

exercices théoriques

1. Résoudre les systèmes

$$(S_1) : \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases},$$

$$(S_3) : \begin{cases} 2x + 3y - z = -5 \\ 3x - y + z = 6 \\ 4x + 3y - z = -7 \end{cases},$$

$$(S_2) : \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 4 \\ 4x - y + z = 5 \\ 6x - 4y + z = -1 \end{cases},$$

$$(S_4) : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - 3y + z = 4 \\ 4x - 5y + z = 10 \end{cases}.$$

corrigé succinct :pour (S_1) on ne trouve pas de solution.pour (S_2) $x = 9/5, y = 16/5, z = 1$.Le système S_3 équivaut successivement à :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 & (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ 3x - y + z = 6 \\ 7x + 2y = -1 & (L_3 \leftarrow L_1 + L_3) \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 3x - y + z = 6 \\ 2x = -2 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

d'où l'on déduit par la ligne 3 : $x = -1$, puis avec la ligne 1 : $y = 3$, puis avec la ligne 2 : $z = 12$.Le système S_4 équivaut à :

$$\begin{cases} 7y - 3z = -6 & (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\ x - 3y + z = 4 \\ 7y - 3z = -6 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2) \end{cases}$$

On constate que les premières et dernière ligne sont identiques. Alors :

$$\begin{cases} y = (3z - 6)/7 \\ x = 3y - z + 4 = (9z - 18 - 7z + 28)/7 = 2z/7 + 10/7 \end{cases}$$

et ainsi on obtient un système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2z/7 + 10/7 \\ y = 3z/7 - 6/7 \\ z = z \end{cases}$$

qui représente la droite de vecteur directeur $(2, 3, 7)$ et passant par le point $(10/7, -6/7, 0)$.2. Calculer, si c'est possible, $A + B$ et AB :

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

corrigé succinct :(a) On ne peut calculer $A + B$, et le produit AB vaut $AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.(b) On ne peut calculer ni $A + B$, ni AB (le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B).(c) On calcule $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

$$3. \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - A - 2I = 0$.(b) En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1} .(c) Résoudre les équations $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $AY = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.(d) On pose $P(X) = X^2 - X - 2$. Déterminer le reste de la division de X^5 par P , et en déduire l'expression de A^5 .corrigé succinct :(a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -18 & -17 & 9 \\ -30 & -30 & 16 \end{pmatrix}$ et donc $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$.(b) On a donc $\frac{A^2 - A}{2} = I$, donc $A \frac{A - I}{2} = \frac{A - I}{2} A = I$, l'inverse de A est la matrice

$$\frac{A - I}{2}, \text{ que l'on calcule directement : } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ -9 & -10 & 9/2 \\ -15 & -15 & 13/2 \end{pmatrix}.$$

(c) A est inversible donc $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ équivaut à $A^{-1}AX = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $IX = X = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -29/2 \\ -47/2 \end{pmatrix}$. De même, $AY = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ équivaut à $Y = A^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, soit $Y = \begin{pmatrix} -7 \\ 26 \\ 41 \end{pmatrix}$.

(d) On calcule un quotient $X^3 + X^2 + 3X + 5$ et un reste $11X + 10$. Par conséquent, $X^5 = (X^2 - X - 2)(X^3 + X^2 + 3X + 5) + 11X + 10$, et on peut évaluer cette égalité en A , pour obtenir $A^5 = (A^2 - A - 2I)(A^3 + A^2 + 3A + 5I) + 11A + 10I$. Comme $A^2 - A - 2I = 0$, on en déduit que $A^5 = 11A + 10$, soit $A^5 = \begin{pmatrix} 65 & 66 & -33 \\ -198 & -199 & 99 \\ -330 & -330 & 164 \end{pmatrix}$.

4. On fixe un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, et $\vec{\omega}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Vérifier que $\vec{f} : \vec{u} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{\omega}$ est linéaire, et déterminer sa matrice.

On a bien, pour tout réel λ et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les égalités $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{\omega} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{\omega})$, et $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{\omega} = \vec{u} \wedge \vec{\omega} + \vec{v} \wedge \vec{\omega}$, donc l'application est linéaire. et on peut la représenter par une matrice.

Pour déterminer sa matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il suffit de calculer en fonction de $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$

l'image de $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$. On calcule donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ \beta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice est donc $\begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, elle est antisymétrique (opposée de sa transposée).

5. (*) On considère l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n) qui au polynôme $P(X)$ associe le polynôme $XP'(X)$ (par exemple, l'image du polynôme $2X^2 + X - 1$ est $X(4X + 1)$ soit $4X^2 + X$).

Montrer que l'application est linéaire, déterminer son noyau (l'ensemble des polynômes dont l'image est nulle), son image (l'ensemble des polynômes qui peuvent s'écrire $XP'(X)$) et sa matrice dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

corrigé succinct :

Elle est linéaire car $X(aP + bQ)' = aXP' + bXQ'$.

Si $XP' = 0$, $P' = 0$ donc P est constant : le noyau est l'ensemble des polynômes constants.

Pour l'image : un polynôme Q de l'image doit être divisible par X donc vérifie $Q(0) = 0$. Réciproquement si $Q(0) = 0$, $Q(X)/X$ est un polynôme de degré $n - 1$, il admet donc une primitive P , et on a bien $XP' = Q$.

6. Inverser :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -8 \\ 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

corrigé succinct : On peut résoudre le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, c'est-à-dire exprimer x, y, z en fonction de x', y', z' : les coefficients utilisés sont ceux de A^{-1} .

Ou bien utiliser la méthode détaillée en cours : on place A et I_3 côte-à-côte :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

et on réalise des opérations **sur les lignes** (uniquement, pas les colonnes) qui permettent de transformer A en I . On se retrouve alors, du côté droit de l'expression, avec la matrice A^{-1} .

Ici on peut commencer par ajouter L_1 à L_2 et $-2L_1$ à L_3 pour faire apparaître deux zéros sur la première colonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Puis on ajoute $3L_3$ à L_2 , et **ensuite** on change tous les signes de la ligne L_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -13 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Puis on échange juste L_2 et L_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 35 & -5 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

puis on divise L_3 par 35 et **ensuite** on ajoute $13L_3$ à L_2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/35 & 13/35 & 4/35 \\ 0 & 0 & 1 & -5/35 & 1/35 & 3/35 \end{array} \right)$$

pour terminer, on ajoute $-2L_2 + 5L_3$ à la ligne L_1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -21/35 & 7/35 \\ 0 & 1 & 0 & 5/35 & 13/35 & 4/35 \\ 0 & 0 & 1 & -5/35 & 1/35 & 3/35 \end{array} \right)$$

On trouve donc, en sortant le coefficient $1/35$:

$$A^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 0 & -21 & 7 \\ 5 & 13 & 4 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Par la même méthode, on obtient $B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\text{et } C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 5 & -10 \\ -17 & 10 & -28 \\ 7 & -5 & 13 \end{pmatrix}$$

exercices pratiques

1. (*) **matrices et optique**

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, on modélise la propagation d'un rayon par un vecteur $\begin{pmatrix} h \\ \nu i \end{pmatrix}$ où h est la hauteur (mesurée verticalement depuis l'axe optique), i l'angle qu'il fait avec l'horizontale et ν un nombre qui est égal à l'indice n du milieu si le rayon se propage dans le sens normal (de gauche à droite), $-n$ sinon.

Un système optique (composé de lentilles, miroirs, etc.) est modélisé par une matrice M de taille 2×2 de sorte que l'on ait $\begin{pmatrix} h_2 \\ \nu_2 i_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} h_1 \\ \nu_1 i_1 \end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix} h_1 \\ \nu_1 i_1 \end{pmatrix}$ le rayon entrant dans le système et $\begin{pmatrix} h_2 \\ \nu_2 i_2 \end{pmatrix}$ le rayon sortant du système.

Quand un système est composé de plusieurs éléments, sa matrice est obtenue en multipliant les matrices des éléments qui le composent, en indiquant de droite à gauche les matrices des éléments successivement rencontrés.

- (a) montrer que la matrice d'une zone transparente de longueur D est $\begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que la matrice d'un miroir sphérique de rayon R est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}$, que la matrice d'un miroir plan est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (b) en déduire que la matrice d'une cavité laser constituée d'un miroir plan et d'un miroir sphérique concave séparés d'une distance D est $\begin{pmatrix} 1 - 2D/R & 2D(1 - D/R) \\ -2/R & 1 - 2D/R \end{pmatrix}$
- (a)
- (b) Dans la cavité un rayon parcourt une distance d , est réfléchi par le miroir sphérique, parcourt une distance d , est réfléchi par le miroir plan. Il suffit donc de calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$