## exercices théoriques

1. Donner un champ de vecteurs normaux aux surfaces :
   (a) $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5$
   (b) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

2. Soit $\vec{\omega} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$ un vecteur constant, et $\vec{V}$ le champ $\vec{\omega} \wedge \vec{OM}$.
   Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{V}$, et calculer le flux de $\vec{V}$ à travers le demi-disque $z = 0$, $y \geq 0$ et $x^2 + y^2 \leq 1$.

   corrigé succint : $(\beta z - \gamma y, \gamma x - \alpha z, \alpha y - \beta x)$ a pour divergence 0 et pour rotationnel $2\vec{\omega}$. Son flux est l'intégrale de $\alpha y - \beta x$ soit $2\alpha/3$.

3. Soit le vecteur $\vec{A} = 4xz\vec{\imath} - y^2\vec{\jmath} + yz\vec{k}$. Calculer div$(\vec{A})$, et le flux de $\vec{A}$ à travers le cube de sommets opposés $(0,0,0)$ et $(1,1,1)$.

   corrigé succint : La divergence vaut $4z - y$ donc le flux est l'intégrale volumique de $4z - y$ soit $3/2$.

4. On considère un plan $(P)$, un point $O$ n'appartenant pas à $(P)$, et la projection orthogonale $O'$ de $O$ sur $P$. On note $H$ la distance $OO'$.
   Dans le plan $(P)$ on considère une surface $(S)$ de bord $(C)$ et d'aire $S$.
   La réunion des segments de $O$ à chacun des points de $(C)$ forme une surface conique notée $(R)$ (par exemple, si $(S)$ est un disque, $(C)$ est un cercle, et $(R)$ un cône).
   La surface obtenue en réunissant $(R)$ et $(S)$ est notée $(\Sigma)$. On note $V$ son volume intérieur.
   On considère enfin un repère orthonormé direct de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   (a) Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{OM}$.
   (b) En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky au champ de vecteurs $\vec{OM}$, montrer que le volume $V$ est égal à $\frac{1}{3}\int\int_\Sigma \vec{OM}.\mathrm{d}\vec{S}$.
   (c) Montrer que si $M$ est un point de $(R)$, $\vec{OM}.\mathrm{d}\vec{S} = 0$, et que si $M$ est un point de $(S)$, $\vec{OM}.\mathrm{d}\vec{S} = H\mathrm{d}S$.
   (d) En déduire que $V = \frac{HS}{3}$.

## exercices pratiques

5. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère $A$ de coordonnées $(-a, 0)$ et $B$ de coordonnées $(a, 0)$. On place une particule de charge $q$ en $A$, et une particule de charge $-q$ en $B$.
   On note $M$ un point du plan, de coordonnées polaires $r$ et $\theta$.
   (a) En calculant $(\vec{AO} + \vec{OM}).(\vec{AO} + \vec{OM})$, montrer que $AM = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta}$
   (b) En déduire que, si $r$ est grand devant $a$, $AM \simeq r\sqrt{1 + 2a\cos\theta/r}$.
   On admet que, de même, $BM \simeq r\sqrt{1 - 2a\cos\theta/r}$.
   (c) On rappelle que le potentiel électrique créé en $M$ par le dipôle est $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM})$.
   Montrer que, si $r$ est grand devant $a$, $V(r,\theta) = -\frac{qa\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}$.
   (d) Déterminer alors l'expression du champ électrique $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}(V)$, en utilisant la formule du gradient en coordonnées polaires $\vec{\mathrm{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{u_\theta}$.

1) $AM^2 = AO^2 + OM^2 + 2\vec{AO}.\vec{OM} = a^2 + r^2 + 2ar\cos(\theta)$.
2) On factorise $r^2$ dans la racine et on néglige le terme en $(a/r)^2$ par rapport au terme constant et au terme en $a/r$.
3) $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r\sqrt{1+2a/r\cos\theta}} - \frac{1}{r\sqrt{1-2a/r\cos\theta}}) = \frac{q}{4r\pi\epsilon_0}((1 - a/r\cos\theta) - (1 + a/r\cos\theta)) = -\frac{qa\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}$.
4) On utilise la formule du gradient en coordonnées polaires : $\vec{E} = \frac{qa}{2\pi\epsilon_0}(-2\cos\theta/r^3\vec{u_r} - \sin\theta/r^3\vec{u_\theta})$.

6. A partir des équations de Maxwell $\mathrm{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0$, $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$, $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\dfrac{1}{\mu_0}\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \vec{J} + \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, établir l'équation d'ondes dans le vide $\Delta \vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

   (a) Montrer que si $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$ sont des solutions, $\vec{E_1} + \vec{E_2}$ aussi.

   (b) $\vec{u}$ étant un vecteur unitaire constant quelconque, quelle relation doivent vérifier les constantes $k, \omega, \varphi$ pour que le champ unidimensionnel $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(kz + \omega t + \varphi)\vec{u}$ soit solution ?

   (c) Montrer alors, en utilisant les équations de Maxwell de nouveau, que $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux entre eux.
   Montrer enfin l'égalité : $||\vec{E}|| = c||\vec{B}||$.

corrigé succint :

Dans le vide $\rho$ (densité de charge) et $\vec{J}$ (vecteur densité de courant) sont nuls, ce qui simplifie les équations : $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$, $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$, $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\dfrac{1}{\mu_0}\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

1. On rappelle que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$.
   Alors par analogie, $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - (\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{E} = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{E})) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$.
   Mais comme $\vec{\mathrm{rot}}(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\Delta\vec{E}$, $\Delta\vec{E} = \dfrac{\partial(\vec{\mathrm{rot}}\vec{B})}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
2. Les opérations de dérivations spatiales ou temporelles sont linéaires...
3. En injectant l'expression de $\vec{E}$ dans l'équation d'onde, on obtient $k^2c^2 = \omega^2$, donc $k = \pm\omega/c$.
4. On note $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$.
   **Calcul de la divergence et planeité de l'onde :** $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0 + 0 - E_0 u_z k \sin(kz + \omega t + \varphi)$. D'après les équations de Maxwell, cette divergence est nulle, donc $u_z = 0$ : le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à la direction de propagation $\vec{k}$ de l'onde (onde plane).

   **Calcul du rotationnel et orthogonalité :** on obtient $-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = (E_0 u_y k \sin(kz + \omega t + \varphi), -E_0 u_x k \sin(kz + \omega t + \varphi), 0) = E_0 k \sin(kz + \omega t + \varphi)(u_y, -u_x, 0)$ donc en primitivant par rapport au temps, $\vec{B} = -E_0\dfrac{k}{\omega}\cos(kz + \omega t + \varphi)(u_y, -u_x, 0)$ : $\vec{B}$ est bien orthogonal à $\vec{E}$, et on constate aussi qu'il est orthogonal à $\vec{k}$ (remarque : le calcul de primitive fait éventuellement intervenir un terme constant ou dépendant de la position mais pas du temps : on l'ignore dans notre étude d'un phénomène ondulatoire).

   **Comparaison des normes :** De plus la norme de $\vec{B}$ vaut $|-E_0\dfrac{k}{\omega}\sin(kz + \omega t + \varphi)|.||\vec{u}||$, celle de $\vec{E}$ vaut $|E_0\cos(kz+\omega t+\varphi)|.||\vec{u}||$ : elles sont égales à la constante $\dfrac{|k|}{\omega} = 1/c$ près. Exprimées dans les unités de base du système international, la valeur de $B$ est donc $3.10^8$ fois inférieure à celle de $E$.