur Terre, calculer la distance entre deux points séparés par 1° de latitude (et de même longitude). Même question pour deux points séparés par 1° de longitude (et de même latitude).

(c) Calculer la distance entre le département Mesures Physiques (latitude $45^\circ 11' 33.1'' N$, longitude $5^\circ 43' 03.1'' E$, altitude 211m), et le Grand Pic de Belledonne (latitude $45^\circ 10' 14.2'' N$, longitude $5^\circ 59' 29.0'' E$, altitude 2977m),

corrigé succinct :

La relation entre latitude et angle θ est $l = \pi/2 - \theta$, pour la longitude $L = \varphi$ si φ est entre 0 et π , $L = \varphi - 2\pi$.

Pour le département MPH, la latitude exprimée en fraction de degrés vaut 45.169033, la longitude 5.717183.

Pour le Grand Pic, la latitude exprimée en fraction de degrés vaut 45.18885, la longitude 5.988167.

Les coordonnées du département MPH sont donc $r_1 = 6378.211$, $\theta_1 = 0.7886942$, $\varphi_1 = 0.0997837$, soit en coordonnées cartésiennes $x_1 = 4502.409$, $y_1 = 450.7639$, $z_1 = 4524.917$.

Pour le Grand Pic de Belledonne : $r_2 = 6380.977$, $\theta_2 = 0.7883483$, $\varphi_2 = 0.1045132$, soit $x_2 = 4500.631$, $y_2 = 472.0956$, $z_2 = 4498.701$.

Et la distance vaut, au final, 33.8448 kilomètres.