l'approximation des petits angles :

On considère l'équation du pendule en mécanique : $l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

Si on veut exprimer θ en fonction du temps ? On ne sait pas trouver de formule ! !

Mais pour de petits angles, $\sin\theta \simeq \theta$. Et l'équation devient $l\ddot{\theta} + g\theta = 0$: c'est une équation linéaire du second ordre, on sait la résoudre :

$$\theta(t) = a\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + b\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t),$$

soit encore $\theta(t) = A\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t - \varphi)$

(avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = \arctan(b/a)$, $+\pi$ si $a < 0$)

On a donc, en remplaçant une fonction comme $\sin$ par un polynôme simple ($\sin\theta \simeq \theta$) pu trouver une formule approchée pour une fonction solution $\theta(t)$ que l'on ne sait pas exprimer du tout dans le cas général.

un autre exemple d'approximation :

$$\text{Soit la fonction } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

On calcule quelques valeurs, ainsi que les valeurs de de $1 + x/2$ et de $1 + x/2 + 3x^2/8$:

x	$f(x)$	$1 + x/2$	$1 + x/2 + 3x^2/8$
1	$+\infty$	1.5	1.875
0.5	1.41214	1.25	1.34375
0.1	1.05409	1.05	1.05375
0.01	1.0050378	1.005	1.005375
0.001	1.000500375	1.0005	1.000500375

On voit que pour x petit (proche de 0), $1 + x/2$ est une bonne approximation de $f(x)$, et $1 + x/2 + 3x^2/8$ une encore meilleure.

Pour x moins proche de 0, c'est nettement moins vrai.

application au dipôle :

On place en $A(-a,0)$ une charge $-q$, et en $B(a,0)$ une charge q.
On veut calculer le potentiel $V(M)$ en un point M de coordonnées polaires r et θ.

Les coordonnées cartésiennes de M sont $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, donc
$AM = r\sqrt{1+2\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{a^2}{r^2}}$, $BM = r\sqrt{1-2\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{a^2}{r^2}}$,

$$\text{et donc } V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{a^2}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{a^2}{r^2}}}\right).$$

C'est une formule exacte mais compliquée ! Difficile ensuite de, par exemple, en calculer la dérivée (pour calculer le champ électrique associé)...

Si $r >> a$, $2\frac{a}{r}\cos\theta - \frac{a^2}{r^2} \simeq 2\frac{a}{r}\cos\theta$ et $-2\frac{a}{r}\cos\theta - \frac{a^2}{r^2} \simeq -2\frac{a}{r}\cos\theta$, donc
$V(M) \simeq \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{a}{r}\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{a}{r}\cos\theta}}\right)$

Mais $x = \frac{a}{r}$ est petit : avec l'approximation $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \simeq 1 + x/2$,
$V(M) \simeq \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r}((1-\frac{a}{r}\cos\theta) - (1+\frac{a}{r}\cos\theta))$, et ainsi :

$$V(M) \simeq \frac{qa\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

développement limité

Le développement limité d'ordre n d'une fonction f en x_0 est une expression $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$, avec les a_i constants, et $\epsilon(x)$ une fonction qui tend vers 0 en x_0.

On peut aussi noter le reste $(x - x_0)^n\, \epsilon(x)$ sous la forme $\circ((x - x_0)^n)$, ou encore, par abus, sous la forme $\ldots$

Le plus souvent, on utilisera pour une fonction f son

développement limité en 0 d'ordre n

de la forme $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

Ce développement n'a de sens que si x est petit.
Alors, chacun des termes est plus petit (quand x tend vers x_0) que le précédent et rend l'approximation plus précise.

exemple : le développement limité d'ordre 1 en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est $1 + x/2 \ldots$,
le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est $1 + x/2 + 3x^2/8 + \ldots$

formule de Taylor

formule de Taylor :

une fonction $n+1$ fois dérivable admet pour développement limité d'ordre n en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

en particulier, en 0 on obtient la

formule de Taylor-Young :

une fonction $n+1$ fois dérivable admet pour développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Ainsi, le développement limité d'ordre 0 en 0 d'une fonction continue est $f(x) = f(0)$: cela revient à remplacer la fonction par sa valeur en 0.

et le développement limité d'ordre 1 en 0 d'une fonction dérivable est $f(x) = f(0) + f'(0)x$: c'est l'équation de sa tangente en 0.

trois exemples simples :

la valeur en 0 de la dérivée n-ième de l'exponentielle vaut toujours 1, donc :

exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

de même la valeur en 0 de la dérivée n-ième du cosinus vaut alternativement $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$ donc

cosinus :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

et de même :

sinus :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

applications aux calculs de limite :

exemple 1 : on souhaite déterminer la limite en 0 de $\dfrac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$".
Difficile de comparer les valeurs d'un cosinus, d'une exponentielle ; et aucune formule exacte ne permet de simplification de l'expression.

Mais on cherche la limite en 0 : pas besoin de formule exacte, il suffit de "simplifier" les expressions pour x proche de 0 !

On va se contenter de prendre une expression avec 2 termes non nuls, donc :

on remplace $\cos(x)$ par $1 - x^2/2 + ...$ (DL d'ordre 2)

et e^{x^2} par $1 + x^2 + ...$

$$\text{Ainsi, } \frac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1} = \frac{1-(1-x^2/2+\dots)}{(1+x^2+\dots)-1} = \frac{x^2/2+\dots}{x^2+\dots}.$$

Cette expression peut se simplifier par x^2 : $\dfrac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1} = \dfrac{1/2+\dots}{1+\dots}$
...et la limite cherchée est donc $1/2$.

applications aux calculs de limite :

exemple 2 : on souhaite déterminer la limite en 0 de $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

On commencera par essayer de se ramener à une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$", en additionnant les deux fractions : $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \sin(x)}{x}$

On peut alors utiliser un développement limité d'ordre 3, à deux termes non nul, de sin : $\sin(x) = x - x^3/6 + \dots$.

Ainsi, $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - (x - x^3/6 + \dots)}{x} = \dfrac{x^3/6 + \dots}{x}$.

En simplifiant l'expression par x, on lève l'indétermination : $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2/6 + \dots}{1}$, et la limite est donc nulle.

DL d'une puissance

pour tout réel α et tout entier positif k on voit par récurrence que

$$\frac{\mathrm{d}^k(1+x)^\alpha}{\mathrm{d}x^k} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \text{ donc}$$

pour une puissance α :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ \dots$$

si $\alpha = -1$ on obtient en particulier

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots$$

de même si $\alpha = 1/2$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \dots$$

DL d'une somme, d'un produit

DL d'une somme :

le développement limité d'ordre n en 0 de $f+g$ est la somme du développement limité d'ordre n en 0 de f et du développement limité d'ordre n en 0 de g

exemple : le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\sin(x)+\sqrt{1+x}$ est
$1+3x/2-x^2/8+\dots$

DL d'un produit :

pour déterminer le développement limité d'ordre n en 0 de fg il suffit de multiplier le développement limité d'ordre n en 0 de f par celui de g, **en ne gardant que les termes de dégré inférieur ou égal à** n

exemple : le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+x}\cos(x)$ est
$1+x/2-5x^2/8+\dots$

exemple : le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x^2\exp(x)$ est $x^2+x^3+x^4/2+\dots$

DL d'une composée

dans un développement limité de $f(x)$, on peut remplacer x par n'importe quelle expression qui tend vers 0, développer, et ne garder que les termes de degré inférieur ou égal à l'ordre souhaité

exemple 1 : le DL d'ordre 3 en 0 de $\cos(2x)$ est $1 - (2x)^2/2 + \ldots = 1 - 2x^2 + \ldots$

exemple 2 : le DL d'ordre 4 en 0 de $\exp(x^2)$ est $1 + x^2 + x^4/2 + \ldots$

exemple 3 : le DL d'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+x+3x^2}$ est $1 - (x+3x^2) + (x+3x^2)^2/2 + \ldots$ soit $1 - x - 3x^2 + x^2 + 6x^3 + 9x^4 + \ldots$.

Mais, étant partis d'un DL d'ordre 2 de $1/(1+x)$, les termes de degré 3 et 4 ne sont pas significatifs, et ne correspondent pas aux termes que l'on obtiendrait en calculant un DL d'ordre 3 ou 4.

Finalement on obtient le DL d'ordre 2 en 0 : $1 - x - 2x^2 \ldots$.

DL d'un quotient

DL d'un quotient :

si $g(0) \neq 0$, le développement limité d'ordre n de $f(x)/g(x)$ est le quotient de la division selon les puissances croissantes du développement limité d'ordre n de f par le développement limité d'ordre n de g.

exemple : le DL d'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+x+3x^2}$ est $1-x-2x^2+\ldots$ car

$$
\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & & & & & & & 1 & + & x & + & 3x^2 \\
1 & + & x & + & 3x^2 & & & 1 & - & x & - & 2x^2 \\
\hline
 & - & x & - & 3x^2 & & & & & & & \\
 & - & x & - & x^2 & + & \ldots & & & & & \\
\hline
 & & & - & 2x^2 & + & \ldots & & & & & \\
 & & & - & 2x^2 & + & \ldots & & & & & \\
\hline
 & & & & & & \ldots & & & & &
\end{array}
$$

exemple : le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\tan(x)$ est $x + x^3/3 + \ldots$

DL d'une primitive

si $F'(x) = f(x)$, on obtient le développement limité d'ordre n de F en primitivant le développement limité d'ordre $n-1$ de $f(x)$ et en prenant pour constante $F(0)$.

exemple : le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$ est $x - x^2/2 + x^3/3 + \dots$

exemple : le développement limité d'ordre 5 en 0 de $\arctan(x)$ est $x - x^3/3 + x^5/5 + \dots$

DL en l'infini

En utilisant la quantité $1/x$, on peut aussi utiliser les développements limités pour déterminer des limites et asymptotes en l'infini.

Par exemple, pour trouver la droite asymptote en $+\infty$ à la courbe $C : y = \sqrt{x^2+x+1}$, on aimerait remplacer la racine par des fonctions plus simples à manipuler...on va utiliser un développement limité.

On a vu que **si** u **est proche de 0**, $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 - u^2/8 + \dots$.

On va ici faire apparaître des termes $u = 1/x$, qui tendent bien vers 0 si x tend vers l'infini, en mettant x^2 en facteur dans la racine : $y = x\sqrt{1 + (1/x + 1/x^2)}$.

En utilisant le développement limité : $y = x(1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) - \frac{1}{8}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})^2 + \dots)$

En développant et en ne gardant pas les termes en $1/x^3$, $1/x^4$, ... :

$y = x(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^2} + \dots)$ soit finalement $y = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x^2} + \dots$.

Si on considère la droite $D : y = x + 1/2$, on constate donc que la différence de hauteur entre un point de C et un point de D vaut approximativement $\frac{3}{8x^2}$: elle est positive et tend vers 0 en $+\infty$.

Par conséquent, D est asymptote à C, et C est située au dessus de D.