

## exercices théoriques

## 1. Résoudre les systèmes

$$(S_1) : \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases},$$

$$(S_3) : \begin{cases} 2x + 3y - z = -5 \\ 3x - y + z = 6 \\ 4x + 3y - z = -7 \end{cases},$$

$$(S_2) : \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 4 \\ 4x - y + z = 5 \\ 6x - 4y + z = -1 \end{cases},$$

$$(S_4) : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - 3y + z = 4 \\ 4x - 5y + 3z = 10 \end{cases}.$$

corrigé succinct :pour  $(S_1)$  on ne trouve pas de solution.pour  $(S_2)$   $x = 9/5, y = 16/5, z = 1$ .Le système  $S_3$  équivaut successivement à :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 & (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ 3x - y + z = 6 \\ 7x + 2y = -1 & (L_3 \leftarrow L_1 + L_3) \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 3x - y + z = 6 \\ 2x = -2 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

d'où l'on déduit par la ligne 3 :  $x = -1$ , puis avec la ligne 1 :  $y = 3$ , puis avec la ligne 2 :  $z = 12$ .Le système  $S_4$  équivaut successivement à :

$$\begin{cases} 7y - 3z = -6 & (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\ x - 3y + z = 4 \\ 7y - z = -6 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2) \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} 7y - 3z = -6 \\ x - 3y + z = 4 \\ 2z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

d'où l'on déduit par la ligne 3 :  $z = 0$ , puis avec la ligne 1 :  $y = -6/7$ , puis avec la ligne 2 :  $x = 4 + 3y - z = 4 - 18/7 + 0 = 10/7$ .2. Calculer, si c'est possible,  $A + B$  et  $AB$  :

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

corrigé succinct :(a) On ne peut calculer  $A + B$ , et le produit  $AB$  vaut  $AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ .(b) On ne peut calculer ni  $A + B$ , ni  $AB$  (le nombre de colonnes de  $A$  n'est pas égal au nombre de lignes de  $B$ ).(c) On calcule  $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $AB = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$3. \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer  $A^2$  et vérifier que  $A^2 - A - 2I = 0$ .(b) En déduire que  $A$  est inversible, et calculer  $A^{-1}$ .(c) Résoudre les équations  $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $AY = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .(d) On pose  $P(X) = X^2 - X - 2$ . Déterminer le reste de la division de  $X^5$  par  $P$ , et en déduire l'expression de  $A^5$ .corrigé succinct :(a)  $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -18 & -17 & 9 \\ -30 & -30 & 16 \end{pmatrix}$  et donc  $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$ .(b) On a donc  $\frac{A^2 - A}{2} = I$ , donc  $A \frac{A - I}{2} = \frac{A - I}{2} A = I$ , l'inverse de  $A$  est la matrice

$$\frac{A - I}{2}, \text{ que l'on calcule directement : } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ -9 & -10 & 9/2 \\ -15 & -15 & 13/2 \end{pmatrix}.$$

(c)  $A$  est inversible donc  $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  équivaut à  $A^{-1}AX = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $IX = X = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -29/2 \\ -47/2 \end{pmatrix}$ . De même,  $AY = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  équivaut à  $Y = A^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ , soit  $Y = \begin{pmatrix} -7 \\ 26 \\ 41 \end{pmatrix}$ .

(d) On calcule un quotient  $X^3 + X^2 + 3X + 5$  et un reste  $11X + 10$ . Par conséquent,  $X^5 = (X^2 - X - 2)(X^3 + X^2 + 3X + 5) + 11X + 10$ , et on peut évaluer cette égalité en  $A$ , pour obtenir  $A^5 = (A^2 - A - 2I)(A^3 + A^2 + 3A + 5I) + 11A + 10I$ . Comme  $A^2 - A - 2I = 0$ , on en déduit que  $A^5 = 11A + 10$ , soit  $A^5 = \begin{pmatrix} 65 & 66 & -33 \\ -198 & -199 & 99 \\ -330 & -330 & 164 \end{pmatrix}$ .

4. On fixe un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormé direct, et  $\vec{\omega}(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Vérifier que  $\vec{f} : \vec{u} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{\omega}$  est linéaire, et déterminer sa matrice.

On a bien, pour tout réel  $\lambda$  et tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  les égalités  $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{\omega} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{\omega})$ , et  $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{\omega} = \vec{u} \wedge \vec{\omega} + \vec{v} \wedge \vec{\omega}$ , donc l'application est linéaire. et on peut la représenter par une matrice.

Pour déterminer sa matrice dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , il suffit de calculer en fonction de  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$

l'image de  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$ . On calcule donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ \beta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ .

La matrice est donc  $\begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ , elle est antisymétrique (opposée de sa transposée).

5. (\*) On considère l'application de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans lui-même (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ ) qui au polynôme  $P(X)$  associe le polynôme  $XP'(X)$  (par exemple, l'image du polynôme  $2X^2 + X - 1$  est  $X(4X + 1)$  soit  $4X^2 + X$ ).

Montrer que l'application est linéaire, déterminer son noyau (l'ensemble des polynômes dont l'image est nulle), son image (l'ensemble des polynômes qui peuvent s'écrire  $XP'(X)$ ) et sa matrice dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$ .

corrigé succinct :

Elle est linéaire car  $X(aP + bQ)' = aXP' + bXQ'$ .

Si  $XP' = 0$ ,  $P' = 0$  donc  $P$  est constant : le noyau est l'ensemble des polynômes constants.

Pour l'image : un polynôme  $Q$  de l'image doit être divisible par  $X$  donc vérifie  $Q(0) = 0$ . Réciproquement si  $Q(0) = 0$ ,  $Q(X)/X$  est un polynôme de degré  $n - 1$ , il admet donc une primitive  $P$ , et on a bien  $XP' = Q$ .

6. Inverser :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -8 \\ 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

corrigé succinct : On peut résoudre le système  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire exprimer  $x, y, z$  en

fonction de  $x', y', z'$  : les coefficients utilisés sont ceux de  $A^{-1}$ .

Ou bien utiliser la méthode détaillée en cours : on place  $A$  et  $I_3$  côte-à-côte :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

et on réalise des opérations **sur les lignes** (uniquement, pas les colonnes) qui permettent de transformer  $A$  en  $I$ . On se retrouve alors, du côté droit de l'expression, avec la matrice  $A^{-1}$ .

Ici on peut commencer par ajouter  $L_1$  à  $L_2$  et  $-2L_1$  à  $L_3$  pour faire apparaître deux zéros sur la première colonne :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Puis on ajoute  $3L_3$  à  $L_2$ , et **ensuite** on change tous les signes de la ligne  $L_3$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -13 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Puis on échange juste  $L_2$  et  $L_3$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 35 & -5 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

puis on divise  $L_3$  par 35 et **ensuite** on ajoute  $13L_3$  à  $L_2$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/35 & 13/35 & 4/35 \\ 0 & 0 & 1 & -5/35 & 1/35 & 3/35 \end{array} \right)$$

pour terminer, on ajoute  $-2L_2 + 5L_3$  à la ligne  $L_1$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -21/35 & 7/35 \\ 0 & 1 & 0 & 5/35 & 13/35 & 4/35 \\ 0 & 0 & 1 & -5/35 & 1/35 & 3/35 \end{array} \right)$$

On trouve donc, en sortant le coefficient  $1/35$  :

$$A^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 0 & -21 & 7 \\ 5 & 13 & 4 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Par la même méthode, on obtient  $B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,

$$\text{et } C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 5 & -10 \\ -17 & 10 & -28 \\ 7 & -5 & 13 \end{pmatrix}$$

### exercices pratiques

#### 1. (\*) matrices et optique

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, on modélise la propagation d'un rayon par un vecteur  $\begin{pmatrix} h \\ \nu i \end{pmatrix}$  où  $h$  est la hauteur (mesurée verticalement depuis l'axe optique),  $i$  l'angle qu'il fait avec l'horizontale et  $\nu$  un nombre qui est égal à l'indice  $n$  du milieu si le rayon se propage dans le sens normal (de gauche à droite),  $-n$  sinon.

Un système optique (composé de lentilles, miroirs, etc.) est modélisé par une matrice  $M$  de taille  $2 \times 2$  de sorte que l'on ait  $\begin{pmatrix} h_2 \\ \nu_2 i_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} h_1 \\ \nu_1 i_1 \end{pmatrix}$ , avec  $\begin{pmatrix} h_1 \\ \nu_1 i_1 \end{pmatrix}$  le rayon entrant dans le système et  $\begin{pmatrix} h_2 \\ \nu_2 i_2 \end{pmatrix}$  le rayon sortant du système.

Quand un système est composé de plusieurs éléments, sa matrice est obtenue en multipliant les matrices des éléments qui le composent, en indiquant de droite à gauche les matrices des éléments successivement rencontrés.

- (a) montrer que la matrice d'une zone transparente de longueur  $D$  est  $\begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , que la matrice d'un miroir sphérique de rayon  $R$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}$ , que la matrice d'un miroir plan est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (b) en déduire que la matrice d'une cavité laser constituée d'un miroir plan et d'un miroir sphérique concave séparés d'une distance  $D$  est  $\begin{pmatrix} 1 - 2D/R & 2D(1 - D/R) \\ -2/R & 1 - 2D/R \end{pmatrix}$
- (a)
- (b) Dans la cavité un rayon parcourt une distance  $d$ , est réfléchi par le miroir sphérique, parcourt une distance  $d$ , est réfléchi par le miroir plan. Il suffit donc de calculer  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$