exercices théoriques

1. On considère les points $A(0,1)$ et $B(2,0)$.
   On note C_1 le demi-cercle supérieur de centre A et de rayon 1, et C_2 le demi-cercle de diamètre $[AB]$ contenant O.
   Calculer les intégrales curvilignes :

   (a) $\int_{C_1} x^2 \mathrm{d}y$

   (b) $\int_{[AB]} (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$

   (c) $\int_{C_2} (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$

corrigé succint :

(a) On peut paramétrer le demi-cercle C_1 par $x = \cos(t)$, $y = 1 + \sin(t)$ avec $t \in [0, \pi]$,
donc $\mathrm{d}y = \cos(t)\mathrm{d}t$
et en remplaçant x et $\mathrm{d}y$ par les expressions ci-dessus, l'intégrale devient $\int_0^\pi \cos^3(t)\mathrm{d}t$.
Si on linéarise $\cos^3(t)$ grâce aux formules d'Euler, on obtient $\cos^3(t) = \dfrac{\cos(3t) + 3\cos(t)}{4}$,
donc en prenant une primitive, l'intégrale vaut $[\sin(3t)/12 + 3\sin(t)/4]_0^\pi = 0$.

(b) On peut paramétrer $[AB]$ par $x = 2t$, $y = 1 - t$ avec $t \in [0,1]$,
donc $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}t$
et l'intégrale devient $\int_0^1 (2(2t+1-t) - 3t + 1)\mathrm{d}t = \int_0^1 (-t+3)\mathrm{d}t$.
Soit encore $[-t^2/2 + 3t]_0^1 = -1/2 + 3 = 5/2$.

(c) **méthode directe...mais affreuse :**
si on emploie la même technique que pour les deux intégrales précédentes, on détermine successivement :

- les équations paramétriques du demi-cercle :
Le centre Ω de C_2 a pour coordonnées $(1, 1/2)$, et le rayon de C_2 est $\sqrt{5}/2$.
On peut donc paramétrer C_2 en coordonnées cartésiennes $x = 1 + \sqrt{5}/2\cos t$, $y = 1/2 + \sqrt{5}/2\sin t$, il reste à trouver les bornes (on n'a pas ici un simple demi-cercle supérieur, ou inférieur, ou gauche ou droite.

- les bornes : l'angle entre $\vec{\imath}$ et ΩA vaut $\arctan(-1/2) + \pi$.
Donc l'angle t varie entre $\arctan(-1/2) + \pi$ et $\arctan(-1/2) + 2\pi$.

- les différentielles : par conséquent, $\mathrm{d}x = -\sqrt{5}/2\sin t$, $\mathrm{d}y = \sqrt{5}/2\cos t$,

- l'intégrale vaut donc $\int_{\arctan(-1/2)+\pi}^{\arctan(-1/2)+2\pi} (3/2+\sqrt{5}/2\cos(t)+\sqrt{5}/2\sin(t))(-\sqrt{5}/2\sin(t)) + (1/2+\sqrt{5}/2\cos(t)-\sqrt{5}/2\sin(t))(\sqrt{5}/2\cos(t))\ \mathrm{d}t$ soit $\int_{\arctan(-1/2)+\pi}^{\arctan(-1/2)+2\pi} -3\sqrt{5}/4\sin(t) + \sqrt{5}\cos(t)/4 - 5/4 \times 2\cos(t)\sin(t) + 5/4(\cos^2 t - \sin^2 t)\ \mathrm{d}t$.

Mais l'intervalle d'intégration est de largeur π, et $\cos(t)\sin(t) = \sin(2t)/2$, $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)/2$ qui sont des fonctions π-périodiques de valeur moyenne nulle.

Ainsi, l'intégrale vaut $\int_{\arctan(-1/2)+\pi}^{\arctan(-1/2)+2\pi} -3\sqrt{5}/4\sin(t) + \sqrt{5}\cos(t)/4\mathrm{d}t = -3\sqrt{5}/4[-\cos(t)]_{\arctan(-1/2)+\pi}^{\arctan(-1/2)+2\pi} + \sqrt{5}/4[\sin(t)]_{\arctan(-1/2)+\pi}^{\arctan(-1/2)+2\pi}$,
$= -3\sqrt{5}/4(\cos(\arctan(-1/2)+\pi) - \cos(\arctan(-1/2)+2\pi)) + \sqrt{5}/4(\sin(\arctan(-1/2)+2\pi) - \sin(\arctan(-1/2)+\pi)), = 3\sqrt{5}/2\cos(\arctan(-1/2)) + \sqrt{5}\sin(\arctan(-1/2))/2$.

Mais $\cos(\arctan(-1/2)) = 1/\sqrt{1+\tan^2(\arctan(-1/2))} = 2/\sqrt{5}$ et de même $\sin(\arctan(-1/2)) = -1/\sqrt{5}$

- au final l'intégrale vaut $5/2$.

méthode efficace, 1 : la forme différentielle $(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$ est exacte, de primitive $f(x,y) = x^2/2 + xy - y^2/2$ donc l'intégrale vaut $f(B) - f(A) = f(2,0) - f(0,1) = 2 - (-1/2) = 5/2$.

méthode efficace, 2 : par rapport à la question b), on intégre la même forme différentielle, entre les mêmes points A et B. Comme la forme $(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$ est exacte, le résultat ne dépend pas du chemin suivi, seulement du point de départ et d'arrivée, donc la valeur de l'intégrale sur C_2 est la même que sur $[AB]$, et vaut $5/2$.

2. Calculer les intégrales des formes différentielle $x\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$ et $x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y$ sur le bord du carré $[0,1] \times [0,1]$.

corrigé succint :

1) pour la première intégrale, celle de $x\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$:

méthode directe :
On commence par calculer l'intégrale sur le bord du carré de $x\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$ le bord du carré est

constitué de 4 segments, et l'intégrale cherchée est la somme des intégrales de la même forme différentielle sur chacun des 4 segments.
Il y a donc 4 calculs à faire (mais chacun d'entre eux étant assez rapide).

- si on calcule l'intégrale entre $(0,0)$ et $(1,0)$ d'abord (sur le "bord inférieur" du carré) : ici x varie entre 0 et 1 et y vaut 0, donc on peut calculer l'intégrale en prenant x comme paramètres, et $y = 0$, $\mathrm{d}y = 0$. Cette première intégrale vaut donc $\int_{x=0}^1 x\mathrm{d}x = [x^2/2]_0^1 = 1/2$.

- pour l'intégrale entre $(1,0)$ et $(1,1)$ (sur le "bord droit" du carré) : ici, x est constant et vaut 1, donc d$x = 0$, et par ailleurs y varie entre 0 et 1. On calcule l'intégrale en prenant y pour paramètres, et elle vaut $\int_{y=0}^{1} 1^2 \mathrm{d}y = 1$.

- pour l'intégrale entre $(1,1)$ et $(0,1)$ (sur le "bord supérieur" du carré) : ici, y est constant et vaut 1, donc d$y = 0$, et x varie entre 1 et 0 (attention au sens des bornes, on va bien de 1 à 0) : l'intégrale vaut donc $\int_{x=1}^{0} x\mathrm{d}x = [x^2/2]_1^0 = -1/2$.

- pour la dernière intégrale sur le "bord gauche") du carré : ici, y varie de 1 à 0, alors que x est constant et vaut 0. La forme différentielle est donc nulle, puisque x et x^2 sont nuls, et donc l'intégrale vaut 0.

Au final l'intégrale sur le carré est la somme de ces 4 intégrales et vaut donc $1/2 + 1 - 1/2 + 0 = 1$.

avec Green-Riemann : Il est intéressant ici, plutôt que d'additionner les valeurs des 4 intégrales sur les 4 côtés du carré, d'utiliser la formule de Green-Riemann pour avoir une seule intégrale double à calculer : l'intégrale sur le bord du carré de $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ est l'intégrale double sur le carré de $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$, soit ici $\dfrac{\partial x^2}{\partial x} - \dfrac{\partial x}{\partial y} = 2x$.

Ainsi la première intégrale vaut $\int_0^1 \int_0^1 (2x - 0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 x\mathrm{d}x = 1$

2) Pour la deuxième intégrale, on peut bien sûr reproduire la première méthode en découpant en 4 segments le bord du carré.

Mais il est plus simple et rapide de constater que, la forme étant fermée et définie sur un ensemble sans trou (elle est définie sur le plan tout entier, il n'y a pas de valeur interdite dans la définition de la forme) : elle est exacte.

Et l'intégrale d'une forme exacte sur un chemin fermé est nulle...

3. Calculer l'intégrale de la forme différentielle $y\mathrm{d}x + zdy + x\mathrm{d}z$ sur l'arc d'hélice d'équations $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, $z(t) = t$, entre les points $(1,0,0)$ et $(1,0,2\pi)$.

<u>corrigé succint :</u> Ici la paramétrisation de la courbe est donnée...

On a seulement besoin de calculer les différentielles de x, y et z en fonction de celle de t :

$\mathrm{d}x = -\sin(t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = \cos(t)\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$,

et de remarquer que les bornes d'intégration, pour aller entre les points d'altitude 0 et d'altitude 2π, puisque $t = z$, sont 0 et 2π.

L'intégrale à calculer est donc $\int_{t=0}^{2\pi}(-\sin^2(t) + t\cos(t) + \cos(t))\mathrm{d}t$.

$-\sin^2(t) = (\cos(2t) - 1)/2$ a pour intégrale $-\pi$ (le $\cos(2t)$ est d'intégrale nulle), $\cos(t)$ est d'intégrale nulle, et par intégration par parties, $\int_0^{2\pi} t\cos(t)\mathrm{d}t = [t\sin(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin(t)\mathrm{d}t = 0$.

Finalement l'intégrale vaut $-\pi$.

4. Calculer la circulation des champs de vecteurs $\vec{U} = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$ sur l'ellipse définie par $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = b\sin(t)$.

<u>corrigé succint :</u>

1) La circulation d'un champ de vecteur $\vec{U}$ est l'intégrale curviligne de $\vec{U}.\vec{dl}$, c'est-à-dire de la forme différentielle $-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$.

Ici $\mathrm{d}x = -a\sin(t)\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}y = b\cos(t)\mathrm{d}t$.

On calcule donc pour la première intégrale $\int_{\text{ellipse}} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} ab(\cos^2(t) + \sin^2(t))\mathrm{d}t = 2\pi ab$.

2) Pour la seconde $\int_{\text{ellipse}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ est l'intégrale sur un chemin fermé d'une forme exacte, elle vaut 0.

exercices pratiques

1. Le poids d'un point de masse m et d'altitude z est donné par l'expression $\vec{P} = -mg(z)\vec{k}$ avec $g(z) = g_0\left(\dfrac{R}{R+z}\right)^2$ ($R = 6348$km, $g_0 = 9,81$m.s^{-2}).
Cette force est-elle conservative ?
Déterminer l'expression d'une fonction E_p telle que $\vec{P}.\mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{d}E_p$.
Si A et B sont deux points, calculer en fonction de leurs coordonnées l'intégrale $\int_A^B \vec{P}.\mathrm{d}\vec{l}$.

<u>corrigé succint :</u>

Cet exercice est analogue à celui vu en cours, la seule différence est que l'on ne considère pas ici la valeur de g constante (ce qui est valable quand on reste proche du sol) mais qu'on utilise une expression tenant compte de l'altitude du point.

On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, $\vec{dl} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$; ici, comme le poids est uniquement vertical, seule la composante sur $\vec{k}$ va intervenir.

Cela dit : la circulation de $\vec{P}$ (en mécanique : le travail du poids) est l'intégrale curviligne de la forme $\vec{P}.\mathrm{d}\vec{l}$.

Cette forme est fermée (une seule variable !) et définie sur le demi-espace $z > -R$ "sans trou", donc elle est exacte. Par conséquent, la circulation ne dépend pas du chemin suivi : la force est bien conservative.

Une "primitive" de forme $\vec{P}.\mathrm{d}\vec{l} = -mg(z)\mathrm{d}z$ est la fonction $E_p = -m\dfrac{g_0R^2}{R+z}$.

Ainsi, $\int_A^B \vec{P}.\mathrm{d}\vec{l} = -E_p(B) - (-E_p(A)) = \dfrac{mg_0R^2}{R+z_B} - \dfrac{mg_0R^2}{R+z_A}$.

2. On considère un contour C qui enlace N conducteurs parcourus par des courants $I_1, \ldots, I_N$.
Le théorème d'Ampère dans le vide relie la circulation du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ aux courants selon la formule $\int_C \vec{B}.\vec{\mathrm{dl}} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$.

(a) On admet que l'induction magnétique $\vec{B}$ à distance a d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant I est tangente au cercle de rayon a situé dans un plan orthogonal au fil.
Calculer sa norme.

(b) On admet que l'induction $\vec{B}$ créée sur l'âme d'une bobine torique de N spires parcourues par un courant I est dirigée selon l'âme du tore, et que sa norme est constante (on néglige les effets de bord).
Calculer cette norme.

corrigé succint :

(a) On considère un cercle C de rayon a situé dans un plan perpendiculaire au fil, dont le centre est le point du fil appartenant à ce plan.

On admet dans l'énoncé que le champ $\vec{B}$ est de la forme $B\vec{u_\theta}$. Alors la circulation du champ le long de C vaut μ_0 fois la somme algébrique des courants traversant le disque.

Donc $\int_C \vec{B}.\vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 I$. Mais sur le fil, $\mathrm{d}l = a\vec{u_\theta}\mathrm{d}\theta$ donc $\vec{B}.\vec{\mathrm{d}l} = B\mathrm{d}\theta$ et finalement $\int_C \vec{B}.\vec{\mathrm{d}l} = \int_0^{2\pi} aB\mathrm{d}\theta = \mu_0 I$ donc $2\pi B = \mu_0 I$, $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$, et $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\vec{u_\theta}$

(b) Soit R le rayon de l'âme du tore.

On choisit pour contour l'âme du tore. Alors le champ est colinéaire à ce contour, $B\vec{u_\theta}$, et le disque à l'intérieur de ce contour est traversé par N courant de même sens et d'intensité I (les fils ressortent, avec courant dans l'autre sens, à l'extérieur du disque).

Si on applique le théorème d'Ampère on trouve donc $\int_C \vec{B}.\vec{\mathrm{d}l} = N\mu_0 I$ soit $2\pi RB = N\mu_0 I$ donc $B = \dfrac{N\mu_0 I}{2\pi R}$.