## exercices théoriques

1. Si $R$ est le rectangle $[0,\pi]\times[0,\pi/2]$, calculer $A=\int\int_R x+xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $B=\int\int_R \sin(x)\sin(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

corrigé succint :

$A=\int_{x=0}^{\pi}(\int_{y=0}^{\pi/2} x+xy\,\mathrm{d}y)\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{\pi}[xy+xy^2/2]_0^{\pi/2}\mathrm{d}x$ donc
$A=\int_{x=0}^{\pi}(\pi/2+\pi^2/8)x\mathrm{d}x=(\pi/2+\pi^2/8)[x^2/2]_0^{\pi}=\pi^3/4+\pi^4/16$

Pour $B$ on peut séparer directement en deux intégrales
$B=\int_{x=0}^{\pi}\sin(x)\mathrm{d}x\times\int_{y=0}^{\pi/2}\sin(y)\mathrm{d}y=[-\cos(x)]_0^{\pi}[-\cos(y)]_0^{\pi/2}=2.$

2. Soit $D$ le domaine défini par $y\le 0\le x$ et $x^2+y^2\le 1$.
Calculer $\int\int_D(x^2+2xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

corrigé succint : on passe en coordonnées polaires en prenant $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. $D$ est le quart de disque inférieur droit donc $\theta$ varie entre $-\pi/2$ et 0.
La condition donc on calcule $\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=-\pi/2}^{0} r^2\cos^2\theta+2r^2\cos\theta\sin\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ soit
$\int_{r=0}^{1} r^3\mathrm{d}r\int_{\theta=-\pi/2}^{0}(\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$
L'intégrale en $r$ vaut 1/4. Pour calculer l'intégrale en $\theta$ on linéarise $\cos^2\theta=(1+\cos(2\theta))/2$ d'intégrale $\pi/4$.
Et $2\sin\theta\cos\theta=\sin(2\theta)$ a donc pour primitive $-\cos(2\theta)/2$, donc pour intégrale ici -1.

Finalement on trouve que la valeur de l'intégrale est $\pi/16-1/4$.

3. On considère une surface triangulaire de sommets $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$ et de masse surfacique $\sigma$.
Déterminer sa masse, son centre de gravité $G$ et son moment d'inertie par rapport à $G$.

corrigé succint :

l'équation de $(AB)$ est $y=x$, donc le triangle peut être décrit par les inéquations : $0\le x\le 1, 0\le y\le x$.
la surface du triangle est $S=\int\int_T \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ soit
$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{1}x\mathrm{d}x=[x^2/2]_0^1=1/2$, et sa masse est $M=\sigma S=S/2$.
la coordonnée $x_G$ du centre de gravité
$x_G=\int\int_T x\mathrm{d}x\mathrm{d}y/S=2\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x=2\int_{x=0}^{1}x^2\mathrm{d}x=2[x^3/3]_0^1=2/3.$

De même, la coordonnée
$y_G=\int\int_T y\mathrm{d}x\mathrm{d}y/S=2\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}y\mathrm{d}y\mathrm{d}x=2\int_{x=0}^{1}x^2/2\mathrm{d}x=1/3.$

Enfin le moment d'inertie vaut $I=\int\int_T\sigma((x-2/3)^2+(y-1/3)^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$, donc
$I=\sigma\int_{x=0}^{1}x(x-2/3)^2+(x-1/3)^3/3-(-1/3)^3/3\mathrm{d}x=$
$\sigma\int_{x=0}^{1}x(x-2/3)^2+(x-1/3)^3/3-(-1/3)^3/3\mathrm{d}x,$
$I=\sigma\int_{x=0}^{1}x(x^2-4/3x+4/9)+(x^3-x^2+x/3)/3\mathrm{d}x,$
$I=\sigma\int_{x=0}^{1}4/3x^3-5/3x^2+5x/9\mathrm{d}x=\sigma[x^4/3-5x^3/9+5x^2/18]_0^1=\sigma/18.$

4. Calculer l'aire, la masse, le moment d'inertie par rapport à son centre d'une règle plate de dimensions $a$ et $L$.

corrigé succint :

l'aide du rectangle est $aL$ et sa masse est $M=\sigma aL$.

on peut choisir par exemple de placer le repère au centre de la règle ou bien sur les bords gauche (axe vertical) et bas (axe horizontal).

si on choisit un repère sur els bords de la règle, la règle correspond au rectangle $[0,L]\times[0,a]$ et les coordonnées du centre $G$ sont $(L/2,a/2)$. Le moment d'inertie $I$ est l'intégrale de $\sigma d^2(M,G)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sigma((x-L/2)^2+(y-a/2)^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
Alors $I=\int_{x=0}^{L}\int_{y=0}^{a}\sigma((x-L/2)^2+(y-a/2)^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$
$\sigma\int_{x=0}^{L}(\int_{y=0}^{a}\sigma((x-L/2)^2+(y-a/2)^2)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$, donc
$I=\sigma\int_{x=0}^{L}a(x-L/2)^2+2(a/2)^3/3\mathrm{d}x=\sigma\int_{x=0}^{L}a(x-L/2)^2+a^3/12\mathrm{d}x=$
$2a(L/2)^3/3+a^3L/12$ soit finalement $I=\sigma(a^3L+aL^3)/12=M(a^2+L^2)/12.$

5. Calculer le volume, la masse, le moment d'inertie par rapport à son axe d'un cône (droit) de rayon $R$, de hauteur $H$ et de masse volumique constante $\rho$.

corrigé succint :

(a) on fixe un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que :
- l'axe $(Oz)$ est l'axe du cône,
- la base du cône est située dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$,
- le sommet a pour coordonnées cartésiennes $(0,0,H)$.
puis on considère alors les coordonnées cylindriques associées.

(b) Le cône est alors l'ensemble des points dont les coordonnées $(r,\theta,z)$ vérifient les trois conditions :
$\theta\in[0,2\pi]$, $z\in[0,H]$, $r\in[0,\dfrac{R(H-z)}{H}]$.

Remarques : 1) la troisième condition exprime le fait que, pour une côte $z$ donnée, le rayon de la section du cône par un plan horizontal est un cercle de rayon variable (qui dépend de $z$).
2) on peut bien sûr choisir de fixer d'abord $r$ entre 0 et $R$, puis $z$ entre 0 et une borne qui dépend de $r$.
3) l'ensemble de points dont les coordonnées vérifient $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, H]$, $r \in [0, R]$ est un **cylindre** et non un cône.

(c) Le volume du cône est alors $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{\frac{R(H-z)}{H}} r\,dr\,dz\,d\theta$, qui se calcule par étapes successives :
$\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\frac{R^2(H-z)^2}{2H^2}\,dz\,d\theta$,
$\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}[-\frac{R^2(H-z)^3}{6H^2}]_0^H\,d\theta$,
$\displaystyle 2\pi\frac{R^2H^3}{6H^2}$, soit $\pi R^2H/3$.
Et la masse du cône est $M = \rho V = \pi\rho R^2 H/3$.

(d) Pour le moment d'inertie, la méthode est la même : l'intégrale est celle de $r^2dm = r^2\rho dV$, soit $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{\frac{R(H-z)}{H}} r^3\rho\,dr\,dz\,d\theta$, et la même technique donne comme valeur $\displaystyle\frac{\pi\rho R^4H}{20}$.
En utilisant la valeur de la masse, on trouve $3MR^2/10$.
(remarque : ce n'est pas le tiers du moment d'inertie du cylindre correspondant ! !)

6. L'objectif de l'exercice est de calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, fondamentale en probabilités, statistiques, métrologie...
On note $R$ un réel positif puis
— $C_R$ le carré $[-R, R]\times[-R, R]$,
— $D_R^1$ le disque de centre $O$ et rayon $R$,
— $D_R^2$ le disque de centre $O$ et rayon $\sqrt{2}R$.
On note $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.
(a) Expliquer pourquoi $\int\int_{D_R^1} f\ \mathrm{d}^2S \leq \int\int_{C_R} f\ \mathrm{d}^2S \leq \int\int_{D_R^2} f\ \mathrm{d}^2S$.
(b) En utilisant les coordonnées polaires, calculer $\int\int_{D_R^1} f\ \mathrm{d}^2S$
(c) Calculer de même $\int\int_{D_R^2} f\ \mathrm{d}^2S$
(d) Calculer $\int\int_{C_R} f\mathrm{d}^2S$ en fonction de $\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$
(e) En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$.

corrigé succinct :

(a) La fonction est positive et les domaines d'intégration sont inclus les uns dans les autres ($D_R^1 \subset C_R \subset D_R^2$) donc les intégrales (que l'on peut interpréter comme des volumes d'ensembles eux aussi inclus les uns dans les autres) vérifient bien l'inégalité demandée.
(b) $\int\int_{D_R^1} f\ \ \mathrm{d}^2S = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta \times \int_{r=0}^{R} re^{-r^2}\mathrm{d}r = 2\pi \times [-e^{-r^2}/2]_0^R = \pi(1-e^{-R^2})$
(c) On trouve de même $\pi(1-e^{-2R^2})$
(d) $\int\int_{C_R} f\mathrm{d}^2S = \int_{x=-R}^{R}\int_{y=-R}^{R} e^{-x^2}e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=-R}^{R} e^{-x^2}\mathrm{d}x \times \int_{y=-R}^{R} e^{-y^2}\mathrm{d}y = (\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x)^2$ (les variables sont "muettes" dans ces intégrales : que la variable utilisée soit $x$ ou $y$, les valeurs des intégrales sont identiques)
(e) D'après les questions précédentes, on a $\pi(1-e^{-R^2}) \leq (\int_{-R}^{+R} e^{-x^2}\ \ \mathrm{d}x) \leq \pi(1-e^{-2R^2})$, donc en passant à la limite pour $R$ tendant vers l'infini, $\pi \leq (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ \ \mathrm{d}x) \leq \pi$ et donc l'intégrale (qui est positive) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ \ \mathrm{d}x$ vaut $\sqrt{\pi}$.

7. a) Calculer le volume, la masse, le moment d'inertie par rapport à son centre d'une boule de rayon $R$ et de masse volumique constante $\rho$.
b) Même question si la masse volumique n'est pas constante mais a pour expression $\rho(r) = \dfrac{R}{r+R}\rho_0$.
c) Même question avec une sphère de masse surfacique $\sigma$ constante.

corrigé succinct :
a) voir le cours...
b) le volume $4/3\pi R^3$ est bien entendu identique. Mais pour la masse la formule change : on calcule $\int\int\int_B \rho(r)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \times \int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta \times \int_{r=0}^{R}\dfrac{R}{r+R}\rho_0 r^2\mathrm{d}r$, donc
$$M = 4\pi R\rho_0\int_{r=0}^{R}\frac{r^2}{r+R}\mathrm{d}r.$$
Si on pose la division du polynôme $r^2$ par $r+R$ (la variable étant $r$, $R$ est une constante) on trouve $r^2 = (r-R)(r+R) + R^2$ donc $\dfrac{r^2}{r+R} = r - R + \dfrac{R^2}{r+R}$, de primitive $r^2/2 - Rr + R^2\ln(r+R)$, donc $M = 4\pi R\rho_0(R^2/2 - R^2 + R^2\ln(2R) - R^2\ln(R))$ soit finalement $M = 4\pi R\rho_0(-R^2/2 + R^2\ln(2)) = 4\pi R^3\rho_0(\ln(2) - 1/2)$.
Le résultat est cohérent : $\ln(2) - 1/2 < 1/3$, pour une boule moins dense en moyenne qu'une boule de masse volumique constante $\rho_0$.
Le moment d'inertie est $I = \int\int\int_B \rho(r)r^2 \times r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi R\rho_0\int_{r=0}^{R}\dfrac{r^4}{r+R}\mathrm{d}r = 4\pi R\rho_0\int_{r=0}^{R}(r^3 - r^2R + rR^2 - R^3 + \dfrac{R^4}{r+R})\mathrm{d}r = 4\pi R\rho_0(R^4/4 - R^4/3 + R^4/2 - R^4 + R^4\ln(2) = 4\pi R^5\rho_0(\ln(2) - 7/12)$.

c) La surface est $\int\int_S \sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = R^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \times \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 4\pi R^2$. La masse est $M = 4\pi\sigma R^2$.

Le moment d'inertie vaut $\int\int_S \sigma R^2 R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi\sigma R^4 = MR^2$.

## exercices pratiques

1. On rappelle que le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface $S$ est $\int\int_S \vec{B}.\mathrm{d}\vec{S}$.

Calculer le flux à travers le rectangle horizontal $[x_0, x_0+L] \times [y_0, y_0+H]$ d'un champ magnétique $\vec{B} = B_0 e^{-\alpha(x-x_0)} e^{-\beta(y-y_0)} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ $(\alpha, \beta, x_0, y_0, L, H, B_0$ étant des constantes)

corrigé succint :

Ici le vecteur $\mathrm{d}S$, normal à la surface, vaut $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{k}$, donc le produit scalaire $\vec{B}.\mathrm{d}\vec{S} = B_0 e^{-\alpha(x-x_0)} e^{-\beta(y-y_0)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

L'intégrale est donc
$$B_0 \int_{x=x_0}^{x_0+L} \int_{y=y_0}^{y_0+H} e^{-\alpha(x-x_0)} e^{-\beta(y-y_0)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = B_0 \frac{(1-e^{-\alpha L})(1-e^{-\beta H})}{\alpha\beta}.$$