TD 7 : Opérateurs différentiels - corrigé

exercices théoriques

1. Donner un champ de vecteurs normaux aux surfaces :

   (a) $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5$

   (b) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

   (c) $r = 1$ (coordonnées cylindriques)

   (d) $r = 1$ (coordonnées sphériques)

   (e) $x^2 + y^2 = z$

   corrigé succint : il suffit de calculer un gradient.

2. a) Le champ $\vec{V}(x,y,z) = xy\vec{\imath} - y^2\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$ est-il un champ de gradient ?
   Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{V}$.
   Calculer sa circulation le long du cercle horizontal, de centre $A(0,0,b)$ et de rayon a.
   b) Mêmes questions pour le champ $\vec{W} = yz\vec{\imath} + zx\vec{\jmath} + xy\vec{k}$.

   corrigé succint : a) non ; $-y + 2z$ et $-x\vec{k}$; flux du rotationnel nul
   b) oui ; divergence nulle, rotationnel nul ; circulation nulle ; c'est le gradient de xyz.

3. Soit $\vec{\omega} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$ un vecteur constant, et $\vec{V}$ le champ $\vec{\omega} \wedge \vec{OM}$.
   Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{V}$, et calculer le flux de $\vec{V}$ à travers le demi-disque $z = 0$, $y \geq 0$ et $x^2 + y^2 \leq 1$.

   corrigé succint : $(\beta z - \gamma y, \gamma x - \alpha z, \alpha y - \beta x)$ a pour divergence 0 et pour rotationnel $2\vec{\omega}$.
   Son flux est l'intégrale de $\alpha y - \beta x$ soit $2\alpha/3$.

4. Soit le vecteur $\vec{A} = 4xz\vec{\imath} - y^2\vec{\jmath} + yz\vec{k}$. Calculer $\text{div}(\vec{A})$, et le flux de $\vec{A}$ à travers le cube de sommets opposés $(0,0,0)$ et $(1,1,1)$.

   corrigé succint : La divergence vaut $4z - y$ donc le flux est l'intégrale volumique de $4z - y$ soit $3/2$.

5. Soit le vecteur $\vec{A} = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}\vec{\imath} + \dfrac{y}{x^2+y^2+1}\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$. Déterminer $\vec{\text{rot}}(\vec{A})$.
   Montrer que la circulation de $\vec{A}$ entre O et $M(1,2,-3)$ ne dépend pas du chemin suivi ; la calculer.

   corrigé succint :
   Le rotationnel est nul donc le vecteur est un champ de gradient.
   On constate que si $F(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+1)/2 + z^3/3$, on a bien $\vec{A} = \vec{\text{grad}}(F)$.
   Ainsi la circulation ne dépend pas du chemin suivi et elle vaut $f(M) - f(0,0,0)$ soit $\ln(6)/2 - 9$.

6. On considère un plan (P), un point O n'appartenant pas à (P), et la projection orthogonale O' de O sur P. On note H la distance OO'.
   Dans le plan (P) on considère une surface (S) de bord (C) et d'aire S.
   La réunion des segments de O à chacun des points de (C) forme une surface conique notée (R) (par exemple, si (S) est un disque, (C) est un cercle, et (R) un cône).
   La surface obtenue en réunissant (R) et (S) est notée (Σ). On note V son volume intérieur.
   On considère enfin un repère orthonormé direct de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

   (a) Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{OM}$.

   (b) En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky au champ de vecteurs $\vec{OM}$, montrer que le volume V est égal à $\dfrac{1}{3}\int\int_\Sigma \vec{OM}.\mathrm{d}\vec{S}$.

   (c) Montrer que si M est un point de (R), $\vec{OM}.\mathrm{d}\vec{S} = 0$, et que si M est un point de (S), $\vec{OM}.\mathrm{d}\vec{S} = H\mathrm{d}S$.

   (d) En déduire que $V = \dfrac{HS}{3}$.

   corrigé succint :

exercices pratiques

1. Le champ électrostatique créé en M dans le vide par une charge q située en O s'exprime par $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{OM}}{r^3}$ où $\vec{r} = \vec{OM}$.
   Déterminer le potentiel $V(M)$ dont dérive $\vec{E}$.

corrigé succint :

2. (a) A partir des équations de Maxwell $\mathrm{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0$, $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$, $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\dfrac{1}{\mu_0}\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \vec{J}+\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, établir l'équation d'ondes dans le vide $\Delta\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$.
   (b) Montrer que si $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$ sont des solutions, $\vec{E_1}+\vec{E_2}$ aussi.
   (c) $\vec{u}$ étant un vecteur unitaire constant quelconque, quelle relation doivent vérifier les constantes k, ω, φ pour que le champ unidimensionnel $\vec{E}(z,t) = E_0\cos(kz+\omega t+\varphi)\vec{u}$ soit solution ?
   (d) Montrer alors, en utilisant les équations de Maxwell de nouveau, que $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux entre eux.
   Montrer enfin l'égalité : $||\vec{E}|| = c||\vec{B}||$.

corrigé succint :

Dans le vide ρ (densité de charge) et $\vec{J}$ (vecteur densité de courant) sont nuls, ce qui simplifie les équations : $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$, $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$, $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\dfrac{1}{\mu_0}\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

(a) On rappelle que $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$.
Alors par analogie, $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - (\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{E} = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{E})) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$.
Mais comme $\vec{\mathrm{rot}}(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}) = -\Delta\vec{E}$, $\Delta\vec{E} = \dfrac{\partial(\vec{\mathrm{rot}}\vec{B})}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}) = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

(b) Les opérations de dérivations spatiales ou temporelles sont linéaires...

(c) En injectant l'expression de $\vec{E}$ dans l'équation d'onde, on obtient $k^2c^2 = \omega^2$, donc $k = \pm\omega/c$.

(d) On note $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$.
Calcul de la divergence et planeité de l'onde : $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0+0-E_0u_zk\sin(kz+\omega t+\varphi)$. D'après les équations de Maxwell, cette divergence est nulle, donc $u_z = 0$: le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à la direction de propagation $\vec{k}$ de l'onde (onde plane).

Calcul du rotationnel et orthogonalité : on obtient $-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = (E_0u_yk\sin(kz+\omega t+\varphi), -E_0u_xk\sin(kz+\omega t+\varphi), 0) = E_0k\sin(kz+\omega t+\varphi)(u_y, -u_x, 0)$ donc en primitivant par rapport au temps, $\vec{B} = -E_0\dfrac{k}{\omega}\cos(kz+\omega t+\varphi)(u_y, -u_x, 0)$: $\vec{B}$ est bien orthogonal à $\vec{E}$, et on constate aussi qu'il est orthogonal à $\vec{k}$ (remarque : le calcul de primitive fait éventuellement intervenir un terme constant ou dépendant de la position mais pas du temps : on l'ignore dans notre étude d'un phénomène ondulatoire).

Comparaison des normes : De plus la norme de $\vec{B}$ vaut $|-E_0\dfrac{k}{\omega}\sin(kz+\omega t+\varphi)|.||\vec{u}||$, celle de $\vec{E}$ vaut $|E_0\cos(kz+\omega t+\varphi)|.||\vec{u}||$: elles sont égales à la constante $\dfrac{|k|}{\omega} = 1/c$ près. Exprimées dans les unités de base du système international, la valeur de B est donc 3.10^8 fois inférieure à celle de E.