exercices théoriques

1. On considère les points $A(0,1)$ et $B(2,0)$.
   On note C_1 le demi-cercle supérieur de centre A et de rayon 1, et C_2 le demi-cercle de diamètre $[AC]$ contenant O.
   Calculer les intégrales curvilignes :
   (a) $\int_{C_1} x^2 \mathrm{d}y$
   (b) $\int_{[AB]} (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$
   (c) $\int_{C_2} (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$

   corrigé succint :

   (a) On peut paramétrer C_1 par $x = \cos(t)$, $y = 1+\sin(t)$ avec $t \in [0,\pi]$, donc $\mathrm{d}y = \cos(t)\mathrm{d}t$ et l'intégrale devient $\int_0^\pi \cos^3(t)\mathrm{d}t$.
   Or $\cos^3(t) = (\cos(3t) + 3\cos(t))/4$, donc l'intégrale vaut 0.

   (b) On peut paramétrer $[AB]$ par $x = 2t$, $y = 1-t$ avec $t \in [0,1]$, donc $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}t$ et l'intégrale devient $\int_0^1 (2(2t+1-t) - 3t + 1)\mathrm{d}t = \int_0^1 (-t+3)\mathrm{d}t = -1/2 + 3 = 5/2$.

   (c) **méthode affreuse :** Le centre Ω de C_2 a pour coordonnées $(1, 1/2)$, et le rayon de C_2 est $\sqrt{5}/2$.
   L'angle entre $\vec{\imath}$ et ΩA vaut donc $\arctan(-1/2) + \pi$.
   On peut donc paramétrer C_2 en coordonnées cartésiennes $x = 1 + \sqrt{5}/2\cos t$, $y = 1/2 + \sqrt{5}/2\sin t$ pour t entre $\arctan(-1/2)+\pi$ et $\arctan(-1/2)+2\pi$.
   De plus, $\mathrm{d}x = -\sqrt{5}/2\sin t$, $\mathrm{d}y = \sqrt{5}/2\cos t$,
   L'intégrale vaut donc $\int_{\arctan(-1/2)+\pi}^{\arctan(-1/2)+2\pi} (3/2 + \sqrt{5}/2\cos(t) + \sqrt{5}/2\sin(t))(-\sqrt{5}/2\sin(t)) + (1/2 + \sqrt{5}/2\cos(t) - \sqrt{5}/2\sin(t))(\sqrt{5}/2\cos(t))\ \mathrm{d}t$ soit $\int_{\arctan(-1/2)+\pi}^{\arctan(-1/2)+2\pi} -3\sqrt{5}/4\sin(t) + \sqrt{5}\cos(t)/4 - 5/4 \times 2\cos(t)\sin(t) + 5/4(\cos^2 t - \sin^2 t)\ \mathrm{d}t$.
   Mais l'intervalle d'intégration est de largeur π, et $\cos(t)\sin(t) = \sin(2t)/2$, $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)/2$ qui sont des fonctions π-périodiques de valeur moyenne nulle.
   Ainsi, l'intégrale vaut $\int_{\arctan(-1/2)+\pi}^{\arctan(-1/2)+2\pi} -3\sqrt{5}/4\sin(t) + \sqrt{5}\cos(t)/4\mathrm{d}t = -3\sqrt{5}/4[-\cos(t)]_{\arctan(-1/2)+\pi}^{\arctan(-1/2)+2\pi} + \sqrt{5}/4[\sin(t)]_{\arctan(-1/2)+\pi}^{\arctan(-1/2)+2\pi}$,
   $= -3\sqrt{5}/4(\cos(\arctan(-1/2)+\pi) - \cos(\arctan(-1/2)+2\pi)) + \sqrt{5}/4(\sin(\arctan(-1/2)+2\pi) - \sin(\arctan(-1/2)+\pi)), = 3\sqrt{5}/2\cos(\arctan(-1/2)) + \sqrt{5}\sin(\arctan(-1/2))/2$.
   Mais $\cos(\arctan(-1/2)) = 1/\sqrt{1+\tan^2(\arctan(-1/2))} = 2/\sqrt{5}$ et de même $\sin(\arctan(-1/2)) = -1/\sqrt{5}$
   Au final l'intégrale vaut $5/2$.
   méthode efficace : la forme est exacte, de primitive $f(x,y) = x^2/2 + xy - y^2/2$ donc l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi et faut $f(B) - f(A) = f(2,0) - f(0,1) = 2 - (-1/2) = 5/2$. Autrement dit le même résultat que la question précédente !

2. Calculer les intégrales des formes différentielle $x\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$ et $x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y$ sur le bord du carré $[0,1]\times[0,1]$.

   corrigé succint :

   Il est intéressant ici, plutôt que d'additionner les valeurs des 4 intégrales sur les 4 côtés du carré, d'utiliser la formule de Green-Riemann pour avoir une seule intégrale double à calculer.
   Ainsi la première intégrale vaut $\int_0^1\int_0^1 (2x-0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 x\mathrm{d}x = 1$, et la deuxième intégrale vaut 0 (on pouvait le prévoir car la forme est fermée définie sur un ensemble sans trou : elle est exacte !).

3. Calculer l'intégrale de la forme différentielle $y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$ sur l'arc d'hélice d'équations $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, $z(t) = t$, entre les points $(1,0,0)$ et $(1,0,2\pi)$.

   corrigé succint :

   On calcule $\int_{t=0}^{2\pi} (-\sin^2(t) + t\cos(t) + \sin(t))\mathrm{d}t$.
   $-\sin^2(t) = (\cos(2t) - 1)/2$ a pour intégrale $-\pi$ (le $\cos(2t)$ est d'intégrale nulle), $\sin(t)$ est d'intégrale nulle, et $\int_0^{2\pi} t\cos(t)\mathrm{d}t = [t\sin(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin(t)\mathrm{d}t = 0$.
   Finalement l'intégrale vaut $-\pi$.

4. Calculer la circulation des champs de vecteurs $\vec{U} = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$ sur l'ellipse définie par $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = b\sin(t)$.

   corrigé succint :

   On calcule $\int_{\text{ellipse}} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} ab(\cos^2(t) + \sin^2(t))\mathrm{d}t = 2\pi ab$ pour la première.
   Pour la seconde $\int_{\text{ellipse}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ est l'intégrale sur un chemin fermé d'une forme exacte, elle vaut 0.

exercices pratiques

1. Le poids d'un point de masse m et d'altitude z est donné par l'expression $\vec{P} = -mg(z)\vec{k}$ avec $g(z) = g_0 \left(\frac{R}{R+z}\right)^2$ ($R = 6348$km, $g_0 = 9,81$m.s^{-2}).
Cette force est-elle conservative ?
Déterminer l'expression d'une fonction E_p telle que $\vec{P}.\mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{d}E_p$.
Si A et B sont deux points, calculer en fonction de leurs coordonnées l'intégrale $\int_A^B \vec{P}.\mathrm{d}\vec{l}$.

corrigé succint :

Oui car la forme $\vec{P}.\mathrm{d}\vec{l}$ est fermée (une seule variable !) et définie sur le demi-espace $z > -R$ "sans trou".

On peut prendre la fonction $E_p = -\frac{g_0 R^2}{R+z}$, et alors $\int_A^B \vec{P}.\mathrm{d}\vec{l} = E_p(A) - E_p(B) = \frac{g_0 R^2}{R+z_B} - \frac{g_0 R^2}{R+z_A}$.

2. On considère un contour C qui enlace N conducteurs parcourus par des courants $I_1, \ldots, I_N$.
Le théorème d'Ampère dans le vide relie la circulation du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ aux courants selon la formule $\int_C \vec{B}.\vec{\mathrm{dl}} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$.

(a) On admet que l'induction magnétique $\vec{B}$ à distance a d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant I est tangente au cercle de rayon a situé dans un plan orthogonal au fil.
Calculer sa norme.

(b) On admet que l'induction $\vec{B}$ créée sur l'âme d'une bobine torique de N spires parcourues par un courant I est dirigée selon l'âme du tore, et que sa norme est constante (on néglige les effets de bord).
Calculer cette norme.

corrigé succint :

(a) On considère un cercle C de rayon a situé dans un plan perpendiculaire au fil, dont le centre est le point du fil appartenant à ce plan.
On admet dans l'énoncé que le champ $\vec{B}$ est de la forme $B\vec{u_\theta}$. Alors la circulation du champ le long de C vaut μ_0 fois la somme algébrique des courants traversant le disque.
Donc $\int_C \vec{B}.\vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 I$. Mais sur le fil, $\mathrm{d}l = a\vec{u_\theta}\mathrm{d}\theta$ donc $\vec{B}.\vec{\mathrm{d}l} = B\mathrm{d}\theta$ et finalement $\int_C \vec{B}.\vec{\mathrm{d}l} = \int_0^{2\pi} aB\mathrm{d}\theta = \mu_0 I$ donc $2\pi B = \mu_0 I$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$, et $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\vec{u_\theta}$

(b) Soit R le rayon de l'âme du tore.
On choisit pour contour l'âme du tore. Alors le champ est colinéaire à ce contour, $B\vec{u_\theta}$, et le disque à l'intérieur de ce contour est traversé par N courant de même sens et d'intensité I (les fils ressortent, avec courant dans l'autre sens, à l'extérieur du disque).
Si on applique le théorème d'Ampère on trouve donc $\int_C \vec{B}.\vec{\mathrm{d}l} = N\mu_0 I$ soit $2\pi R B = N\mu_0 I$ donc $B = \frac{N\mu_0 I}{2\pi R}$.