TD 6 : Développements limités - corrigé

exercices théoriques

1. Donner les développements limités des expressions suivantes :

(a) $\sqrt{1-2x}$ en 0 à l'ordre 3 (b) $\dfrac{1}{2-x}$ en 0 à l'ordre 4

(c) $3\ \sin 2x - 2\ \sin 3x$ en 0 à l'ordre 3 (d) $\dfrac{1}{3+2x^2}$ en 0 à l'ordre 6

(e) $\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{1-x^2+x^4}$ en 0 à l'ordre 3 (f) $\dfrac{1}{2-x}$ en 1 à l'ordre 4

(g) $\sin(x)$ à l'ordre 3 en $\pi/4$

corrigé succinct : (a) $\sqrt{1-2x} = (1-2x)^{1/2}$ donc en utilisant le développement limité de $(1+t)^\alpha$ avec $t=-2x$ et $\alpha = 1/2$, on trouve

$$\boxed{\sqrt{1-2x} = 1 - x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + x^3\epsilon(x).}$$

(b) $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1-x/2}$, donc en utilisant le développement limité de $\dfrac{1}{1+t}$ (avec t=-x/2), on trouve $\dfrac{1}{2-x} = \frac{1}{2}(1+\dfrac{x}{2}+(\dfrac{x}{2})^2+(\dfrac{x}{2})^3+(\dfrac{x}{2})^4+x^4\epsilon(x))$. Après simplification,

$$\boxed{\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{32}x^4+x^4\epsilon(x).}$$

(c) Il suffit d'utiliser deux fois le développement de sin pour trouver

$$\boxed{3\ \sin 2x - 2\ \sin 3x = 5x^3 + x^3\epsilon(x).}$$

(d) On utilise le développement d'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1+t}$: en remplaçant t par $2x^2$ on obtient un développement limité d'ordre 6 en x, donc l'expression est après simplification

$$\boxed{\frac{1}{3+2x^2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{27}x^4 - \frac{8}{81}x^6 + x^6\epsilon(x).}$$

(e) On effectue la division selon les puissances croissantes à l'ordre 3, en supprimant tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 4, qui ne nous intéressent pas dans le cadre d'un DL d'ordre 3. Donc :
$1-3x+2x^2+x^3 = (1-x^2)(1-3x+3x^2-2x^3)+x^3\epsilon(x)$, et le développement limité cherché est ainsi

$$\boxed{\frac{x^3+2x^2-3x+1}{1-x^2+x^4} = 1-3x+3x^2-2x^3+x^3\epsilon(x).}$$

(f) Attention ici, on cherche un développement limité en 1, autrement dit on cherche à approcher $\dfrac{1}{2-x}$ au voisinage de 1 par un polynôme de degré 4 en $(1-x)$: pour cela on écrit $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{1+(1-x)}$, et on utilise le développement limité de $\dfrac{1}{1+t}$ en remplaçant t par $1-x$ (c'est possible car si x tend vers 1, t tend vers 0) : ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{2-x} = 1-(1-x)+(1-x)^2-(1-x)^3+(1-x)^4+(1-x)^4\epsilon(1-x).}$$

2. Donner un équivalent en $+\infty$ des fonctions suivantes :
$a(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \sin\frac{1}{x}$, $b(x) = \sqrt{5x^3-2x}$, $c(x) = \sqrt{x^2-x}-x$.

corrigé succinct : $a(x) \sim -\dfrac{1}{2x^2}$; $c(x) =\sim -\dfrac{1}{2}$; $b(x) \simeq \sqrt{5}x^{3/2}$.

3. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x^3}$ (b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$ (c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)-1}{\arctan(x^2)}$

(d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\sin(x/2)}{x^2}$ (e) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}$

corrigé succinct :

(a) Au voisinage de 0, $\cos(x) = 1 - x^2/2 + ..$, donc $\dfrac{\cos(x)-1}{x^3} = -\dfrac{1}{2x}+..$: la limite est $+\infty$ en 0^+, $-\infty$ en 0^-.

(b) On peut commencer par exprimer la différence en réduisant les fractions au même dénominateur pour se ramener à une forme indéterminée du type "0/0" : $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$. On peut alors écrire un développement limité du dénominateur et du numérateur avec un terme non nul : $x - \sin x = x^3/6 + x^3\epsilon(x)$ et $x\sin x = x^2 + x^2\epsilon(x)$, donc $\dfrac{x-\sin x}{x\sin x} = x/6 + x\epsilon(x)$, et ainsi $\boxed{\text{la limite est nulle.}}$

(c) Pour lever l'indétermination du type "0/0", il faut effectuer des développements limités du numérateur et du dénominateur ayant chacun un terme principal non nul (au moins). On peut ainsi, pour le dénominateur, écrire $\cos 2x - 1 = -4x^2/2 + x^2\epsilon(x)$ et $\arctan(x^2) = x^2 + ...$ Le quotient est donc de la forme $\dfrac{-4x^2/2+x^2\epsilon(x)}{x^2+..} = \dfrac{-2+\epsilon(x)}{1+\epsilon(x)}$, et $\boxed{\text{la limite en 0 est } -2.}$

(d) Un développement limité d'ordre 2 du dénominateur suffira. Or $\sqrt{1+x}-1 = x/2 - x^2/8 + x^2\epsilon(x)$ et $-\sin(x/2) = -x/2 + x^2\epsilon(x)$, donc $\boxed{\text{la limite cherchée est } -1/8.}$

(e) On peut additionner les fractions et faire un développement limité des numérateurs et dénominateurs. On peut aussi procéder ainsi : $\sin^2(x) = (x - \frac{1}{6}x^3 + x^4\epsilon(x))^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + x^4\epsilon(x)$, donc $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+x^2\epsilon(x)} - 1) = \frac{1}{x^2}(1 + \frac{1}{3}x^2 + x^2\epsilon(x) - 1) = \frac{1}{3} + \epsilon(x)$, $\boxed{\text{la limite cherchée est donc } 1/3.}$

4. Donner, en précisant leur position relative, les asymptotes aux courbes :

$$C_1 : y = x^3\cos\frac{1}{x} - x^3 \quad C_2 : y = \frac{1-3x^2}{3-2x} \qquad C_3 : y = \sqrt{2x^2 - x + 1}$$

corrigé succinct :

C_1 : de même on constate qu'en l'infini, en utilisant un développement limité d'ordre 4 en 0 de $\cos u$ puis en remplaçant u par $\frac{1}{x}$ on obtient

$x^3\cos\frac{1}{x} - x^3 = -\frac{x}{2} + \frac{1}{24x} + \frac{1}{x}\epsilon(\frac{1}{x})$, donc $\boxed{y = -\frac{x}{2} \text{ est asymptote}}$, située au dessous de C_1 en $+\infty$ et en dessus en $-\infty$.

C_2 : pour pouvoir utiliser les calculs usuels de développements limités, on commence par faire apparaître des $1/x$ en factorisant x^2 au dénominateur et x au numérateur :

$$\begin{aligned} \frac{1-3x^2}{3-2x} &= \frac{-3x^2}{-2x} \times \frac{1-1/(3x^2)}{1-3/(2x)} \\ &= \frac{3x}{2}(1 + \frac{3}{2x} + \frac{23}{12x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(1/x)) \\ &\quad \text{(division selon les puissances croissantes)} \\ \frac{1-3x^2}{3-2x} &= \frac{3x}{2} + \frac{9}{4} + \frac{23}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(1/x) \end{aligned}$$

donc la droite d'équation $y = \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}$ est asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$, située au dessous de C_2 en $+\infty$, au dessus en $-\infty$.

De plus on a évidemment une asymptote verticale pour $x = 3/2$.

C_3 : on factorise $2x^2$ pour se ramener au développement limité de $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\epsilon(u)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2-x+1} &= \sqrt{2x^2}\sqrt{1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}} \\ &= \sqrt{2x^2}(1 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}) - \frac{1}{8}(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2})^2 + (-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2})^2\epsilon(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}) \\ &= \sqrt{2x^2}(1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}) - \frac{1}{8}\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(1/x) \\ \sqrt{2x^2-x+1} &= \sqrt{2x^2}(1 - \frac{1}{4x} + \frac{7}{32x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(1/x)) \end{aligned}$$

Donc si x tend vers $+\infty$, $y = \sqrt{2}(x - \frac{1}{4} + \frac{7}{32x} + \frac{1}{x}\epsilon(1/x))$. $\boxed{\text{La droite d'équation } y = \sqrt{2}(x - \frac{1}{4}) \text{ est donc asymptote en } +\infty}$, et $\boxed{C_3 \text{ est située au dessus de son asymptote}}$ (car le coefficient de $1/x$, $7/32$, est positif).

De même si x tend vers $-\infty$, $y = -\sqrt{2}(x - \frac{1}{4} + \frac{7}{32x} + \frac{1}{x}\epsilon(1/x))$. La droite d'équation $y = -\sqrt{2}(x - \frac{1}{4})$ est asymptote, et C_3 est située au dessus de son asymptote (car le coefficient de $1/x$ est négatif et $1/x$ est aussi négatif).

exercices pratiques

1. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère A de coordonnées $(-a, 0)$ et B de coordonnées $(a, 0)$. On place une particule de charge q en A, et une particule de charge $-q$ en B.

   On note M un point du plan, de coordonnées polaires r et θ.

   (a) En calculant $(\vec{AO} + \vec{OM}).(\vec{AO} + \vec{OM})$, montrer que $AM = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta}$

   (b) En déduire que, si r est grand devant a, $AM \simeq r\sqrt{1 + 2a\cos\theta/r}$.
   On admet que, de même, $BM \simeq r\sqrt{1 - 2a\cos\theta/r}$.

   (c) On rappelle que le potentiel électrique créé en M par le dipôle est $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM})$.
   Montrer que, si r est grand devant a, $V(r, \theta) = -\frac{qa\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}$.

   (d) Déterminer alors l'expression du champ électrique $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}(V)$.

   1) $AM^2 = AO^2 + OM^2 + 2\vec{AO}.\vec{OM} = a^2 + r^2 + 2ar\cos(\theta)$.
   2) On factorise r^2 dans la racine et on néglige le terme en $(a/r)^2$ par rapport au terme constant et au terme en a/r.
   3) $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r\sqrt{1+2a/r\cos\theta}} - \frac{1}{r\sqrt{1-2a/r\cos\theta}}) = \frac{q}{4r\pi\epsilon_0}((1 - a/r\cos\theta) - (1 + a/r\cos\theta)) = -\frac{qa\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}$.
   4) On utilise la formule du gradient en coordonnées polaires : $\vec{E} = \frac{qa}{2\pi\epsilon_0}(-2\cos\theta/r^3\vec{u_r} - \sin\theta/r^3\vec{u_\theta})$.

2. * **Circuit RLC parallèle :** tracer en fonction de ω la courbe représentant le module de l'impédance complexe d'un circuit R, L, C parallèle.
   Préciser ses asymptotes et leur position par rapport à la courbe.

corrigé succinct : On a $1/Z = 1/R + jC\omega + 1/(jL\omega)$ et donc $1/|Z| = \sqrt{(1/R)^2 + (C\omega - 1/(L\omega))^2}$.
$|1/Z|$ est minimal quand $C\omega = 1/(L\omega)$, i.e quand $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$.
Quand ω tend vers 0, on a $|1/Z| \sim 1/(L\omega)$ donc on a une asymptote verticale à la courbe en 0, et on peut même voir que l'hyperbole $1/(L\omega)$ est une asymptote (donnant un équivalent de meilleure précision).

Quand ω tend vers $+\infty$, un développement limité montre que $C\omega$ est asymptote à $1/|Z|$...

3. * **Validité de l'approximation des petits angles :**
On souhaite estimer la validité de l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$.

(a) Montrer que pour tout angle θ, $|\sin\theta - \theta| \leq |\theta|^3/6$.

(b) Pour quels angles l'approximation est-elle valable à 10^{-2} près ?

corrigé succinct :

(a) On utilise la formule de Taylor-Mac Laurin à l'ordre 3 : $\sin\theta = 0 + \cos 0\ \theta - \sin 0\ \theta^2/2 - \cos u\ \theta^3/6$, avec $u \in [0;\theta]$, donc $|\sin\theta - \theta| \leq |\cos u||\theta|^3/6$ d'où le résultat car cos est à valeurs dans $[-1;1]$.

(b) il suffit de choisir θ tel que $\theta^3 = 6.10^{-2}$, soit $\theta = 0,391$ rad, soit en degrés : $\theta = 22,43°$ (ATTENTION : pour pouvoir écrire $\sin x = x$ l'angle x doit être exprimé en radians ! ! !)