TD 2 : Intégrales multiples - corrigé

exercices théoriques

1. Soit R le rectangle $[-1,1]\times[0,2]$. Calculer $\int\int_R x^2+2xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

corrigé succint :

$\int_{x=-1}^{1}(\int_{y=0}^{2} x^2+2xy\,\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{1}[x^2y+xy^2]_0^2\mathrm{d}x$ donc $\int_{x=-1}^{1} 2x^2+4x\mathrm{d}x = [2x^3/3+2x^2]_{-1}^{1} = 4/3$.

2. Soit D défini par $y\leq 0\leq x$ et $x^2+y^2\leq 1$. Calculer $\int\int_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

corrigé succint : on passe en coordonnées polaires en prenant $x=r\ \cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. D est le quart de disque inférieur droit donc θ varie entre $-\pi/2$ et 0.

La condition donc on calcule $\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=-\pi/2}^{0} r^2\cos\theta\sin\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ soit $\int_{r=0}^{1} r^3\mathrm{d}r\int_{\theta=-\pi/2}^{0}(\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta$.

L'intégrale en r vaut 1/4.

Pour calculer l'intégrale en θ on utilise $\cos\theta\ \sin\theta=\sin(2\theta)/2$ de primitive $-\cos(2\theta)/4$ donc d'intégrale $-1/2$.

Finalement on trouve que la valeur de l'intégrale est $-1/8$.

3. On considère une surface triangulaire de sommets $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$ et de masse surfacique σ.

Déterminer sa masse et son centre de gravité G.

corrigé succint :

l'équation de (AB) est $y=x$, donc le triangle peut être décrit par les inéquations : $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq x$.

la surface du triangle est $S=\int\int_T \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ soit $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} x\mathrm{d}x = [x^2/2]_0^1 = 1/2$, et sa masse est $M=\sigma S=\sigma/2$.

la coordonnée x_G du centre de gravité

$x_G = \int\int_T x\mathrm{d}x\mathrm{d}y/S = 2\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2\int_{x=0}^{1} x^2\mathrm{d}x = 2[x^3/3]_0^1 = 2/3$.

De même, la coordonnée $y_G=\int\int_T y\mathrm{d}x\mathrm{d}y/S = 2\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2\int_{x=0}^{1} x^2/2\mathrm{d}x = 1/3$.

bonus : calcul du moment d'inertie par rapport à G : il vaut

$I=\int\int_T \sigma((x-2/3)^2+(y-1/3)^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$, donc

$I=\sigma\int_{x=0}^{1} x(x-2/3)^2+(x-1/3)^3/3-(-1/3)^3/3\mathrm{d}x =$

$\sigma\int_{x=0}^{1} x(x-2/3)^2+(x-1/3)^3/3-(-1/3)^3/3\mathrm{d}x$,

$I=\sigma\int_{x=0}^{1} x(x^2-4/3x+4/9)+(x^3-x^2+x/3)/3\mathrm{d}x$,

$I=\sigma\int_{x=0}^{1} 4/3x^3-5/3x^2+5x/9\mathrm{d}x = \sigma\ [x^4/3-5x^3/9+5x^2/18]_0^1 = \sigma/18$.

4. (*) L'objectif de l'exercice est de calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, fondamentale en probabilités, statistiques, métrologie...

On note R un réel positif puis
— C_R le carré $[-R,R]\times[-R,R]$,
— D_R^1 le disque de centre O et rayon R,
— D_R^2 le disque de centre O et rayon $\sqrt{2}R$.

On note $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$.

(a) Expliquer pourquoi $\int\int_{D_R^1} f\ \mathrm{d}^2S \leq \int\int_{C_R} f\ \mathrm{d}^2S \leq \int\int_{D_R^2} f\ \mathrm{d}^2S$.

(b) En utilisant les coordonnées polaires, calculer $\int\int_{D_R^1} f\ \mathrm{d}^2S$

(c) Calculer de même $\int\int_{D_R^2} f\ \mathrm{d}^2S$

(d) Calculer $\int\int_{C_R} f\mathrm{d}^2S$ en fonction de $\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$

(e) En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ \ \mathrm{d}x$.

corrigé succint :

(a) La fonction est positive et les domaines d'intégration sont inclus les uns dans les autres ($D_R^1\subset C_R\subset D_R^2$) donc les intégrales (que l'on peut interpréter comme des volumes d'ensembles eux aussi inclus les uns dans les autres) vérifient bien l'inégalité demandée.

(b) $\int\int_{D_R^1} f\ \mathrm{d}^2S = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\times\int_{r=0}^{R} re^{-r^2}\mathrm{d}r = 2\pi\ \times[-e^{-r^2}/2]_0^R = \pi(1-e^{-R^2})$

(c) On trouve de même $\pi(1-e^{-2R^2})$

(d) $\int\int_{C_R} f\mathrm{d}^2S = \int_{x=-R}^{R}\int_{y=-R}^{R} e^{-x^2}e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=-R}^{R} e^{-x^2}\mathrm{d}x\times\int_{y=-R}^{R} e^{-y^2}\mathrm{d}y = (\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x)^2$ (les variables sont "muettes" dans ces intégrales : que la variable utilisée soit x ou y, les valeurs des intégrales sont identiques)

(e) D'après les questions précédentes, on a $\pi(1-e^{-R^2})\leq(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2}\ \ \mathrm{d}x)\leq\pi(1-e^{-2R^2})$, donc en passant à la limite pour R tendant vers l'infini, $\pi\leq(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ \ \mathrm{d}x)\leq\pi$ et donc l'intégrale (qui est positive) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ \ \mathrm{d}x$ vaut $\sqrt{\pi}$.

exercices pratiques

5. Calculer le moment d'inertie par rapport à son centre d'une règle plate de dimensions a et L

corrigé succint :

l'aide du rectangle est aL et sa masse est $M = \sigma a L$ où σ est la masse surfacique.

on peut choisir par exemple de placer le repère au centre de la règle ou bien sur les bords gauche (axe vertical) et bas (axe horizontal).

si on choisit un repère sur els bords de la règle, la règle correspond au rectangle $[0, L] \times [0, a]$ et les coordonnées du centre G sont $(L/2, a/2)$. Le moment d'inertie I est l'intégrale de $\sigma d^2(M, G)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma((x - L/2)^2 + (y - a/2)^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Alors $I = \int_{x=0}^{L}\int_{y=0}^{a} \sigma((x - L/2)^2 + (y - a/2)^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma \int_{x=0}^{L}(\int_{y=0}^{a} \sigma((x - L/2)^2 + (y - a/2)^2)\ \mathrm{d}y)\mathrm{d}x$, donc $I = \sigma \int_{x=0}^{L} a(x - L/2)^2 + 2(a/2)^3/3\mathrm{d}x = \sigma \int_{x=0}^{L} a(x - L/2)^2 + a^3/12\mathrm{d}x = 2a(L/2)^3/3 + a^3L/12$ soit finalement $I = \sigma(a^3L + aL^3)/12 = M(a^2 + L^2)/12$.

6. Déterminer les moments d'inertie :

(a) I_0 d'un cylindre de masse M, rayon R, longueur L, par rapport à son axe de symétrie.

(b) I_d d'un cylindre de masse M, rayon R, longueur L, par rapport à un axe parallèle à son axe de symétrie et situé à la distance d de celui-ci.

(c) I_p d'un cylindre de masse M, rayon R, longueur L, par rapport à un axe perpendiculaire à son axe de symétrie et passant par le centre de masse du cylindre.

corrigé succint :

On note ρ la masse volumique du cylindre, on a $M = \rho\pi R^2 L$.

On choisit un repère de coordonnées cylindre d'axe (Oz) l'axe du cylindre, de plan (xOy) une des faces du cylindre. Le cylindre est ainsi décrit par $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le z \le L$.

(a) $I_0 = \int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\rho r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = 2\pi\rho R^4 L/4 = \pi\rho R^4 L/2 = MR^2/2$

(b) on peut supposer que l'axe par rapport auquel on calcule le moment a pour équation $x = d$, $y = 0$, z quelconque.
Ainsi $I_d = \int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}((x - d)^2 + y^2)\rho r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}((r\cos\theta - d)^2 + (r\sin\theta)^2)\rho r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}(r^2 - 2dr\cos\theta + d^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}(r^3 - 2dr^2\cos\theta + d^2 r)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
Cette intégrale se sépare en 3 :
$I_d = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z + \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} -2dr^2\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z + \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} d^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
La première intégrale est I_0, la deuxième intégrale vaut 0 (on intègre un cosinus sur une période), la troisième vaut d^2M.
Ainsi, $I_d = I_0 + Md^2$.

(c) On peut suppose que l'axe D par rapport auquel on fait le calcul est l'axe $x = 0$, $z = L/2$.
Alors la distance au carré entre un point M de coordonnées cylindrique r, θ, z (donc de coordonnées cartésiennes $r\cos\theta$, $r\sin\theta$, z) et l'axe D est $x^2 + (z - L/2)^2$.
I_p vaut donc $I_p = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}(r^2\cos^2\theta + (z - L/2)^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$, donc $I_p = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z + \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}(z - L/2)^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
L'intégrale pour θ entre 0 et 2π de $\cos^2\theta$ vaut π (voir S1 : linéariser...), et ainsi :
$I_p = R^4/4 \times \pi \times L + R^2/2 \times 2\pi \times [(z - L/2)^3/3]_{z=0}^{z=L}$ et donc $I_p = \pi L R^4/4 + \pi R^2 H^3/12$.
Finalement, on voit que $I_p = MR^2/4 + ML^2/12$.

7. Calculer le volume et la masse d'un cône (droit) de rayon R, de hauteur H et de masse volumique constante ρ.

corrigé succint :

(a) on fixe un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que :
- l'axe (Oz) est l'axe du cône,
- la base du cône est située dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
- le sommet a pour coordonnées cartésiennes $(0, 0, H)$.
puis on considère alors les coordonnées cylindriques associées.

(b) Le cône est alors l'ensemble des points dont les coordonnées (r, θ, z) vérifient les trois conditions :
$\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, H]$, $r \in [0, \dfrac{R(H - z)}{H}]$.
Remarques : 1) la troisième condition exprime le fait que, pour une côte z donnée, le rayon de la section du cône par un plan horizontal est un cercle de rayon variable (qui dépend de z).
2) on peut bien sûr choisir de fixer d'abord r entre 0 et R, puis z entre 0 et une borne qui dépend de r.
3) l'ensemble de points dont les coordonnées vérifient $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, H]$, $r \in [0, R]$ est un **cylindre** et non un cône.

(c) Le volume du cône est alors $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{\frac{R(H-z)}{H}} r\,dr\,dz\,d\theta$, qui se calcule par étapes successives :
$\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\frac{R^2(H - z)^2}{2H^2}\,dz\,d\theta$,
$\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}[-\frac{R^2(H - z)^3}{6H^2}]_0^H\,d\theta$,
$2\pi\dfrac{R^2H^3}{6H^2}$, soit $\pi R^2 H/3$.
Et la masse du cône est $M = \rho V = \pi\rho R^2 H/3$.

(d) **bonus :** calcul du moment d'inertie du cône par rapport à son axe. La méthode est la même : l'intégrale est celle de $r^2 dm = r^2\rho dV$, soit $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{\frac{R(H-z)}{H}} r^3\rho\,dr\,dz\,d\theta$, et la même technique donne comme valeur $\dfrac{\pi\rho R^4 H}{20}$.
En utilisant la valeur de la masse, on trouve $3MR^2/10$.
(remarque : ce n'est pas le tiers du moment d'inertie du cylindre correspondant ! !)

8. Calculer le volume et la masse d'une boule de rayon R et de masse volumique variable $\rho(r) = \dfrac{R}{r + R}\rho_0$.

corrigé succint :

Le volume $4/3\pi R^3$ est bien entendu identique à celui d'une boule homogène.

Mais pour la masse la formule change : on calcule $\int\int\int_B \rho(r) r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \times \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \times \int_{r=0}^{R} \dfrac{R}{r+R}\rho_0 r^2 \mathrm{d}r$, donc $M = 4\pi R\rho_0 \int_{r=0}^{R} \dfrac{r^2}{r+R}\mathrm{d}r$.

Si on pose la division du polynôme r^2 par $r+R$ (la variable étant r, R est une constante) on trouve $r^2 = (r-R)(r+R) + R^2$ donc $\dfrac{r^2}{r+R} = r - R + \dfrac{R^2}{r+R}$, de primitive $r^2/2 - Rr + R^2\ln(r+R)$, donc $M = 4\pi R\rho_0(R^2/2 - R^2 + R^2\ln(2R) - R^2\ln(R))$ soit finalement $M = 4\pi R\rho_0(-R^2/2 + R^2\ln(2)) = 4\pi R^3\rho_0(\ln(2) - 1/2)$.

Le résultat est cohérent : $\ln(2) - 1/2 < 1/3$, pour une boule moins dense en moyenne qu'une boule de masse volumique constante ρ_0.

bonus : calcul du moment d'inertie par rapport à son centre de la boule. C'est $I = \int\int\int_B \rho(r) r^2 \times r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi = 4\pi R\rho_0 \int_{r=0}^{R} \dfrac{r^4}{r+R}\mathrm{d}r =$ $4\pi R\rho_0 \int_{r=0}^{R} (r^3 - r^2R + rR^2 - R^3 + \dfrac{R^4}{r+R})\mathrm{d}r =$ $4\pi R\rho_0(R^4/4 - R^4/3 + R^4/2 - R^4 + R^4\ln(2) = 4\pi R^5\rho_0(\ln(2) - 7/12)$.

9. Calculer la surface et le moment d'inertie par rapport à son centre d'une sphère de masse surfacique constante σ.

corrigé succint :

La surface est $\int\int_S \sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi = R^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \times \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 4\pi R^2$. La masse est $M = 4\pi\sigma R^2$.

Le moment d'inertie vaut $\int\int_S \sigma R^2 R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi = 4\pi\sigma R^4 = MR^2$.

10. On rappelle que le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface S est $\int\int_S \vec{B}.\mathrm{d}\vec{S}$.
Calculer le flux à travers le rectangle horizontal $[x_0, x_0+L] \times [y_0, y_0+H]$ d'un champ magnétique $\vec{B} = B_0 e^{-\alpha(x-x_0)} e^{-\beta(y-y_0)} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$
$(\alpha, \beta, x_0, y_0, L, H, B_0$ étant des constantes)

corrigé succint :

Ici le vecteur $\mathrm{d}S$, normal à la surface, vaut $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{k}$, donc le produit scalaire $\vec{B}.\mathrm{d}\vec{S} = B_0 e^{-\alpha(x-x_0)} e^{-\beta(y-y_0)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

L'intégrale est donc $B_0 \int_{x=x_0}^{x_0+L} \int_{y=y_0}^{y_0+H} e^{-\alpha(x-x_0)} e^{-\beta(y-y_0)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = B_0 \dfrac{(1-e^{-\alpha L})(1-e^{-\beta H})}{\alpha\beta}$.