Dans tous les exercices, les coordonnées cartésiennes sont données dans un repère orthonormé direct du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ou de l'espace $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

exercices théoriques

1. Déterminer une équation cartésienne du plan de vecteur normal $\vec{u}(3, 2, -2)$ passant par le point $A(1, -1, 0)$.

corrigé succint :

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. M appartient au plan si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{AM}$ sont orthogonaux, donc s'ils ont un produit scalaire nul.

Ainsi $3(x-1) + 2(y+1) - 2(z-0) = 0$, soit encore $3x + 2y - 2z = 1$.

(on peut aussi dire : l'équation est de la forme $3x + 2y - 2z = d$ (les coefficients devant x, y, z sont ceux du vecteur normal), et appliquer la formule pour le point A permet d'obtenir la valeur de la constante d).

2. On donne $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(0, -1, 1)$, $\vec{w}(1, -1, 3)$.

   Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$, le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$.

corrigé succinct :

$\vec{u}.\vec{v} = -3$, et

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (1, -1, -1)$.

Le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est égal à $\vec{w}.(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (1, -1, 3).(1, -1, -1) = 1 + 1 - 3 = -1$.

3. On considère $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

   Déterminer : $||\vec{u}||$, $||\vec{v}||$, $\vec{u}.\vec{v}$, l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, la projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$, et enfin un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   (+) Même question en reprenant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exercice 2.

corrigé succinct : On a $||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$, et de même $||\vec{v}|| = \sqrt{6}$. Et $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 2 \times 1 = 3$.

Mais on sait que $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u}, \vec{v})$, donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 3/6 = 1/2$, et donc l'angle géométrique $(\vec{u}, \vec{v})$ vaut $\frac{\pi}{3}$.

Soit $\vec{w}$ le projeté de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$. Alors $\vec{w}$ est de la forme $\lambda\vec{v}$ et tel que $\vec{u} - \vec{w}$ soit orthogonal à $\vec{v}$: ainsi, $\vec{u}.\vec{v} - \lambda||\vec{v}||^2 = 0$. $\lambda = \vec{u}.\vec{v}/||\vec{v}||^2$, et donc le projeté de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est $\frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$. Ici, c'est donc le vecteur $\vec{v}/2$.

le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$...Et on calcule $\vec{u} \wedge \vec{v} = (3, -3, -3)$ (remarque : $(1, -1, -1)$ ou $(-1, 1, 1)$ sont aussi des solutions).

Et si on reprend les mêmes questions pour les vecteurs de l'exercice précédent :

On a $||\vec{u}|| = \sqrt{6}$, et $||\vec{v}|| = \sqrt{2}$.

$\vec{u}.\vec{v} = -3$ déjà calculé, et le produit vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$, qui est donc un vecteur orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, vaut $(7, -4, -3)$.

On a aussi $\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -3/(\sqrt{6}.\sqrt{2}) = -\sqrt{3}/2$ donc l'angle géométrique vaut $5\pi/6$.

Et enfin, la projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ vaut

$((\vec{u}.\vec{v})/||\vec{v}||)/(||(\vec{v}||.||\vec{v}||) = -3.\vec{v}/2$

4. (a) Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par A, et M un point quelconque de l'espace. Déterminer la distance $d(M, P)$ en fonction de $\vec{AM}$ et $\vec{n}$.

   Application numérique : donner la distance du point $M(1, 0, -3)$ au plan $3x + 2y - 5z = 1$

   (b) Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$v passant par A, et M un point quelconque ; calculer $d(M, D)$ en fonction de $\vec{AM}$ et $\vec{u}$.

   Applications numériques pour :

   (D_1) définie par $A_1(1, 0, -1)$ et $\vec{u_1}(1, -2, 1)$, $M_1(1, -1, 3)$.

   (D_2) l'intersection de $3x+2y-z = 7$ et $x+3y+z = 0$, $M_2(2, 1, -1)$.

corrigé succinct :

(a) Notons H la projection orthogonale de M sur P. La distance $d(M, P)$ cherchée est alors MH.

Mais $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$, et donc $\vec{AM}.\vec{n} = \vec{HM}.\vec{n}$ (car $\vec{AH}$ est un vecteur du plan P, donc est orthogonal à $\vec{n}$), et comme $\vec{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, le produit scalaire $\vec{HM}.\vec{n}$ vaut $\pm HM||\vec{n}||$. Ainsi, on a bien $HM = |\vec{AM}.\vec{n}|/||\vec{n}||$, d'où $d(M, P) = \frac{|\vec{AM}.\vec{n}|}{||\vec{n}||}$.

Pour l'application numérique on peut prendre par exemple $A(1/3, 0, 0)$ et $\vec{u}(3, 2, -5)$ pour décrire le plan. Alors $\vec{AM}(2/3, 0, -3)$, donc $\vec{AM}.\vec{u} = 2 + 0 + 15 = 17$, et la distance vaut donc $17/\sqrt{9 + 4 + 25} = 17/38$.

(b) Appelons H la projection orthogonale de M sur D. Alors MH est la distance cherchée. On peut décomposer le vecteur $\vec{AM}$ en $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$, et on a $\vec{AM} \wedge \vec{u} = \vec{AH} \wedge \vec{u} + \vec{HM} \wedge \vec{u}$. Mais $\vec{u}$ et $\vec{AH}$ sont colinéraires, donc $\vec{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0} + \vec{HM} \wedge \vec{u}$. Et comme $\vec{u}$ et $\vec{HM}$ sont orthogonaux, finalement, $||\vec{AM} \wedge \vec{u}|| = ||\vec{HM}||.||\vec{u}||$. D'où la formule $\boxed{d(M, D) = ||\vec{HM}|| = \frac{||\vec{AM} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}}$.

Pour le premier exemple, il s'agit d'une application directe de la formule précédente. On trouve $d(M_1, D_1) = \frac{||(7,4,1)||}{||(1,-2,1)||} = \sqrt{11}$.

Dans le deuxième exemple, la difficulté est de trouver un vecteur directeur et un point de (D_2). La droite est définie comme intersection de deux plans, plans dont les vecteurs normaux $(3, 2, -1)$ et $(1, 3, 1)$ sont orthogonaux à la direction de la droite. Par conséquent (cf. exercice T2), le vecteur $(3, 2, -1) \wedge (1, 3, 1) = (5, -4, 7)$ est un vecteur directeur de D.

Pour trouver un point de la droite, il faut fixer une de ses coordonnées librement puis résoudre un système pour trouver les deux autres. Par exemple cherchons le point A dont la côte z vaut 0 : ses coordonnées x et y vérifient $3x + 2y = 5$ et $x + 3y = 0$, d'où $x = 3$ et $y = -1$: $A(3, -1, 0)$.

Ainsi, $d(M_2, D_2) = \frac{||(-10,-2,6)||}{||(5,-4,7)||} = \sqrt{14}/3$.

exercices pratiques

1. On considère un object ponctuel de masse m, situé sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.

   Donner en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ l'expression du poids de l'objet (de norme mg), de la réaction du support de norme R, et d'une force de frottement de norme F et dirigée selon la direction du plan incliné.

   corrigé succint :

2. **Moments des forces sur un pendule**

   On considère un fil au bout duquel est attaché un objet ponctuel de masse m, et faisant un angle θ avec la verticale.

   Quelles sont les forces qui s'appliquent sur l'objet ?

   Le moment par rapport à un point O d'une force s'appliquant en un point M est défini par la formule $\vec{OM} \wedge \vec{F}$. Ce moment mesure la capacité de la force à faire tourner l'objet autour de O.

   Calculer le moment par rapport à O de chaque force s'appliquant sur le pendule.

3. **Élingage**

   On attache une charge de masse $m = 50$ kg par deux câbles formant un angle α entre eux, puis on suspend le tout par un autre câble. Si chaque câble, individuellement, supporte une masse de 50 kg, le montage est-il solide ?

corrigé succinct : On appelle $\vec{P}$ le poids de la charge, $\vec{T}$ la tension du câble principal, et $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ les tensions des deux câbles de gauche et droite.

Alors $\vec{T} = -\vec{P}$ et $\vec{T} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$.

$\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ ont la même composante verticale, donc $||\vec{T}||^2 = -\vec{T}.(\vec{T_1} + \vec{T_2}) = -2\vec{T}.\vec{T_1} = 2||\vec{T}||.||\vec{T_1}|| \cos(\alpha/2)$, et finalement $||\vec{T_1}|| = \frac{mg}{2\cos(\alpha/2)}$.

Pour que le système tienne, il faut que $||\vec{T_1}||$ soit supérieur à mg, donc $2\cos(\alpha/2) \geq 1$, ce qui est possible si et seulement si $|\alpha/2| \leq \frac{\pi}{3}$ (car la fonction cosinus est décroissante) donc il faut et il suffit que l'angle α soit inférieur à $2\pi/3$, soit 120 degrés.