TD 5 : Déterminants- corrigé

exercices théoriques

1. Calculer les déterminants :

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 12 \\ 16 & 0 & -8 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & -50 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{vmatrix}$

corrigé succint :

(a) 4
(b) 3
(c) 0
(d) -1
(e) 512
(f) -78
(g) $17000 + 2300R$

2. Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système $\begin{cases} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{cases}$ admet-il une solution unique ?
Résoudre (dans tous les cas) le système.

Le déterminant du système est $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$. S'il est non nul, le système admet une solution unique $(0, 1, 0)$.

S'il est nul : ou bien $\lambda = 1$, et on a $x + y + z = 1$; ou bien $\lambda = -2$ et on trouve une droite passant par $(0, 1, 0)$ de vecteur directeur $(1, 1, 1)$.

3. On note $\vec{\omega} = (1, 2, -1)$ et considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à un vecteur $\vec{v}$ associe le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{\omega}$.
Montrer que l'application est linéaire, déterminer sa matrice dans la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, et déterminer le déterminant de cette matrice.

corrigé succint :
Elle est linéaire car $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \wedge \vec{\omega} = \lambda\vec{u} \wedge \vec{\omega} + \mu\vec{v} \wedge \vec{\omega}$.
Les colonnes de sa matrice sont les images de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$, on obtient ainsi la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Son déterminant est nul. C'était prévisible car l'image de ω est le vecteur nul, donc l'application (ni la matrice) ne peut pas être inversible.

exercices pratiques

1. **Pont de Wheatstone**
Les intensités des courants dans les 6 branches d'un circuit vérifient :

$$\begin{cases} I_6 = I_1 + I_2 \\ I_1 = I_3 + I_5 \\ I_4 = I_2 + I_5 \\ 10I_1 + RI_3 = 70 \\ 50I_2 + 10I_4 = 70 \\ 10I_1 + 20I_5 - 50I_2 = 0 \end{cases}$$

Calculer I_5 en fonction de R. En déduire R tel que $I_5 = 0$.

corrigé succint : On trouve $I_5 = \dfrac{-7000 + 3500R}{17000 + 2300R}$.