exercices théoriques

1. Calculer, si c'est possible, $A+B$ et AB :

(a) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\\1&3\end{pmatrix}$.

(b) $A=\begin{pmatrix}-1&-1&5\\2&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$.

(c) $A=\begin{pmatrix}-1&-1&5\\2&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-3&1\end{pmatrix}$.

(d) $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&0&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&-2&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

corrigé succint :

(a) On ne peut calculer $A+B$, et le produit AB vaut $AB=\begin{pmatrix}6&4\\4&-2\end{pmatrix}$.

(b) On ne peut calculer $A+B$, et le produit AB vaut $AB=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

(c) On ne peut calculer ni $A+B$, ni AB (le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B).

(d) On calcule $A+B=\begin{pmatrix}1&1&0\\-3&-2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$ et $AB=\begin{pmatrix}-1&-5&-2\\-3&3&-2\\-1&4&0\end{pmatrix}$.

2. Calculer les déterminants :

(a) $\begin{vmatrix}4&0\\1&1\end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix}-1&-2\\2&1\end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix}-1&-5&-2\\-3&3&-2\\-1&4&0\end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix}-4&4&8\\4&4&12\\16&0&-8\end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix}3&1&2&1\\0&1&3&2\\1&-1&4&0\\1&2&-1&-2\end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix}-1&-1&0&0&0&1\\1&0&-1&0&-1&0\\0&-1&0&1&-1&0\\10&0&R&0&0&0\\0&50&0&10&0&0\\10&-50&0&0&20&0\end{vmatrix}$

corrigé succint :

(a) 4
(b) 3
(c) 0
(d) -1
(e) 512
(f) -78
(g) $17000+2300R$

3. On considère le système $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&-&z&=&0\\ &&y&+&z&=&1\\ 2x&-&3y&-&z&=&0\end{array}\right.$

(a) Montrer que (S) admet une solution (x,y,z) unique.

(b) Déterminer la coordonnée z de cette solution.

corrigé succint :

le système admet une solution (x,y,z) unique car $\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\2&-3&-1\end{vmatrix}=6\neq 0$.

Alors z vaut $\dfrac{\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\2&-3&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\2&-3&-1\end{vmatrix}}=\dfrac{5}{6}$

4. Soit $A=\begin{pmatrix}5&6&-3\\-18&-19&9\\-30&-30&14\end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2-A-2I=0$.

(b) En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

(c) Résoudre les équations $AX=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $AY=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$.

(d) On pose $P(X)=X^2-X-2$. Déterminer le reste de la division de X^5 par P, et en déduire l'expression de A^5.

corrigé succint :

(a) $A^2=AA=\begin{pmatrix}7&6&-3\\-18&-17&9\\-30&-30&16\end{pmatrix}$ et donc $A^2-A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I$.

(b) On a donc $\frac{A^2-A}{2}=I$, donc $A\frac{A-I}{2}=\frac{A-I}{2}A=I$, l'inverse de A est la matrice $\frac{A-I}{2}$, que l'on calcule directement : $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&-3/2\\-9&-10&9/2\\-15&-15&13/2\end{pmatrix}$.

(c) A est inversible donc $AX=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ équivaut à $A^{-1}AX=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $IX=X=\begin{pmatrix}7/2\\-29/2\\-47/2\end{pmatrix}$. De même, $AY=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$ équivaut à $Y=A^{-1}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$, soit $Y=\begin{pmatrix}-7\\26\\41\end{pmatrix}$.

(d) On calcule un quotient X^3+X^2+3X+5 et un reste $11X+10$. Par conséquent, $X^5=(X^2-X-2)(X^3+X^2+3X+5)+11X+10$, et on peut évaluer cette égalité en A, pour obtenir $A^5=(A^2-A-2I)(A^3+A^2+3A+5I)+11A+10I$.
Comme $A^2-A-2I=0$, on en déduit que $A^5=11A+10$, soit $A^5=\begin{pmatrix}65&66&-23\\-198&-199&99\\-330&-330&164\end{pmatrix}$.

5. On fixe un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé direct, et $\vec{\omega}(\alpha,\beta,\gamma)$.
Vérifier que $\vec{f}:\vec{u}\mapsto\vec{u}\wedge\vec{\omega}$ est linéaire, et déterminer sa matrice.

On a bien, pour tout réel λ et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les égalités $(\lambda\vec{u})\wedge\vec{\omega}=\lambda(\vec{u}\wedge\vec{\omega})$, et $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{\omega}=\vec{u}\wedge\vec{\omega}+\vec{v}\wedge\vec{\omega}$, donc l'application est linéaire. et on peut la représenter par une matrice.
Pour déterminer sa matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, il suffit de calculer en fonction de $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ l'image de $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$. On calcule donc $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\gamma\\\beta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\\0\\-\alpha\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\\0\end{pmatrix}$.

La matrice est donc $\begin{pmatrix}0&\gamma&-\beta\\-\gamma&0&\alpha\\\beta&-\alpha&0\end{pmatrix}$, elle est antisymétrique (opposée de sa transposée).

6. Déterminer l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&-5\\-1&1&1\\2&3&3\end{pmatrix}$

corrigé succint : On résoud le système $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.

On trouve $A^{-1}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}0&-21&7\\5&13&4\\-5&1&3\end{pmatrix}$

exercices pratiques

1. **Pont de Wheatstone**
Les intensités des courants dans les 6 branches d'un circuit vérifient :

$$\begin{cases}I_6=I_1+I_2\\I_1=I_3+I_5\\I_4=I_2+I_5\\10I_1+RI_3=70\\50I_2+10I_4=70\\10I_1+20I_5-50I_2=0\end{cases}$$

Calculer I_5 en fonction de R. En déduire R tel que $I_5=0$.

corrigé succint : On trouve $I_5=\frac{-7000+3500R}{17000+2300R}$.

2. **Google** On souhaite évaluer l'importance de n sites internet en utilisant les liens entrant vers ce site.
Plus précisément, on utilise une matrice constituée de 0 et de 1 : le coefficient $G_{i,j}$ vaut 1 si le site j contient un lien vers le site i, 0 sinon.
On prend un exemple très simple avec $G=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&1\\1&1&1&0&0&1\\1&1&0&0&1&0\end{pmatrix}$.

(a) Si l'on évalue l'importance d'un site par le nombre de sites pointant vers lui, quel est le site le plus important dans cet exemple ?

(b) Si l'on choisit d'évaluer l'importance d'un site par un nombre positif x_i proportionnel à la somme des importances des sites pointant vers lui, quelle équation vérifie le vecteur X de coordonnées x_i ?
Quelle est, dans le cas ci-dessus, le site le plus important ?

corrigé succinct :