Dans tous les exercices, les coordonnées cartésiennes sont données dans un repère orthonormé direct du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ou de l'espace $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Quand rien n'est précisé, les valeurs numériques sont exprimées en unités du système international (usi).

1. (a) Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(1,2)$ et $B(2,5)$.
   Quelle condition doivent vérifier les coordonnées d'un point du plan pour qu'il soit au dessus de la droite ?
   (b) Reconnaître l'ensemble des points du plan d'équations paramétriques $x(t) = 3t + 2, y(t) = 2t + 1$
   (c) Reconnaître l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $2x - 2y - z = -3$, $x - 4y + z = 0$
   (d) Reconnaître l'ensemble des points du plan d'équations paramétriques $x(t) = 2\cos(at^2) + 1, y(t) = 2\sin(at^2) + 3$ (a constante)

corrigé succint :

(a) L'équation de la droite est $y = 3x - 1$. L'équation du demi-plan supérieur délimité par cette droite est $y \geq 3x - 1$.

(b) c'est la droite passant par $A(2,1)$ et de vecteur directeur $(3,2)$.

(c) on trouve en exprimant x et z en fonction de y : $x = -1 + 2y$, $y = y$, $z = 2y + 1$ donc il s'agit de la droite passant par $A(-1,0,1)$ et de vecteur directeur $(2,1,2)$.

(d) il s'agit du cercle de centre $(1,3)$ et de rayon 2. Il est parcouru à la vitesse angulaire $2at$ à partir du point $(3,3)$ à l'instant 0.

2. (a) Rappeler l'expression des dérivées suivantes : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}r}, \dfrac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}r}, \dfrac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta}, \dfrac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta}$.
   (b) Soit n un entier positif ou nul. Exprimer simplement $\dfrac{\mathrm{d}^n\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta^n}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^n\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta^n}$.
   (c) Si r et θ sont des fonctions du temps, calculer $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t}$.

corrigé succint :

(a) On a $\vec{u_r} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$ et $\vec{u_\theta} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$.
Aucun de ces deux vecteurs ne dépend de r..donc les dérivées par rapport à r sont nulles.
Pour les dérivées par rapport à θ, c'est du cours : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta} = \vec{u_\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\vec{u_r}$.

(b) Puis on trouve ensuite $\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta^2} = -\vec{u_r}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta^2} = -\vec{u_\theta}$, $\dfrac{\mathrm{d}^3\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta^3} = -\vec{u_\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^3\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta^3} = \vec{u_r}$, puis $\dfrac{\mathrm{d}^4\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta^4} = \vec{u_r}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^4\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta^4} = \vec{u_\theta}$...et ainsi de suite.

(c) Revoir le cours !

3. Soit les vecteurs $\vec{a}(t) = \alpha\vec{\imath} - \sin(\omega t)\vec{\jmath}$ et $\vec{b}(t) = -\beta t\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, α et β étant deux constantes. Calculer de deux manières différentes $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}.\vec{b})$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a} \wedge \vec{b})$

corrigé succint :

On peut soit calculer d'abord $\vec{a}.\vec{b}(t) = -\alpha\beta t - \sin(\omega t)$ et dériver l'expression, soit utiliser la formule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}.\vec{b}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}.\vec{b} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}.\vec{a}$. Dans les deux cas on obtient évidemment le même résultat, à savoir $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}.\vec{b}) = -\omega\cos(\omega t) - \alpha\beta$.

De même pour le produit vectoriel, on peut soit calculer d'abord $\vec{a} \wedge \vec{b}(t)$ et dériver l'expression, soit utiliser la formule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}$. Dans les deux cas on obtient le même résultat, à savoir $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (-\omega\cos(\omega t), 0, -\beta\omega t\cos(\omega t) - \beta\sin(\omega t))$.

4. On considère la courbe définie par une équation polaire $r = f(\theta)$.
   (a) Expliquer pourquoi, en un point M de la courbe, $\vec{OM} = f(\theta)\vec{u_r}$.
   (b) Démontrer, en dérivant la relation précédente, qu'en un point différent de O, si V désigne l'angle entre $\vec{u_r}$ et la tangente à la courbe, $\tan V = f(\theta)/f'(\theta)$.
   (c) En déduire, en un point différent de O, l'angle de la tangente avec $\vec{\imath}$.
   (d) On prend $f(\theta) = Ae^{k\theta}$ avec $A = 1$ usi et $k = \frac{1}{10}$ usi, avec θ positif.
   Montrer que l'angle entre $\vec{u_r}$ et la tangente à la courbe est constant, déterminer le sens de variation de f, et tracer l'allure de la courbe.

corrigé succint :

(a) par définition du vecteur radial, $\vec{OM} = r\vec{u_r}$, et l'énoncé donne $r = f(\theta)$...

(b) c'est la dérivée de $\vec{OM}$ qui donne la tangente à la courbe. Donc si on dérive (par rapport à θ) $\mathrm{d}\vec{OM}/\mathrm{d}\theta = f'(\theta)\vec{u_r} + f(\theta)\vec{u_\theta}$. Dans le repère polaire, orthonormé direct, le vecteur $\mathrm{d}\vec{OM}/\mathrm{d}t$ a donc pour abscisse $f'(\theta)$ et pour ordonnée $f(\theta)$, donc l'angle entre $\vec{u_r}$ et $\mathrm{d}\vec{OM}/\mathrm{d}t$ a pour tangente le quotient de ces coordonnées, soit $f(\theta)/f'(\theta)$.

(c) L'angle de la tangente avec $\vec{\imath}$ est la somme de l'angle de la tangente avec $\vec{u_r}$ et de l'angle de $\vec{u_r}$ avec $\vec{\imath}$, soit $V + \theta$. Si $f'(\theta) > 0$, c'est donc $\theta + \arctan(f(\theta)/f'(\theta))$.

(d) On veut montrer que l'angle V est constant. Mais $\tan V = f(\theta)/f'(\theta) = 1/k = 10$, qui est constant...
f est croissante. La courbe est donc une spirale...

é

5. On considère la trajectoire d'un point mobile $M(t)$.

(a) Montrer que $\vec{OM}.\frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} = OM.\frac{\mathrm{d}OM}{\mathrm{d}t}$.

(b) En déduire que si la trajectoire est circulaire de centre O, en tout point la vitesse est orthogonale au vecteur $\vec{OM}$.

(c) Soit $M(t)$ le point défini par $\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \alpha t^2 \end{cases}$, avec $R > 0$ et $\alpha > 0$.

L'accélération est-elle radiale ? Comparer $\frac{\mathrm{d}||\vec{v}||}{\mathrm{d}t}$ et $||\vec{a}|| = ||\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}||$.

(d) Dans le cas général, montrer que l'accélération est en tout point colinéaire au vecteur-position si et seulement si $\vec{OM} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t}$ ne dépend pas de t.

corrigé succint :

(a) on sait que $\vec{OM}.\vec{OM} = OM^2$ donc en dérivant cette relation, $\vec{OM}.\frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t}.\vec{OM} = 2OM\frac{\mathrm{d}OM}{\mathrm{d}t}$, d'où le resultat en divisant par 2...

(b) si la trajectoire est circulaire de centre O, OM est constant donc sa dérivée est nulle. Ainsi, $\vec{OM}.\frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{OM}.\vec{v} = 0$ donc la vitesse est bien orthogonal au rayon.

(c) On calcule (formule du cours que l'on cite ou rédémontre) $\vec{v} = 2\alpha Rt\vec{u_\theta}$ et $\vec{a} = -4\alpha^2 Rt^2\vec{u_r} + 2\alpha R\vec{u_\theta}$.

Ainsi dans l'expression de l'accélération en coordonnées polaires, le coefficient devant $\vec{u_\theta}$ n'est pas nul : l'accélération n'est pas radiale.

La dérivée de la norme de la vitesse est donc pour $t > 0$, $2|\alpha|R$, alors que la norme de la dérivée de la vitesse est $2R\alpha\sqrt{4\alpha^2t^4 + 1}$.

(d) si suffit de dériver l'expression : sa dérivée vaut $\frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} + \vec{OM} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\vec{OM}}{\mathrm{d}t^2}$, et le premier terme est nul (le produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même est nul). Ainsi, l'expression est constante si et seulement si sa dérivée est nulle, donc si et seulement si $\vec{OM} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\vec{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{OM} \wedge \vec{a} = 0$, ce qui équivaut au fait que $\vec{OM}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires.

6. **Oscillo en mode Lissajous**

On applique en mode XY sur un oscilloscope deux tensions de fréquence $1000Hz$, d'amplitude $10V$, déphasées de $\pi/4$.

Déterminer la courbe obtenue à l'écran.

Comment mesurer graphiquement le déphasage ?

corrigé succint : $x(t) = 10\cos(\omega t)$, $y(t) = 10\cos(\omega t - \varphi)$