TD 4 : Déterminants- corrigé

exercices théoriques

1. Calculer les déterminants :

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 12 \\ 16 & 0 & -8 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & -50 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{vmatrix}$

<u>corrigé succint :</u>

(a) Le déterminant vaut $4 \times 1 - 0 \times 1 = 4$

(b) Le déterminant vaut $-1 \times 1 - (-2) \times 2 = -1 + 4 = 3$

(c) Plutôt que développer directement on peut d'abord soustraire la ligne 1 à la ligne 2, ce qui ne change pas la valeur du déterminant : $\begin{vmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -2 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$, puis développer selon la dernière colonne : le déterminant vaut ainsi $-2\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ soit $-2(-2 \times 4 - (-1) \times 8) = 0$.

(d) On peut ici directement développer par rapport à la première ligne, et le déterminant vaut $1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ soit $0 - 1$ soit -1.

(e) On peut "sortir" du déterminant un 4 sur la première ligne, un 4 sur la deuxième ligne, un 8 sur la troisième ligne, et obtenir ainsi : $\begin{vmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 12 \\ 16 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 4 \times 4 \times 8 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.
Dans le déterminant obtenu, on ajoute la première ligne à la deuxième, et deux fois la première ligne à la troisième, pour faire apparaître des zéros sans changer la valeur du déterminant :
$\begin{vmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 12 \\ 16 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 4 \times 4 \times 8 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.
On développe alors selon la première colonne :
$\begin{vmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 12 \\ 16 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 4 \times 4 \times 8 \times (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \times 4 \times 8 \times (-1) \times (2 \times 3 - 5 \times 2) =$ $4 \times 4 \times 8 \times 4 = 2^9 = 512$.

(f) Pour faire apparaître des zéros sans changer la valeur du déterminant, on peut par exemple enlever 3 fois la quatrième ligne à la première, et une fois la quatrième ligne à la troisième :
$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$, puis développer selon la première colonne :
$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$, puis ajouter trois fois la deuxième ligne à la troisième, et 5 fois la deuxième ligne à la première :
$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 20 & 17 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 14 & 8 \end{vmatrix}$
et enfin développer selon la première colonne :
$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 20 & 17 \\ 14 & 8 \end{vmatrix} = 20 \times 8 - 14 \times 17 = -78$

(g) Pour calculer $g = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & -50 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{vmatrix}$, on commence par développer selon la dernière colonne :
$$g = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & -50 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}$$
Puis on enlève 10 fois la deuxième ligne à la quatrième et on développe selon la quatrième colonne :

$$g = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 & 10 \\ 10 & -50 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 10 & 0 & R & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 10 \\ 10 & -50 & 0 & 20 \end{vmatrix}$$

On développe alors selon la troisième colonne :

$$g = -(-\begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 10 \\ 10 & -50 & 20 \end{vmatrix} - R\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 60 & 10 \\ 10 & -50 & 20 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 10 \\ 10 & -50 & 20 \end{vmatrix} + R\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 60 & 10 \\ 10 & -50 & 20 \end{vmatrix}$$

On développe le premier déterminant selon la première ligne :

$$g = 10(60 \times 20 - (-50) \times 10) + R\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 60 & 10 \\ 10 & -50 & 20 \end{vmatrix} = 17000 + R\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 60 & 10 \\ 10 & -50 & 20 \end{vmatrix}$$

Pour le dernier déterminant on ajoute la première colonne à la dernière, et on développe selon la premier ligne :

$$g = 17000 + R\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 10 \\ 10 & -50 & 30 \end{vmatrix} = 17000 + R(60 \times 30 + 50 \times 10) = 17000 + 2300R.$$

2. Soit a un nombre réel. On considère le système :

$$\begin{cases} 2x + ay - 2z &= 0 \\ ax + y + 2z &= 0 \\ -x - y + z &= a \end{cases}$$

(a) calculer le déterminant du système et déterminer ses racines.

(b) pour quelle(s) valeur(s) de a le système admet-il une solution (x, y, z) unique ? Donner alors la valeur de x, y et z.

(c) Résoudre le système quand il n'admet pas de solution unique.

corrigé succint :

(a) Le déterminant du système vaut $-(-2+a)(a+2)$ donc le système admet une solution unique si et seulement si a est différent de 2 et de -2.

Dans ce cas, par quotient de déterminants, on trouve $y = \dfrac{-a(4+2a)}{-(-2+a)(a+2)} = \dfrac{2a}{a-2}$: le dénominateur est le déterminant du système, le numérateur le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la deuxième colonne par la colonne des seconds membres du système.

Et aussi $x = \dfrac{2a(a+1)}{-(-2+a)(a+2)}$, $z = \dfrac{a(2-a^2)}{-(-2+a)(a+2)}$.

(b) si $a = 2$ la première ligne $2x + 2y - 2z = 0$ et la troisième ligne $-x - y + z = 2$ sont incompatibles : le système n'admet pas de solution.

Si $a = -2$, de même le système n'admet pas de solution.

3. Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système $\begin{cases} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{cases}$ admet-il une solution unique ?

Résoudre (dans tous les cas) le système.

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$.

En enlevant la troisième colonne à la seconde, et λ fois la troisième colonne à la première, on trouve :

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 1 \\ 1-\lambda^2 & 1-\lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

Si on met en facteur $1 - \lambda$ dans la première et dans la deuxième colonne, puis en développant selon la première ligne on obtient alors

$$(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1+\lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(1+1+\lambda)$$

Le déterminant vaut donc $(\lambda-1)^2(\lambda+2)$.

— s'il est nul : ou bien $\lambda = 1$, et le système se résume à $x + y + z = 1$, les solutions forment le plan de vecteur normal $(1,1,1)$ passant par le point de coordonnées $(1,0,0)$.

— ou bien $\lambda = -2$ et le système devient $\begin{cases} -2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= -2 \\ x + y - 2z &= 1 \end{cases}$.

On peut enlever la troisième ligne à la deuxième, ajouter deux fois la troisième ligne à la première, le système devient :

$$\begin{cases} 3y - 3z &= 3 \\ -3y + 3z &= -3 \\ x + y - 2z &= 1 \end{cases}.$$

et donc

$$\begin{cases} y &= z + 1 \\ x &= 1 + 2z - y = z \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions forme une droite passant par $(0,1,0)$ de vecteur directeur $(1,1,1)$.

— S'il est non nul, le système admet une solution unique que l'on peut calculer, coordonnée par coordonnée à l'aide de déterminants : chaque coordonnée x, y, z de la solution est obtenue comme un quotient avec au dénominateur, le déterminant du système. Et au numérateur, le déterminant de la matrice du système dans laquelle on remplace successivement la première, la deuxième et la troisième colonne par le vecteur des seconds membres.

Ainsi $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}} = 0$ car au numérateur, les deux premières colonnes sont égales, le déterminant est nul.

De même $y = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}} = 1$ car on a les mêmes déterminant au numérateur et au dénominateur.

et $z = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}} = 0$ car au numérateur, les deux dernières colonnes sont égales, le déterminant est nul ;

On obtient donc la solution unique $(0, 1, 0)$.

4. On note $\vec{\omega} = (1, 2, -1)$ et considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à un vecteur $\vec{v}$ associe le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{\omega}$.
   Montrer que l'application est linéaire, déterminer sa matrice dans la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, et déterminer le déterminant de cette matrice.

<u>corrigé succint :</u>

Elle est linéaire car $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \wedge \vec{\omega} = \lambda\vec{u} \wedge \vec{\omega} + \mu\vec{v} \wedge \vec{\omega}$.

Les colonnes de sa matrice sont les images de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$, on obtient ainsi la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Son déterminant est nul. C'était prévisible car l'image de ω est le vecteur nul, donc l'application (ni la matrice) ne peut pas être inversible.

exercices pratiques

1. **Pont de Wheatstone**
   Les intensités des courants dans les 6 branches d'un circuit vérifient :

$$\begin{cases} I_6 = I_1 + I_2 \\ I_1 = I_3 + I_5 \\ I_4 = I_2 + I_5 \\ 10I_1 + RI_3 = 70 \\ 50I_2 + 10I_4 = 70 \\ 10I_1 + 20I_5 - 50I_2 = 0 \end{cases}$$

Calculer I_5 en fonction de R. En déduire R tel que $I_5 = 0$.

<u>corrigé succint :</u> On peut réécrire "dans l'ordre" le système ainsi :

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + I_6 = 0 \\ I_1 - I_3 - I_5 = 0 \\ -I_2 + I_4 - I_5 = 0 \\ 10I_1 + RI_3 = 70 \\ 50I_2 + 10I_4 = 70 \\ 10I_1 + 20I_5 - 50I_2 = 0 \end{cases}$$

et on obtient un système dont la matrice est celle dont on a calculé le déterminant au T1, il vaut $17000 + 2300R$. Comme une résistance est positive, il ne s'annule jamais, et le système a bien une solution unique.

On trouve I_5 comme quotient de deux déterminants de matrices 6×6 : le dénominateur est la matrice du système, et pour le numérateur, comme on veut I_5, on remplace la cinquième colonne de la matrice du système par les coordonnées des seconds membres : on doit donc calculer
$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & R & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 10 & 70 & 0 \\ 10 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Ainsi $I_5 = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & R & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 10 & 70 & 0 \\ 10 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{17000 + 2300R}$.

On trouve au final $I_5 = \dfrac{-7000 + 3500R}{17000 + 2300R}$.