# TD 3 : Algèbre linéaire et matrices- corrigé

## exercices théoriques

1. Calculer, si c'est possible, $A+B$ et $AB$ :

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

corrigé succint :

(a) On ne peut calculer $A+B$, et le produit $AB$ vaut $AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) On ne peut calculer ni $A+B$, ni $AB$ (le nombre de colonnes de $A$ n'est pas égal au nombre de lignes de $B$).

(c) On calcule $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer $A^2$ et vérifier que $A^2 - A - 2I = 0$.

   (b) En déduire que $A$ est inversible, et calculer $A^{-1}$.

   (c) Résoudre les équations $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $AY = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (d) On pose $P(X) = X^2 - X - 2$. Déterminer le reste de la division de $X^5$ par $P$, et en déduire l'expression de $A^5$.

corrigé succint :

(a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -18 & -17 & 9 \\ -30 & -30 & 16 \end{pmatrix}$ et donc $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$.

(b) On a donc $\dfrac{A^2-A}{2} = I$, donc $A\dfrac{A-I}{2} = \dfrac{A-I}{2}A = I$, l'inverse de $A$ est la matrice $\dfrac{A-I}{2}$, que l'on calcule directement : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ -9 & -10 & 9/2 \\ -15 & -15 & 13/2 \end{pmatrix}$.

(c) $A$ est inversible donc $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ équivaut à $A^{-1}AX = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $IX = X = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -29/2 \\ -47/2 \end{pmatrix}$. De même, $AY = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ équivaut à $Y = A^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, soit $Y = \begin{pmatrix} -7 \\ 26 \\ 41 \end{pmatrix}$.

(d) On calcule un quotient $X^3 + X^2 + 3X + 5$ et un reste $11X + 10$. Par conséquent, $X^5 = (X^2 - X - 2)(X^3 + X^2 + 3X + 5) + 11X + 10$, et on peut évaluer cette égalité en $A$, pour obtenir $A^5 = (A^2 - A - 2I)(A^3 + A^2 + 3A + 5I) + 11A + 10I$.

Comme $A^2 - A - 2I = 0$, on en déduit que $A^5 = 11A + 10$, soit $A^5 = \begin{pmatrix} 65 & 66 & -33 \\ -198 & -199 & 99 \\ -330 & -330 & 164 \end{pmatrix}$.

3. On fixe un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, et $\vec{\omega}(\alpha, \beta, \gamma)$.

   Vérifier que $\vec{f} : \vec{u} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{\omega}$ est linéaire, et déterminer sa matrice.

On a bien, pour tout réel $\lambda$ et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les égalités $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{\omega} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{\omega})$, et $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{\omega} = \vec{u} \wedge \vec{\omega} + \vec{v} \wedge \vec{\omega}$, donc l'application est linéaire. et on peut la représenter par une matrice.

Pour déterminer sa matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il suffit de calculer en fonction de $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ l'image de $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$. On calcule donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ \beta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice est donc $\begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, elle est antisymétrique (opposée de sa transposée).

4. On considère l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$) qui au polynôme $P(X)$ associe le polynôme $XP'(X)$ (par exemple, l'image du polynôme $2X^2 + X - 1$ est $X(4X+1)$ soit $4X^2 + X$).

Montrer que l'application est linéaire, déterminer son noyau (l'ensemble des polynômes dont l'image est nulle), son image (l'ensemble des polynômes qui peuvent s'écrire $XP'(X)$) et sa matrice dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.

corrigé succinct :

Elle est linéaire car $X(aP + bQ)' = aXP' + bXQ'$.

Si $XP' = 0$, $P' = 0$ donc $P$ est constant : le noyau est l'ensemble des polynômes constants.

Pour l'image : un polynôme $Q$ de l'image doit être divisible par $X$ donc vérifie $Q(0) = 0$. Réciproquement si $Q(0) = 0$, $Q(X)/X$ est un polynôme de degré $n - 1$, il admet donc une primitive $P$, et on a bien $XP' = Q$.

5. Inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

corrigé succinct : On peut résoudre le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, c'est-à-dire exprimer $x, y, z$ en fonction de $x', y', z'$ : les coefficients utilisés sont ceux de $A^{-1}$.

Ou bien utiliser la méthode détaillée en cours : on place $A$ et $I_3$ côte-à-côte :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et on réalise des opérations **sur les lignes** (uniquement, pas les colonnes) qui permettent de transformer $A$ en $I$. On se retrouve alors, du côté droit de l'expression, avec la matrice $A^{-1}$.

Ici on peut commencer par ajouter $L_1$ à $L_2$ et $-2L1$ à $L_3$ pour faire apparaître deux zéros sur la première colonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Puis on ajoute $3L_3$ à $L_2$, et **ensuite** on change tous les signes de la ligne $L_3$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -13 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Puis on échange juste $L_2$ et $L_3$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 35 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

puis on divise $L_3$ par 35 et **ensuite** on ajoute $13L_3$ à $L_2$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/35 & 13/35 & 4/35 \\ 0 & 0 & 1 & -5/35 & 1/35 & 3/35 \end{array}\right)$$

pour terminer, on ajoute $-2L_2 + 5L_3$ à la ligne $L_1$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -21/35 & 7/35 \\ 0 & 1 & 0 & 5/35 & 13/35 & 4/35 \\ 0 & 0 & 1 & -5/35 & 1/35 & 3/35 \end{array}\right)$$

On trouve donc, en sortant le coefficient $1/35$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 0 & -21 & 7 \\ 5 & 13 & 4 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Par la même méthode, on obtient $B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

## exercices pratiques

1. **matrices et optique**

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, on modélise la propagation d'un rayon par un vecteur $\begin{pmatrix} h \\ \nu i \end{pmatrix}$ où $h$ est la hauteur (mesurée verticalement depuis l'axe optique), $i$ l'angle qu'il fait avec l'horizontale et $\nu$ un nombre qui est égal à l'indice $n$ du milieu si le rayon se propage dans le sens normal (de gauche à droite), $-n$ sinon.

Un système optique (composé de lentilles, miroirs, etc.) est modélisé par une matrice $M$ de taille $2 \times 2$ de sorte que l'on ait $\begin{pmatrix} h_2 \\ \nu_2 i_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} h_1 \\ \nu_1 i_1 \end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix} h_1 \\ \nu_1 i_1 \end{pmatrix}$ le rayon entrant dans le système et $\begin{pmatrix} h_2 \\ \nu_2 i_2 \end{pmatrix}$ le rayon sortant du système.

Quand un système est composé de plusieurs éléments, sa matrice est obtenue en multipliant les matrices des éléments qui le composent, en indiquant de droite à gauche les matrices des éléments successivement rencontrés.

(a) montrer que la matrice d'une zone transparente de longueur $D$ est $\begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que la matrice d'un miroir sphérique de rayon $R$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}$, que la matrice d'un miroir plan est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) en déduire que la matrice d'une cavité laser constituée d'un miroir plan et d'un miroir sphérique concave séparés d'une distance $D$ est

$$\begin{pmatrix} 1-2D/R & 2D(1-D/R) \\ -2/R & 1-2D/R \end{pmatrix}$$

(a)

(b) Dans la cavité un rayon parcourt une distance $d$, est réfléchi par le miroir sphérique, parcourt une distance $d$, est réfléchi par le miroir plan. Il suffit donc de calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$