TD 1 : Fonctions vectorielles - corrigé

Dans tous les exercices, les coordonnées cartésiennes sont données dans un repère orthonormé direct du plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ou de l'espace $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Quand rien n'est précisé, les valeurs numériques sont exprimées en unités du système international (usi).

1. (a) Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(1,2)$ et $B(2,5)$.
   Quelle condition doivent vérifier les coordonnées d'un point du plan pour qu'il soit au dessus de la droite ?
   (b) Reconnaître l'ensemble des points du plan d'équations paramétriques $x(t)=3t+2, y(t)=2t+1$
   (c) Reconnaître l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $2x-2y-z=-3,\ x-4y+z=0$
   (d) Reconnaître l'ensemble des points du plan d'équations paramétriques $x(t)=2\cos(at^2)+1, y(t)=2\sin(at^2)+3$ (a constante)

   corrigé succinct :

   (a) L'équation de la droite est $y=3x-1$. L'équation du demi-plan supérieur délimité par cette droite est $y\geq 3x-1$.
   (b) c'est la droite passant par $A(2,1)$ et de vecteur directeur $(3,2)$.
   (c) on trouve en exprimant x et z en fonction de y : $x=-1+2y, y=y, z=2y+1$ donc il s'agit de la droite passant par $A(-1,0,1)$ et de vecteur directeur $(2,1,2)$.
   (d) il s'agit du cercle de centre $(1,3)$ et de rayon 2. Il est parcouru à la vitesse angulaire $2at$ à partir du point $(3,3)$ à l'instant 0.

2. (a) Rappeler l'expression des dérivées suivantes : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}r}, \dfrac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}r}, \dfrac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta}, \dfrac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta}$.
   (b) Soit n un entier positif ou nul. Exprimer simplement $\dfrac{\mathrm{d}^n\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta^n}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^n\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta^n}$.
   (c) Si r et θ sont des fonctions du temps, calculer $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t}$.

   corrigé succinct :

   (a) On a $\vec{u_r}=\cos\theta\vec{\imath}+\sin\theta\vec{\jmath}$ et $\vec{u_\theta}=-\sin\theta\vec{\imath}+\cos\theta\vec{\jmath}$.
   Aucun de ces deux vecteurs ne dépend de r..donc les dérivées par rapport à r sont nulles.
   Pour les dérivées par rapport à θ, c'est du cours : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta}=\vec{u_\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta}=-\vec{u_r}$.
   (b) Puis on trouve ensuite $\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta^2}=-\vec{u_r}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta^2}=-\vec{u_\theta}$, $\dfrac{\mathrm{d}^3\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta^3}=-\vec{u_\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^3\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta^3}=-\vec{u_r}$, puis $\dfrac{\mathrm{d}^4\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta^4}=\vec{u_r}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^4\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta^4}=\vec{u_\theta}$...et ainsi de suite.
   (c) Revoir le cours !

3. Soit les vecteurs $\vec{a}(t)=\alpha\vec{\imath}-\sin(\omega t)\vec{\jmath}$ et $\vec{b}(t)=-\beta t\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$, α et β étant deux constantes. Calculer de deux manières différentes $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}.\vec{b})$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\wedge\vec{b})$

   corrigé succinct :

   On peut soit calculer d'abord $\vec{a}.\vec{b}(t)=-\alpha\beta t-\sin(\omega t)$ et dériver l'expression, soit utiliser la formule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}.\vec{b})=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}.\vec{b}+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}.\vec{a}$. Dans les deux cas on obtient évidemment le même résultat, à savoir $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}.\vec{b})=-\omega\cos(\omega t)-\alpha\beta$.

   De même pour le produit vectoriel, on peut soit calculer d'abord $\vec{a}\wedge\vec{b}(t)$ et dériver l'expression, soit utiliser la formule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\wedge\vec{b})=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}$. Dans les deux cas on obtient le même résultat, à savoir $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\wedge\vec{b})=(-\omega\cos(\omega t),0,-\beta\omega t\cos(\omega t)-\beta\sin(\omega t))$.

4. On considère une courbe de Lissajous $\begin{cases}x(t)=X\cos(\omega t)\\ y(t)=Y\sin(3\omega t)\end{cases}$.
   (a) Quelles sont les dimensions des constantes (positives) X, Y et ω ?
   (b) Exprimer le vecteur position $\vec{OM}$, le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$. Vérifier leur homogénéïté.
   (c) Calculer $\dfrac{\mathrm{d}||\vec{v}||}{\mathrm{d}t}$ et $||\vec{a}||=||\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}||$.

   corrigé succinct :

   (a) X et Y sont de même dimension que x et y, par exemple des distances, car le cosinus et le sinus sont sans dimension. Par ailleurs $omegat$, donc on prend le sinus ou le cosinus, doit être sans dimension. t étant un temps, ω est l'inverse d'un temps.
   (b) $\vec{OM}=(X\cos(\omega t),Y\sin(3\omega t))$. La vitesse $\vec{v}$ est la dérivée de $\vec{OM}$ soit $\vec{v}=(-\omega X\sin(\omega t),3\omega Y\cos(3\omega t))$. L'accélération est la dérivée de la vitesse soit $\vec{a}=(-\omega^2X\cos(\omega t),-9\omega^2Y\sin(3\omega t))$.

(c) On trouve $\dfrac{\mathrm{d}||\vec{v}||}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega(2X^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) - 6Y^2\omega\sin(3\omega t)\cos(3\omega t))}{2\sqrt{X^2\sin^2(\omega t) + 9Y^2\cos^2(3\omega t)}}$ et $||\vec{a}|| = \omega^2\sqrt{X^2\cos^2(\omega t) + 81Y^2\sin^2(3\omega t)}$.
Ces formules, différentes (par exemple en $t = 0$ la première est nulle et pas la seconde), n'ont aucun intérêt sauf celui de mettre en garde que dériver la norme de la vitesse, ou prendre la norme de la dérivée de la vitesse, ne donne pas le même résultat ! !

5. On considère la courbe définie par une équation polaire $r = f(\theta)$.

   (a) Expliquer pourquoi, en un point M de la courbe, $\vec{OM} = f(\theta)\vec{u_r}$.
   (b) Démontrer, en dérivant la relation précédente, qu'en un point différent de O, si V désigne l'angle entre $\vec{u_r}$ et la tangente à la courbe, $\tan V = f(\theta)/f'(\theta)$.
   (c) En déduire, en un point différent de O, l'angle de la tangente avec $\vec{\imath}$.
   (d) On prend $f(\theta) = Ae^{k\theta}$ avec $A = 1$ usi et $k = \frac{1}{10}$ usi, avec θ positif. Montrer que l'angle entre $\vec{u_r}$ et la tangente à la courbe est constant, déterminer le sens de variation de f, et tracer l'allure de la courbe.

corrigé succinct :

(a) par définition du vecteur radial, $\vec{OM} = r\vec{u_r}$, et l'énoncé donne $r = f(\theta)$...
(b) c'est la dérivée de $\vec{OM}$ qui donne la tangente à la courbe. Donc si on dérive (par rapport à θ) $\mathrm{d}\vec{OM}/\mathrm{d}\theta = f'(\theta)\vec{u_r} + f(\theta)\vec{u_\theta}$. Dans le repère polaire, orthonormé direct, le vecteur $\mathrm{d}\vec{OM}/\mathrm{d}t$ a donc pour abscisse $f'(\theta)$ et pour ordonnée $f(\theta)$, donc l'angle entre $\vec{u_r}$ et $\mathrm{d}\vec{OM}/\mathrm{d}t$ a pour tangente le quotient de ces coordonnées, soit $f(\theta)/f'(\theta)$.
(c) L'angle de la tangente avec $\vec{\imath}$ est la somme de l'angle de la tangente avec $\vec{u_r}$ et de l'angle de $\vec{u_r}$ avec $\vec{\imath}$, soit $V + \theta$. Si $f'(\theta) > 0$, c'est donc $\theta + \arctan(f(\theta)/f'(\theta))$.
(d) On veut montrer que l'angle V est constant. Mais $\tan V = f(\theta)/f'(\theta) = 1/k = 10$, qui est constant...
f est croissante. La courbe est donc une spirale...

é

6. On considère la trajectoire d'un point mobile $M(t)$.

   (a) Montrer que $\vec{OM}.\dfrac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} = OM.\dfrac{\mathrm{d}OM}{\mathrm{d}t}$.
   (b) En déduire que si la trajectoire est circulaire de centre O, en tout point la vitesse est orthogonale au vecteur $\vec{OM}$.
   (c) Soit $M(t)$ le point défini par $\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \alpha t^2 \end{cases}$, avec $R = 1$ usi, $\alpha = 1$ usi.
   L'accélération est-elle radiale ?
   (d) Dans le cas général, montrer que l'accélération est en tout point colinéaire au vecteur-position si et seulement si $\vec{OM} \wedge \dfrac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t}$ ne dépend pas de t.

corrigé succinct :

(a) on sait que $\vec{OM}.\vec{OM} = OM^2$ donc en dérivant cette relation, $\vec{OM}.\dfrac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t}.\vec{OM} = 2OM\dfrac{\mathrm{d}OM}{\mathrm{d}t}$, d'où le resultat en divisant par 2...
(b) si la trajectoire est circulaire de centre O, OM est constant donc sa dérivée est nulle. Ainsi, $\vec{OM}.\dfrac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{OM}.\vec{v} = 0$ donc la vitesse est bien orthogonal au rayon.
(c) On calcule (formule du cours que l'on cite ou rédémontre) l'expression de l'accélération en coordonnées polaires, pour constater que le coefficient devant $\vec{u_\theta}$ n'est pas nulle...l'accélération n'est donc pas radiale.
(d) si suffit de dériver l'expression : sa dérivée vaut $\dfrac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} \wedge \dfrac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} + \vec{OM} \wedge \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{OM}}{\mathrm{d}t^2}$, et le premier terme est nul (le produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même est nul). Ainsi, l'expression est constante si et seulement si sa dérivée est nulle, donc si et seulement si $\vec{OM} \wedge \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{OM} \wedge \vec{a} = 0$, ce qui équivaut au fait que $\vec{OM}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires.

7. **Oscillo en mode Lissajous**
   On applique en mode XY sur un oscilloscope deux tensions de fréquence $1000Hz$, d'amplitude $10V$, déphasées de $\pi/4$.
   Déterminer la courbe obtenue à l'écran.
   Comment mesurer graphiquement le déphasage ?

corrigé succinct : $x(t) = 10\cos(\omega t)$, $y(t) = 10\cos(\omega t - \varphi)$