fonctions vectorielles

vecteur dépendant d'un paramètre $\vec{V}(t)$

exemples :

- vecteur position $\vec{OM}(t)$
- vecteur vitesse $\vec{v}(t)$
- vecteur $\vec{u_r}(\theta)$
- vecteur $\vec{u_r}(t)$

dérivation

$$\text{Soit } \vec{a}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$
$$\vec{a} = (x, y, z)$$

dérivée de $\vec{a}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}'(t) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} + z'(t)\vec{k}$$

dérivée nulle

sur un intervalle, $\vec{a}$ est constant si et seulement si $\vec{a}'$ est nulle

produits et composées

f fonction réelle, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ fonctions vectorielles

dérivation du produit $f\vec{a}$

$$(f\vec{a})'(t) = f'(t)\,\vec{a}(t) + f(t)\,\vec{a}'(t)$$

dérivation de la composée $\vec{a} \circ f$

$$(\vec{a} \circ f)'(t) = [a(f(t))]' = f'(t)\,\vec{a}'(f(t))$$

dérivation du produit scalaire $\vec{a}.\vec{b}$

$$(\vec{a}.\vec{b})' = \vec{a}.\vec{b}' + \vec{a}'.\vec{b}$$

dérivation du produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})' = \vec{a} \wedge \vec{b}' + \vec{a}' \wedge \vec{b}$$

(pour le produit vectoriel, attention à l'ordre !)

exercices

$$f(t) = t^2 + 1, \qquad \vec{a}(t) = (1, t^2, 0) \qquad \text{et } \vec{b}(t) = (t, 1, \sin(t))$$

dérivée de $f\vec{a}$?

$$(2t, \qquad 4t^3 + 2t, \qquad 0)$$

dérivée de la composée $\vec{a} \circ f = a(f)$?

$$(0, \qquad 4t^3 + 4t, \qquad 0)$$

dérivée de $\vec{a}.\vec{b}$?

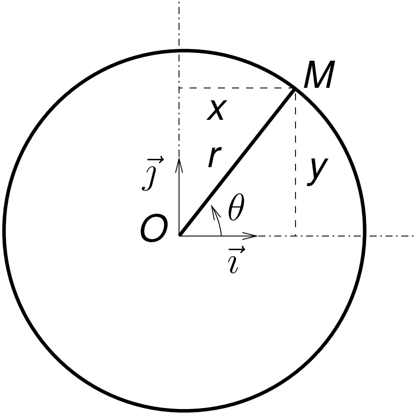
$$2t + 1$$

dérivée de $\vec{a} \wedge \vec{b}$?

$$(2t\sin(t) + t^2\cos(t), \qquad -\cos(t), \qquad -3t^2)$$

rappel sur les coordonnées polaires

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ repère orthonormé du plan. M de coordonnées cartésiennes (x, y)



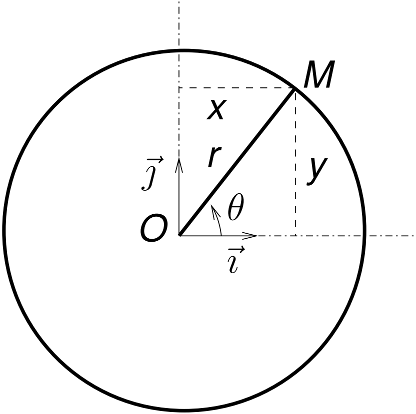
coordonnées polaires de M :

$$r = ||\vec{OM}|| \quad \text{et} \quad \theta = (\vec{\imath}, \vec{OM})$$

r est unique, et θ défini à 2π près (sauf si $M = O$)

les coordonnées

relations entre x, y, r et θ ?



par définition du sinus et du cosinus :

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\sin\theta$$

les coordonnées

relations réciproques ?

pour r : $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = r^2$, donc $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

pour θ : on sait que $\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$: θ et $\arctan(y/x)$ ont même tangente
$\arctan(y/x) \in [-\pi/2; \pi/2]$: c'est θ si $x > 0$, sinon il faut ajouter $\pm\pi$

coordonnées polaires en fonction de x et y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left|\begin{array}{ll} \theta = \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \theta = \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \theta = \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ \theta = \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \theta = -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{array}\right.$$

le repère polaire

à partir du vecteur position $\vec{OM} = r\cos\theta\vec{\imath} + r\sin\theta\vec{\jmath}$, on définit

le vecteur radial

$$\vec{u_r} = \frac{\vec{OM}}{||\vec{OM}||} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$$

et

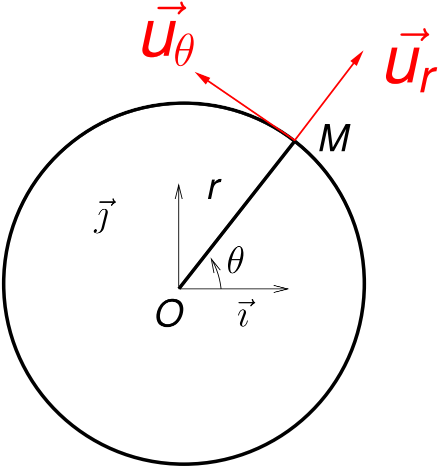
le vecteur orthoradial

obtenu depuis $\vec{u_r}$ par rotation d'angle $\pi/2$, $\quad \vec{u_\theta} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$

$(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ est un repère orthonormé direct

Ces vecteurs ne dépendent que de θ !

le repère polaire



dérivation du repère polaire

$$\vec{u_r} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{u_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

dérivation par rapport à θ

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta} = \vec{u_\theta} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\vec{u_r}$$

Si r et θ sont des fonctions de t, on applique la formule $(\vec{a}\circ f)'(t) = f'(t)\,\vec{a}'(f(t))$ avec $\vec{a} = \vec{u_r}$ et $f(t) = \theta(t)$.

dérivation par rapport à t

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}t} = \theta'\,\vec{u_\theta} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\theta'\,\vec{u_r}$$

application cinématique

en dérivant le vecteur position $\vec{OM}(t) = r\vec{u_r}$, on détermine

le vecteur vitesse

$$\vec{v} = r'\vec{u_r} + r\theta'\vec{u_\theta}$$

le vecteur accélération

$$\vec{a} = (r'' - r\theta'^2)\vec{u_r} + (2r'\theta' + r\theta'')\vec{u_\theta}$$

équations d'une droite du plan

équation cartésienne

droite verticale : $x =$ constante ; droite non verticale : $y = ax + b$

si $A(1, -1)$ et $B(2, 2)$? coef.directeur $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 3$

pour trouver l'ordonnée à l'origine b : $y_A = ax_A + b$, ici $b = -4$,

l'équation cartésienne est $y = 3x - 4$

équations d'une droite du plan

$$M(x,y) \in (AB) \Leftrightarrow \vec{AM} = t\vec{AB}, \text{ donc}$$

équations paramétriques

$$x = x_A + t(x_B - x_A), \qquad y = y_A + t(y_B - y_A)$$

si $A(1,-1)$ et $B(2,2)$?

équations paramétriques : $x = 1 + t, y = -1 + 3t$

droite passant par $C(2,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1,2)$?

équations paramétriques : $x = 2 - t, y = 3 + 2t$

équations d'un plan de l'espace

équation cartésienne d'un plan de l'espace

si un plan P passe par $A(a, b, c)$, et a pour vecteur normal $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$, $M(x, y, z)$ est dans P si et seulement si $\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0$

plan passant par $A(1,0,-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-1,2,3)$:

équation $x-2y-3z=4$

équations d'une droite de l'espace

$M(x,y,z) \in (AB) \Leftrightarrow \vec{AM} = t\vec{AB}$, donc

équations paramétriques

$$x = x_A + t(x_B - x_A), \quad y = y_A + t(y_B - y_A), \quad z = z_A + t(z_B - z_A)$$

$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{array}\right.$ décrit une droite comme intersection de deux plans.

On peut exprimer deux variables en fonction de la troisième et obtenir des équations paramétriques de la droite. Par exemple x et y en fonction de z :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{-z+5}{7} \\ y = \dfrac{5z-4}{7} \\ z = z \end{array}\right.$$

Il s'agit de la droite passant par $A(5/7, -4/7, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1, 5, 7)$

équations d'un cercle de centre A et rayon R

$$AM^2 = R^2, \text{ donc}$$

équation cartésienne

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

(valable aussi pour une sphère en rajoutant un terme $(z - z_A)^2$)

équation paramétrique

si l'angle $(\vec{\imath}, \vec{AM})$ est θ

$$x = x_A + R\cos(\theta),\ y = y_A + R\sin(\theta)$$

(on peut choisir un autre paramètre : t, $t + \pi/4$, t^2, ..., voire inverser les rôles des cos et sin)

quelques autres courbes simples

ellipse

$$x(t) = 1 + 2\cos(t), \qquad y(t) = -2 + 4\sin(t)$$

hélice droite

$$x(t) = 2\cos(t), \qquad y(t) = 2\sin(t), \qquad z(t) = t$$

spirale

$$x(t) = t\cos(t), \qquad y(t) = t\sin(t)$$

intégrale double

f fonction positive

S surface d'équation $z = f(x, y)$

D partie du plan horizontal $z = 0$

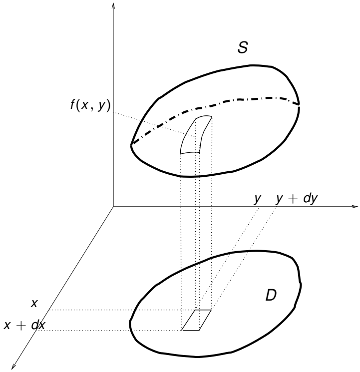
V ensemble des points au dessus de D, sous la surface S :

$$V = \{(x, y, z) | (x, y, 0) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

volume de V ?

intégrale double

on décompose V en petits pavés :
base rectangulaire $[x, x+\mathrm{d}x] \times [y, y+\mathrm{d}y]$, hauteur $f(x,y)$, donc volume
$\mathrm{d}^2 V = f(x,y) \times \mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x,y) \times \mathrm{d}^2 S$

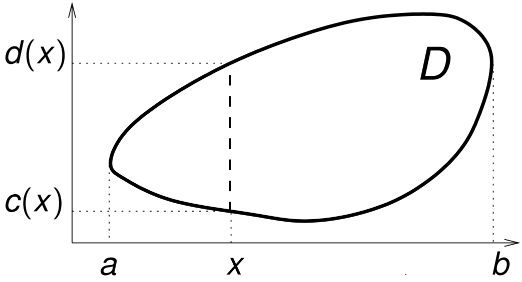


volume total : « somme » de tous ces éléments

$$V = \int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

méthode de calcul ?

équations de D : $a \leq x \leq b$, $c(x) \leq y \leq d(x)$



aire des tranches à x fixé $\int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$, puis nouvelle intégrale en x

intégrale double = deux intégrales simples !

$$\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

(on peut aussi intégrer d'abord en y, puis x)

exemple

R le rectangle $[0,1]\times[0,1]$.

inéquations décrivant R ? calcul de $\int\int_R 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

T le triangle de côtés $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$

inéquations décrivant T ? calcul de $\int\int_T 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

cas particulier : calcul d'aire

si $f = 1$?

$\int\int_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ volume d'un ensemble "cylindrique" de base D et hauteur 1

le volume vaut aire$(D) \times 1$, donc :

aire du domaine D :

$$\text{aire}(D) = \int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

une intégrale double peut représenter :

- un volume : $\int\int_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

- une aire $\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

- une masse $M = \int\int_D \sigma(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, σ masse surfacique

- un moment d'inertie $I = \int\int_D d(M, \Delta)^2\sigma(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

- une force $F = \int\int_D \mathrm{d}^2 F$

- etc

(fonction intégrée pas toujours positive)

exemple : aire du disque

disque D de centre O et rayon 1 : équations ?

calcul de $\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$:

cas particulier : rectangle et $f(x, y) = g(x)h(y)$

si :

D rectangle de côtés parallèles aux axes $[a, b] \times [c, d]$,

f est un produit $f(x, y) = g(x)h(y)$

alors :

$$\int\int_D g(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g \times \int_c^d h$$

exemples

exemple 1 : masse d'une plaque carré, côté L, masse surfacique σ ?

exemple 2 : moment d'inertie de la plaque par rapport à un côté ?

exemples

exemple 3 : centre de gravité G d'un solide ?

rappel système ponctuel (P_1, m_1), ..., (P_k, m_k) : $m_1\vec{GP_1} + \ldots + m_k\vec{GP_k} = \vec{0}$

donc $m_1(x_1 - x_G) + \ldots + m_k(x_k - x_G) = 0$ et $m_1(y_1 - y_G) + \ldots + m_k(y_k - y_G) = 0$

$$\text{donc } x_G = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_kx_k}{m_1 + \ldots + m_k},\ y_G = \frac{m_1y_1 + \ldots + m_ky_k}{m_1 + \ldots + m_k}$$

pour un solide : par analogie

centre de gravité d'un solide S de masse $M = \int\int_S \rho(M)\mathrm{d}^2S$:

$$x_G = \frac{\int\int_S \rho(M)x\mathrm{d}^2S}{M} \qquad \text{et } y_G = \frac{\int\int_S \rho(M)y\mathrm{d}^2S}{M}$$

intégrales triples

de même :
on intégre un infiniment petit d'ordre 3 sur un solide V de l'espace pour obtenir

- un volume $\int\int\int_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

- une masse $\int\int\int_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

- un moment d'inertie $\int\int\int_V d(M,\Delta)^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

- etc

quand utiliser d'autres coordonnées ?

Si D a des éléments de symétries (circulaire, cylindrique, sphérique),

si la fonction intégrée ne dépend que d'une distance à un point ou à un axe...

il est intéressant d'exprimer l'intégrale dans un autre système de coordonnées : polaires, cylindriques, sphériques.

Il faut pour cela connaître :

- un ensemble d'(in)équations pour décrire D

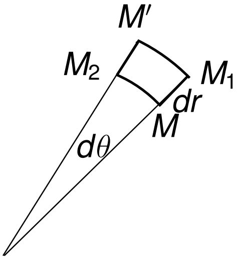
- l'expression de la fonction dans ce système de coordonnées

- l'expression des éléments de surface ou volume $dxdy$ ou $dxdydz$ dans ce système de coordonnées

en polaires : éléments de longueur, de surface

distances et surface parcourues
lors de petites variations des coordonnées polaires ?

M de coordonnées r et θ
M_1 de coordonnées $r + \mathrm{d}r$ et θ
M_2 de coordonnées r et $\theta + \mathrm{d}\theta$
M' de coordonnées $r + \mathrm{d}r$ et $\theta + \mathrm{d}\theta$



éléments de longueur

$$MM_1 = \mathrm{d}r$$
$$MM_2 \simeq r\,\mathrm{d}\theta \quad \text{(segment, proche d'un arc de cercle)}$$
$$MM' \simeq \sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2}$$

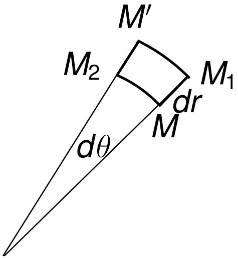
déplacements élémentaires $\vec{\mathrm{d}l}$

$$\vec{MM_1} = \mathrm{d}r\ \vec{u_r}$$
$$\vec{MM_2} \simeq r\,\mathrm{d}\theta\ \vec{u_\theta}$$
$$\vec{MM'} \simeq \mathrm{d}r\ \vec{u_r}\ +\ r\,\mathrm{d}\theta\ \vec{u_\theta}$$

éléments de longueur, de surface

distances et surface parcourues
lors de petites variations des coordonnées polaires ?

M de coordonnées r et θ
M_1 de coordonnées $r + \mathrm{d}r$ et θ
M_2 de coordonnées r et $\theta + \mathrm{d}\theta$
M' de coordonnées $r + \mathrm{d}r$ et $\theta + \mathrm{d}\theta$



élément de surface

$$\mathrm{d}^2S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

exemples de calculs coordonnées polaires

bornes, fonction et élément de surface exprimés avec r et θ

en polaires

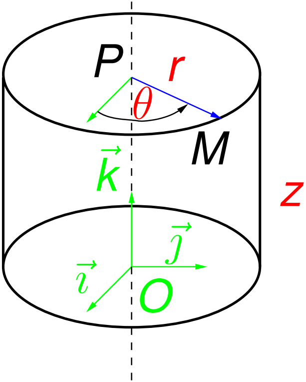
$$\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad = \int\int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

exemple 1 : aire du disque ? $\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

exemple 2 : moment d'inertie du disque homogène par rapport à son centre ?
$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r^2\,\sigma\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

coordonnées cylindriques

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ repère orthonormé direct de l'espace.
M de coordonnées cartésiennes (x, y, z). P projeté de M sur $(0z)$.



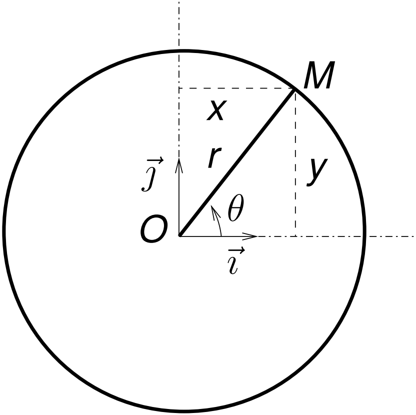
coordonnées cylindriques de M :

$$r = ||\vec{PM}|| \quad , \quad \theta = (\vec{\imath}, \vec{PM}) \quad , \quad z$$

r et z sont uniques, et θ défini à 2π près (sauf si M est sur l'axe (Oz))

les coordonnées

relations entre x, y, z, r et θ ?



par définition du sinus et du cosinus :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z \text{ (eh oui !)}$$

les coordonnées

relations réciproques ?

pour r : $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = r^2$, donc $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

pour θ : on sait que $\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$: θ et $\arctan(y/x)$ ont même tangente
$\arctan(y/x) \in [-\pi/2; \pi/2]$: c'est θ si $x > 0$, sinon il faut ajouter $\pm\pi$

coordonnées cylindriques en fonction de x, y et z

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \left| \begin{array}{ll} \theta = \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \theta = \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \theta = \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ \theta = \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \theta = -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{array} \right| \qquad \mathrm{z}$$

exercices

Déterminer les coordonnées cartésiennes du point de coordonnées cylindriques

$$r = 4 \qquad \theta = 5\pi/6 \qquad z = -1.$$

$$x = -2\sqrt{3} \qquad y = 2 \qquad z = -1$$

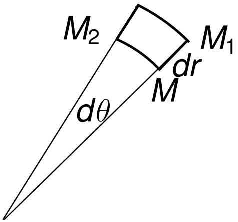
Déterminer les coordonnées cylindriques du point de coordonnées cartésiennes

$$x = -1 \qquad y = 0 \qquad z = -1$$

$$r = 1 \qquad \theta = \pi \qquad z = -1$$

éléments de longueur

distances parcourues
lors de petites variations des coordonnées cylindriques ?



M de coordonnées r, θ, z
M_1 de coordonnées $r + \mathrm{d}r$, θ, z
M_2 de coordonnées r, $\theta + \mathrm{d}\theta$, z
M_3 de coordonnées r, θ, $z + \mathrm{d}z$

éléments de longueur

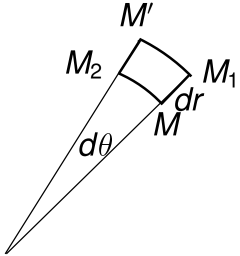
$$MM_1 = \mathrm{d}r$$
$$MM_2 \simeq r\mathrm{d}\theta \text{ (arc de cercle)}$$
$$MM_3 = \mathrm{d}z$$

déplacements élémentaires $\mathrm{d}\vec{l}$

$$\vec{MM_1} = \mathrm{d}r\ \vec{u_r}$$
$$\vec{MM_2} \simeq r\ \mathrm{d}\theta\ \vec{u_\theta}$$
$$\vec{MM_3} = \mathrm{d}z\ \vec{u_z}$$

éléments de surface

surfaces balayées
lors de petites variations des coordonnées cylindriques ?



M de coordonnées r, θ, z
M_1 de coordonnées $r + \mathrm{d}r$, θ, z
M_2 de coordonnées r, $\theta + \mathrm{d}\theta$, z
M_3 de coordonnées r, θ, $z + \mathrm{d}z$

éléments de surface

$$\mathrm{d}^2S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(si } r \text{ et } \theta \text{ varient de d}r \text{ et d}\theta\text{)}$$
$$\mathrm{d}^2S = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \qquad \text{(si } r \text{ et } z \text{ varient de d}r \text{ et d}z\text{)}$$
$$\mathrm{d}^2S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \qquad \text{(si } z \text{ et } \theta \text{ varient de d}z \text{ et d}\theta\text{)}$$

élément de volume

$$\mathrm{d}^3V \simeq r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

coordonnées cylindriques

bornes, fonction et élément de volume exprimés avec r, θ, z

en cylindriques

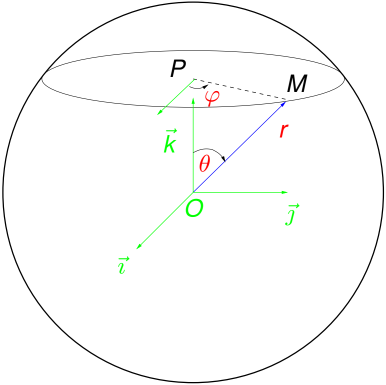
$$\int\int\int_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad = \int\int\int_V f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

exemple 1 : volume du cylindre ?

exemple 2 : moment d'inertie du cylindre homogène par rapport à (Oz) ?

coordonnées sphériques

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ repère orthonormé direct de l'espace.
M de coordonnées cartésiennes (x, y, z). P projeté de M sur $(0z)$.



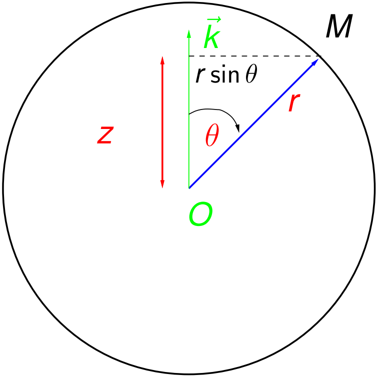
coordonnées sphériques de M :

$$r = ||\vec{OM}|| \qquad \varphi = (\vec{\imath}, \vec{PM}) \qquad \theta = (\vec{k}, \vec{OM})$$

θ est entre 0 et π, φ entre 0 et 2π

les coordonnées

relation entre z, r et θ ?

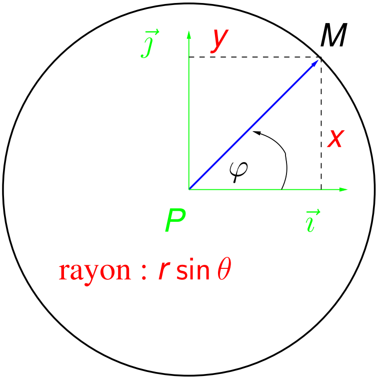


M sur un grand cercle (méridien) de rayon r

$z = r\cos\theta$ (ne dépend pas de φ)

les coordonnées

relations entre x, y, r, θ et φ ?



M sur un cercle horizontal de centre O et de rayon $r\ \sin\theta$ (un parallèle)

$$x = r\ \sin\theta\ \cos\varphi$$
$$y = r\ \sin\theta\ \sin\varphi$$

les coordonnées

relations réciproques ?

pour r : $r^2 = OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$, donc $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

pour θ : $\dfrac{z}{r} = \cos\theta$ et $\theta \in [0;\pi]$ donc $\theta = \arccos(z/r)$

pour φ : $y/x = \tan\varphi$ donc φ et $\arctan(y/x)$ ont la même tangente

$\arctan(y/x) \in [-\pi/2;\pi/2]$: c'est θ si $x > 0$, sinon il faut ajouter $\pm\pi$

on a déjà fait ce genre de calculs deux fois...

exercices

Déterminer les coordonnées cartésiennes du point de coordonnées sphériques

$$r = 2 \qquad \theta = 5\pi/6 \qquad \varphi = \pi/3.$$

$$x = 1/2 \qquad y = \sqrt{3}/2 \qquad z = -\sqrt{3}$$

Déterminer les coordonnées sphériques du point de coordonnées cartésiennes

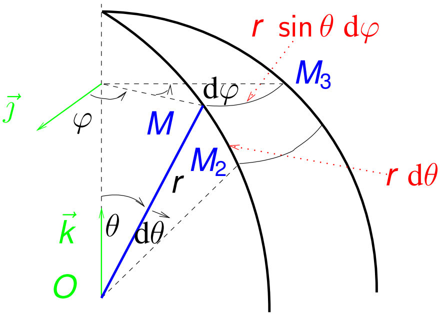
$$x = -1 \qquad y = 0 \qquad z = -1$$

$$r = \sqrt{2} \qquad \theta = 3\pi/4 \qquad \varphi = \pi$$

éléments de longueur

distances parcourues lors de petites variations des coordonnées sphériques ?

M de coordonnées r, θ, φ
M_1 de coordonnées $r + \mathrm{d}r$, θ, φ
M_2 de coordonnées r, $\theta + \mathrm{d}\theta$, φ
M_3 de coordonnées r, θ, $\varphi + \mathrm{d}\varphi$



éléments de longueur

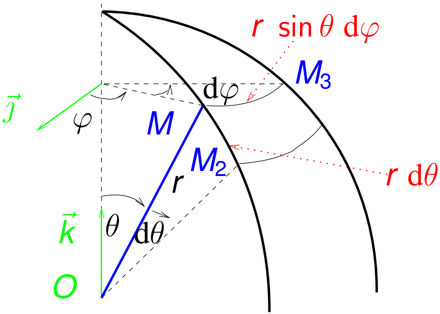
$$MM_1 = \mathrm{d}r$$
$$MM_2 \simeq r\ \mathrm{d}\theta \text{ (arc de grand cercle)}$$
$$MM_3 \simeq r\ \sin\theta\ \mathrm{d}\varphi \text{ (arc de cercle de rayon } r\ \sin\theta)$$

déplacements élémentaires $\vec{\mathrm{d}l}$

$$\vec{MM_1} = \mathrm{d}r\ \vec{u_r} \qquad \vec{MM_2} \simeq r\ \mathrm{d}\theta\ \vec{u_\theta} \qquad \vec{MM_3} \simeq r\ \sin\theta\ \mathrm{d}\varphi\ \vec{u_\varphi}$$

éléments de surface

surfaces balayées lors de petites variations des coordonnées sphériques ?



M de coordonnées r, θ, φ
M_1 de coordonnées $r + dr$, θ, φ
M_2 de coordonnées r, $\theta + d\theta$, φ
M_3 de coordonnées r, θ, $\varphi + d\varphi$

éléments de surface

$$d^2S = r\ dr\ d\theta\ ; \qquad \text{(si } r \text{ et } \theta \text{ varient de } dr \text{ et } d\theta)$$
$$d^2S = r\ \sin\theta\ dr\ d\varphi\ ; \qquad \text{(si } r \text{ et } \varphi \text{ varient de } dr \text{ et } d\varphi)$$
$$d^2S = r^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi \qquad \text{(si } \theta \text{ et } \varphi \text{ varient de } d\theta \text{ et } d\varphi)$$

élément de volume

$$d^3V \simeq r^2\ \sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$

coordonnées sphériques

bornes, fonction et élément de volume exprimés avec r, θ, φ

en sphériques

$$\int\int\int_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \;=\; \int\int\int_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\; r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

exemple 1 : volume de la boule ?

exemple 2 : moment d'inertie d'une boule homogène par rapport à son centre ?

un peu de thermo

gaz parfait $pV = nRT$

quantité de chaleur échangée durant transformation infinitésimale réversible ?
différentes expressions de

la forme différentielle δQ

$$\delta Q = nC_V\,\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V, \quad \text{ou } nC_p\mathrm{d}T - V\mathrm{d}p, \quad \text{ou } T\mathrm{d}S$$

cycle de Carnot : deux isothermes + deux adiabatiques

$1 \to 2$ détente isotherme $\quad T_1 = T_2$ et $pV = nRT_1$ donc $p = nRT_1/V$

$2 \to 3$ détente adiabatique $\quad$ loi de Laplace pV^γ constante donc $TV^{\gamma-1}$ aussi

$3 \to 4$ compression isotherme $\quad T_3 = T_4$ et $pV = nRT_4$ donc $p = nRT_4/V$

$4 \to 1$ compression adiabatique

quantité totale de chaleur échangée sur le cycle ?

un peu de thermo

$1 \to 2$ détente isotherme $\mathrm{d}T = 0$ donc $\delta Q = nC_V\,\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V = p\mathrm{d}V$

comme $p = nRT_1/V$: $\delta Q = nRT_1\mathrm{d}V/V$

on intègre

$$Q_{1\to 2} = \int_{V_1}^{V_2} nRT_1\mathrm{d}V/V = nRT_1\ln(V_2/V_1)$$

$2 \to 3$ détente adiabatique $\delta Q = T\mathrm{d}S = 0$

on intègre

$$Q_{2\to 3} = 0$$

un peu de thermo

et de même

$$Q_{3\to 4} = nRT_4 \ln(V_4/V_3) \qquad \text{et} \qquad Q_{4\to 1} = 0$$

ainsi au final,

$$Q = Q_{1\to 2} + Q_{2\to 3} + Q_{3\to 4} + Q_{4\to 1} = nRT_1 \ln(V_2/V_1) + nRT_4 \ln(V_4/V_3)$$

mais $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$ donc $T_2/T_3 = (V_3/V_2)^{\gamma-1}$
de même $T_4/T_1 = (V_1/V_4)^{\gamma-1}$

et comme $T_1 = T_2$, $T_3 = T_4$,
$(V_3/V_2)^{\gamma-1} = (V_4/V_1)^{\gamma-1}$
ainsi $V_3/V_2 = V_4/V_1$, $V_4/V_3 = V_1/V_2$

quantité totale de chaleur échangée durant le cycle de Carnot

$$Q = nR(T_1 - T_3) \ln(V_2/V_1)$$

Q est l'intégrale curviligne de la forme différentielle δQ sur le cycle

rappel : forme différentielle ω

différentielle :

$$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{d}x \; + \; Q(x,y,z)dy \; + \; R(x,y,z)dz$$

représente une petite quantité, déterminée par de petites variations de x, y, z

exemples :

- différentielle de fonction $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x \; + \; \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \; + \; \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$
- $\omega(x,y) = y\mathrm{d}x \; - \; x\mathrm{d}y$
- $\delta Q_{rev} = C_v(T)\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V$
- δW travail élémentaire

formes exactes

forme exacte

ω est dite exacte si ω est la différentielle d'une fonction f

exemple : $\omega = 2xy\mathrm{d}x \; + \; (x^2 + \sin(y))\mathrm{d}y$?

elle est exacte : prendre $f(x, y) = x^2 y - \cos(y)$

Condition nécessaire pour qu'une forme soit exacte :
si $\omega(x, y, z) = P(x, y, z)\mathrm{d}x \; + \; Q(x, y, z)dy \; + \; R(x, y, z)dz$ est exacte,
on peut trouver f telle que $P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $R = \dfrac{\partial f}{\partial z}$

et d'après le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

(si on n'a que deux variables, une seule équation !)

formes fermées

différentielle fermée

$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ est fermée si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

ainsi,

toute forme exacte est fermée

exemple : la forme $\omega = y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$ est elle exacte ?

non car $\dfrac{\partial y}{\partial y} = 1 \neq \dfrac{\partial(-x)}{\partial x}$

théorème de Poincaré

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x \; + \; \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y \text{ est elle exacte ?}$$

on voit par le critère des dérivées partielle qu'elle est fermée.

et on reconnait dans l'expression de ω les dérivées partielles de $\arctan(y/x)$, qui n'est pas définie si $x = 0$: la forme n'est donc pas exacte sur son ensemble de définition.

théorème de Poincaré

si ω est fermée, sur un ensemble de définition « sans trou » (domaine simplement connexe), alors ω est exacte

Ainsi, $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x \; + \; \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ est bien exacte si on la définit seulement sur le demi-plan $x > 0$, et alors $\omega = \mathrm{d}(\arctan(y/x))$, mais n'est pas exacte sur son ensemble de définition complet (le plan privé de $(0,0)$, ensemble "à trou").

définition de l'intégrale curviligne

on considère :

ω forme différentielle, $\omega = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

γ courbe, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ entre $t = a$ et $t = b$

l'intégrale curviligne de ω sur la courbe γ est

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \; P(x(t), y(t))\, x'(t) \;+\; Q(x(t), y(t))\, y'(t) \; \mathrm{d}t$$

(chemin fermé : si $\gamma(a) = \gamma(b)$: on note alors $\oint_\gamma \omega$)

exemple 1 : retour sur le cycle de Carnot

en pratique, le cycle de Carnot n'est pas réalisable ; en diagramme entropique (T, S), on obtient une courbe de type ellipse, plutôt qu'un rectangle. Si on calcule la chaleur échangée $Q = \oint_{\text{cycle}} \delta Q = \oint_{\text{cycle}} T\,\mathrm{d}S$ sur un cycle elliptique d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T(t) & = & T_a + T_b \cos(2\pi t/\tau) \\ S(t) & = & S_a + S_b \sin(2\pi t/\tau) \end{array} \right.$$

(avec τ la période du cycle)

on obtient donc $Q = \oint_{\text{cycle}} T\,\mathrm{d}S = \int_0^\tau [T_a + T_b \cos(2\pi t/\tau)] \dfrac{2\pi S_b}{\tau} \cos(2\pi t/\tau)\mathrm{d}t$,
soit $\int_0^\tau \frac{2\pi T_a S_b}{\tau} \cos(2\pi t/\tau) + \frac{2\pi T_b S_b}{\tau} \cos^2(2\pi t/\tau)\ \mathrm{d}t$, soit encore
$\int_0^\tau \frac{2\pi T_a S_b}{\tau} \cos(2\pi t/\tau) + \frac{2\pi T_b S_b}{2\tau} + \frac{2\pi T_b S_b}{2\tau} \cos(4\pi t/\tau)\ \mathrm{d}t$.

Les cosinus qui apparaissent sont de période τ et $\tau/2$, donc leur intégrale est nulle, et finalement $Q = \dfrac{2\pi T_b S_b}{2\tau}\tau = \pi T_b S_b$...ce qui correspond à l'aire de l'ellipse.

exemple 2

Intégrer $x\mathrm{d}y \;-\; y\,\mathrm{d}x$ sur le cercle C de centre O et rayon R

Ici on peut prendre $x(t) = R\cos(t)$ et $y(t) = R\sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$,

donc $\mathrm{d}x = -R\sin(t)\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}y = R\cos(t)\mathrm{d}t$,

donc l'intégrale vaut $\int_0^{2\pi} R^2\cos^2(t) + R^2\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R^2\mathrm{d}t = 2\pi R^2$.

Un autre exemple, pas très différent :

intégrer $\dfrac{-y\mathrm{d}x \;+\; x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ sur le cercle C de centre O et rayon R.

exemple 3

intégrale de $\omega = (y+1)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$ sur le segment $[AB]$ avec $A(-1,0)$ et $B(1,0)$.

On décrit le segment par les équations $x(t) = -1 + 2t$, $y(t) = 0$ avec $t \in [0,1]$,

donc $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = 0\mathrm{d}t$,

et l'intégrale vaut donc $\int_{[AB]} \omega = \int_0^1 1 \times 2\mathrm{d}t + (-1+2t-0) \times 0\mathrm{d}t = \int_0^1 2\mathrm{d}t = 2$.

intégrale de la même forme ω sur le demi-cercle supérieur C, de centre O et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique :

On décrit C par les équations $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$ avec $t \in [0,\pi]$,

donc $\mathrm{d}x = -\sin(t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = \cos(t)\mathrm{d}t$,

et l'intégrale vaut donc $\int_C \omega = \int_0^\pi (\sin(t)+1)(-\sin(t))\mathrm{d}t + (\cos(t) - \sin(t))\cos(t)\mathrm{d}t =$
$\int_0^\pi (-\sin^2(t) + \cos^2(t) + \sin(t)\cos(t) - \sin(t))\mathrm{d}t = -2$

Les résultats sont opposés : ce n'est pas un hasard, comme on va le voir.

exemple 4

intégrer la forme différentielle "travail élémentaire" $\omega = \vec{P}.\vec{dl}$ du poids $\vec{P} = -mg\vec{k}$ d'un objet en chute libre d'un point A vers un point B.

En coordonnées cartésiennes le vecteur déplacement élémentaire est $\vec{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$.
(en coordonnées polaires on aurait $\vec{dl} = dr\vec{u_r} + rd\theta\vec{u_\theta}$, en cylindriques $\vec{dl} = dr\vec{u_r} + rd\theta\vec{u_\theta} + dz\vec{k}, \ldots$)

Donc ici $\omega = \vec{P}.\vec{dl} = -mg\mathrm{d}z$.
On peut simplement paramétrer la courbe par z entre z_A et z_B, donc $\int_{[AB]} \omega = \int_{z_A}^{z_B} -mg\mathrm{d}z = -mgz_B + mgz_A$.

S'il s'agit d'une chute, B est en dessous de A et ce nombre est positif : le poids favorise le déplacement.

intégrale d'une forme exacte

Si γ est un courbe et ω un forme exacte, avec $\omega = \mathrm{d}F$

alors

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \mathrm{d}F = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

donc l'intégrale d'une forme exacte ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée, pas du chemin suivi, des états intérmédiaires. En particulier :

si ω exacte

$\oint_\gamma \omega = 0$ l'intégrale d'une forme exacte sur un chemin fermé est nulle

exemple : $\mathrm{d}S = \delta Q / T$ est exacte

exemple : si on reprend l'exemple 3, $\omega = (y+1)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$ est exacte, c'est la différentielle de $F(x,y) = xy + x - y^2$, donc l'intégrale entre A et B, quel que soit le chemin suivi, vaut

$$F(B) - F(A) = F(1,0) - F(-1,0) = (0 + 1 - 0^2) - (0 - 1 - 0^2) = 1 + 1 = 2$$

gradient d'une fonction

on définit le

gradient de $f(x,y)$

$$\vec{\text{grad}}(f) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

(et de même pour une fonction de 3 variables)

k fixé : $f(x,y) = k$ est l'équation d'une courbe
$(x(t), y(t))$ paramétrage de la courbe : pour tout t $f(x(t), y(t)) = k$

en dérivant : $x'(t)\dfrac{\partial f}{\partial x} + y'(t)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, donc le vecteur vitesse et le gradient $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux : le gradient est un vecteur normal à la surface.

interprétation géométrique

petit déplacement dans le sens du gradient : de (x, y) vers (x', y'),
on prend $x' = x + t\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $y' = y + t\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ($t > 0$ petit),
alors $f(x', y') = f(x, y) + t||\vec{\text{grad}}(F)||^2$: le gradient pointe dans le sens des f croissants

interprétation géométrique

si $f(x, y) = k$ est une courbe, $\vec{\text{grad}}(f)$ est orthogonal à la courbe et pointe dans le sens des f croissants

si $f(x, y, z) = k$ est une surface, $\vec{\text{grad}}(f)$ est orthogonal à la surface et pointe dans le sens des f croissants

exemple 1 : cercle $x^2 + y^2 = 1$. Le gradient en (x, y) vaut $(2x, 2y)$: c'est le vecteur $2\vec{OM}$ qui est bien orthogonal au cercle et pointe vers l'extérieur.

exemple 2 : plan $2x + 3y - z = 4$. Le gradient est constant, et vaut $(2, 3, -1)$. On retrouve l'expression d'un vecteur normal au plan vu en terminale et en S1 !

circulation d'un champ de vecteurs

circulation d'un champ de vecteurs :

la circulation du champ de vecteurs $\vec{A} = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$ le long de γ est définie comme l'intégrale curviligne sur γ de $\vec{A}.\vec{dl}$

champ de gradient

si $\vec{A}$ est un champ de gradient ($\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(F)$),
la circulation de $\vec{A}$ ne dépend pas du chemin suivi

En effet $\vec{A}.\vec{dl} = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$.
Dire que $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(F)$ revient exactement à dire que $\vec{A}.\vec{dl} = \mathrm{d}F$, donc $\vec{A}$ est un champ de gradient si et seulement si $\vec{A}.\vec{dl}$ est exacte.

exemple : en mécanique $\vec{F}.\vec{dl}$ est exacte ou non, selon que la force est conservative ou non ; cela revient à demander que le travail (la circulation de $\vec{F}$) ne dépendent pas du chemin suivi.

formule de Green-Riemann

D domaine de bord γ (γ parcouru en gardant D à gauche)

formule de Green-Riemann

$$\oint_\gamma P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

en particulier si
$P(x,y) = -y$ et $Q(x,y) = 0$
ou bien
$P(x,y) = 0$ et $Q(x,y) = x$
ou bien
$P(x,y) = -y/2$ et $Q(x,y) = x/2$

on en déduit l'

aire de D

$$\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_\gamma -y\mathrm{d}x = \oint_\gamma x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_\gamma (-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$$

espace vectoriel

espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

c'est un ensemble E muni d'une opération d'addition et d'une opération de multiplication par un réel

exemple 1 : $\mathbb{R}^2$, les vecteurs du plan

exemple 2 : $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$

exemple 3 : H l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$

combinaisons linéaires

combinaison linéaire :

c'est une expression $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs de E et λ et μ réels

(idem avec 3 vecteurs $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$, ou plus...)

exemple 1 : le vecteur $\vec{u} = (2, -3, 5)$ dans $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des trois vecteurs $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$: $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$

Par définition, tout espace vectoriel E est stable par combinaisons linéaires

exemple 2 : les solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ sont les fonctions $y(x) = Ae^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + Be^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$: ce sont des combinaisons linéaires des deux solutions $y_1(x) = e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)$ et $y_2(x) = e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$

bases

base :

toute famille $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n})$ telle que tout vecteur de E s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire des (u_i) est appelée base de E

exemple 1 : $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de $\mathbb{R}^3$

exemple 2 : y_1 et y_2 forment une base de H

exemple 3 : $(1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ forme une base (infinie) de l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels

exemple 4 : trouver une base de l'ensemble des solutions de l'équation
$$2y'' + 2y' - y = 0$$

dimension d'un espace vectoriel

dimension :

la dimension d'un espace vectoriel est le nombre d'éléments de l'une de ses bases

exemple 1 : $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, $\mathbb{R}^3$ de dimension 3

exemple 2 : l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre et sans second membre est de dimension 2

exemple 3 : $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie

exemple 4 : $\mathbb{R}_n[X]$ ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est de dimension $n+1$

application linéaire

application linéaire :

si f est une application entre deux espaces vectoriels E et F, on dit que f est linéaire si l'image de toute combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images, c'est-à-dire si : $f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=\lambda f(\vec{u})+\mu f(\vec{v})$

exemple 1 : l'identité Id est linéaire sur tout espace vectoriel

exemple 2 : toute rotation plane de centre O, ou de l'espace autour d'un axe passant par O

exemple 3 : la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$

exemple 4 : l'application qui à une fonction f continue associe $\int_0^1 f$

matrices

matrice = tableau rectangulaire de nombres

on utilise surtout deux cas particuliers :

les matrices carrées

$M_n(\mathbb{R})$ matrices à n lignes et n colonnes

les vecteurs

matrices à n lignes et 1 colonne

addition

on peut additionner deux matrices ayant même nombre de lignes et de colonnes

exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

multiplication

on peut multiplier la matrice M par la matrice N si

le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N

alors MN a

autant de lignes que M et de colonnes que N

et le coefficient de MN en ligne i, colonne j est obtenu en calculant le

produit scalaire de la ligne i de M par la colonne j de N

en particulier :

si $M \in M_n(\mathbb{R})$, $N \in M_n(\mathbb{R})$ alors $MN \in M_n(\mathbb{R})$

si $M \in M_n(\mathbb{R})$, X vecteur colonne à n lignes, alors MX vecteur colonne à n lignes

multiplications

$$\text{exemple 1 : } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{exemple 2 : } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

attention en général $MN \neq NM$

matrices particulières

matrice nulle : tous les coefficients nuls

elle est notée 0_n ou simplement 0

$0A = A0 = 0$ pour toute matrice carrée A de même taille

matrice identité : des 1 sur la diagonale principale, des 0 ailleurs

elle est notée I_n ou simplement I

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$IA = AI = A$ pour toute matrice carrée A de même taille

exemple : matrice de transfert d'un système optique

Relation entre $\begin{pmatrix} h_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$ hauteur et angle d'entrée d'un rayon entrant, et $\begin{pmatrix} h_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$ hauteur et angle à la sortie ? $\begin{pmatrix} h_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} h_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$ avec M matrice du système optique

Pour un espace vide de longueur d : $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour un miroir plan : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, pour un miroir sphérique de rayon R : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R & -1 \end{pmatrix}$, pour une lentille : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$,

pour un assemblage : on fait le produit des matrices !

exemple : matrice d'inertie d'un solide S

on a défini I_x, I_y, I_z moments d'inertie par rapport aux axes (Ox), (Oy), (Oz).

on définit les produits d'inertie $P_{xy} = \int_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $P_{yz} = \int_S yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ et $P_{xz} = \int_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

Alors matrice d'inertie : $\begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \\ \end{pmatrix}$

exemple : trois masses et deux ressorts

mouvement horizontal de trois masses m_1, m_2, m_3 attachées par des ressorts de raideurs k_1 et k_2.

équations du mouvement reliant x_1, x_2, x_3 à leurs dérivées ?

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1/m_1 & k_1/m_1 & 0 \\ k_1/m_2 & -(k_1+k_2)/m_2 & k_2/m_2 \\ 0 & k_2/m_3 & -k_2/m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + L \\ x_2 \\ x_3 - L \end{pmatrix}$$

L'étude de cette matrice (voir cours de S4...) permettra de voir que tout mouvement peut être vu comme la combinaison linéaire de trois mouvements fondamentaux, et de déterminer ceux-ci.

matrice d'une application linéaire

si f est une application linéaire d'un espace de dimension 3 dans un espace de dimension 3, si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de cet espace,

matrice de f :

la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est la matrice 3×3 dont les trois colonnes correspondent respectivement aux vecteurs $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$ et $f(\vec{k})$.

exemple 1 : la matrice de l'application identité est I_3

exemple 2 : la matrice de la symétrie d'axe (Ox) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

inverse

matrice inversible

M est inversible si il existe N telle que $MN = I$
alors on note $N = M^{-1}$,
et $MM^{-1} = M^{-1}M = I$

exemple 1 : I est inversible, et $I^{-1} = I$

exemple 2 : 0 n'est pas inversible

exemple 3 : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

matrices et systèmes linéaires

tout système de n équations à n inconnues

$$\left(\text{par exemple} \begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y = -1 \\ -x - y + 2z = 3 \end{cases} \right)$$

est équivalent à une équation matricielle $AX = B$ avec

1. A la matrice des coefficients du système $\left(\text{ici } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$
2. X le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
3. B le vecteur colonne des seconds membres $\left(\text{ici } B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

résolution d'un système à matrice inversible

si A n'est pas inversible : aucune solution, ou bien une infinité

si A est inversible : unique vecteur solution

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

utilisation ?

si on sait calculer A^{-1}, on résoud le système

si on sait résoudre le système pour $B = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on sait inverser A

résolution : exemple

$$\text{inverser la matrice } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{on résoud } \begin{cases} 3x & + & 2y & - & z & = & x' \\ x & + & y & & & = & y' \\ -x & - & y & + & 2z & = & z' \end{cases}.$$

$$\text{on trouve } \begin{cases} x' & - & 3/2y' & + & 1/2z' & = & x \\ -x' & + & 5/2y' & - & 1/2z' & = & y \\ 0 & + & 1/2y' & + & 1/2z' & = & z \end{cases}$$

$$\text{et donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

définition du déterminant

determinant

c'est l'unique application det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui vérifie

- linéarité par rapport à chaque colonne
- si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul
- $\det(I) = 1$

on note $\det(A)$ ou $|A|$ le déterminant d'une matrice A

propriété fondamentale

M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$

propriétés du déterminant

- déterminant d'une matrice 1×1 : $\det(a) = |a| = a$
- **développement selon une colonne** :
  A_{ij} matrice obtenue à partir de A en enlevant la ligne i et la colonne j.
  Alors $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$
- **déterminant d'une matrice** 2×2 : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- déterminant d'une matrice triangulaire : produit des termes de la diagonale
- **déterminant inchangé si on remplace la colonne** C_i **par** $C_i + \lambda C_j$ (λ réel quelconque, $i \neq j$)
- déterminant change de signe si on échange deux colonnes
- le déterminant est multiplié par λ si on multiplie une colonne par λ
- tout ce qui précède est valable en remplaçant "colonne" par "ligne"

exemple

$$\text{calculer} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

on trouve 2

résolution d'un système

système $AX = B$
on suppose $\det(A) \neq 0$: le système admet une solution unique X, on cherche ses coordonnées x_i

on note A_i la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par la matrice B

alors $B = AX = \sum_{i=1}^{n} x_i C_i$, donc $\det(A_i)$ est la somme de $x_i \det(A)$ et de $n-1$ déterminants nuls (car ils ont deux colonnes égales) : $\det(A_i) = x_i \det(A)$

résolution d'un système

si $\det(A) \neq 0$, le système $AX = B$ admet une solution unique,
dont les coordonnées sont $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$
avec A_i la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par la matrice B

exemples

a étant un réel fixé, dire si le système admet une unique solution (x, y, z), résoudre
$\begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ x - y + az = 2 \\ ax - y + z = -1 \end{cases}$ et si oui la déterminer.

on trouve un déterminant du système $d = (a-1)(a^2+a+4)$ et s'il est non nul, on trouve x, y et z comme quotient d'un déterminant par d

exemples

$R \neq 0$, F, m, g, a étant connus, déterminer α à partir du système :

$$\begin{cases} R\cos\alpha & - & F\sin\alpha & = & mg \\ F\cos\alpha & + & R\sin\alpha & = & ma \end{cases}$$

le déterminant du système est $R^2 + F^2 > 0$

on trouve $\cos\alpha = \dfrac{m(Rg + Fa)}{R^2 + F^2}$,

et $\sin\alpha = \dfrac{m(Ra - Fg)}{R^2 + F^2}$

calcul de l'inverse d'une matrice

on note $\Gamma_{i,j}$ le produit de $(-1)^{i+j}$ par le déterminant de la matrice obtenue en enlevant la i-ème ligne et la j-ième colonne de A (ce sont les cofacteurs de A)

alors si A est inversible,

$\dfrac{\Gamma_{j,i}}{\det(A)}$ est le coefficient de la ligne i et colonne j de A^{-1}

matrice 2×2

$$\text{inverser} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{on trouve } \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

une matrice 3×3

$$\text{inverser} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{on trouve} \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

l'approximation des petits angles :

On considère l'équation du pendule en mécanique : $l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

Si on veut exprimer θ en fonction du temps ? On ne sait pas trouver de formule ! !

Mais pour de petits angles, $\sin\theta \simeq \theta$. Et l'équation devient $l\ddot{\theta} + g\theta = 0$: c'est une équation linéaire du second ordre, on sait la résoudre :

$$\theta(t) = a\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + b\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t),$$

soit encore $\theta(t) = A\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t - \varphi)$

(avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = \arctan(b/a)$, $+\pi$ si $a < 0$)

On a donc, en remplaçant une fonction comme $\sin$ par un polynôme simple ($\sin\theta \simeq \theta$) pu trouver une formule approchée pour une fonction solution $\theta(t)$ que l'on ne sait pas exprimer du tout dans le cas général.

un autre exemple d'approximation :

$$\text{Soit la fonction } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

On calcule quelques valeurs, ainsi que les valeurs de de $1 + x/2$ et de $1 + x/2 + 3x^2/8$:

x	$f(x)$	$1 + x/2$	$1 + x/2 + 3x^2/8$
1	$+\infty$	1.5	1.875
0.5	1.41214	1.25	1.34375
0.1	1.05409	1.05	1.05375
0.01	1.0050378	1.005	1.005375
0.001	1.000500375	1.0005	1.000500375

On voit que pour x petit (proche de 0), $1 + x/2$ est une bonne approximation de $f(x)$, et $1 + x/2 + 3x^2/8$ une encore meilleure.

Pour x moins proche de 0, c'est nettement moins vrai.

application au dipôle :

On place en $A(-a,0)$ une charge $-q$, et en $B(a,0)$ une charge q.
On veut calculer le potentiel $V(M)$ en un point M de coordonnées polaires r et θ.

Les coordonnées cartésiennes de M sont $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, donc
$AM = r\sqrt{1+2\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{a^2}{r^2}}$, $BM = r\sqrt{1-2\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{a^2}{r^2}}$,

$$\text{et donc } V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{a^2}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{a^2}{r^2}}}\right).$$

C'est une formule exacte mais compliquée ! Difficile ensuite de, par exemple, en calculer la dérivée (pour calculer le champ électrique associé)...

Si $r >> a$, $2\frac{a}{r}\cos\theta - \frac{a^2}{r^2} \simeq 2\frac{a}{r}\cos\theta$ et $-2\frac{a}{r}\cos\theta - \frac{a^2}{r^2} \simeq -2\frac{a}{r}\cos\theta$, donc

$$V(M) \simeq \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{a}{r}\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{a}{r}\cos\theta}}\right)$$

Mais $x = \frac{a}{r}$ est petit : avec l'approximation $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \simeq 1 + x/2$,
$V(M) \simeq \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r}((1-\frac{a}{r}\cos\theta) - (1+\frac{a}{r}\cos\theta))$, et ainsi :

$$V(M) \simeq \frac{qa\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

développement limité

Le développement limité d'ordre n d'une fonction f en x_0 est une expression $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$, avec les a_i constants, et $\epsilon(x)$ une fonction qui tend vers 0 en x_0.

On peut aussi noter le reste $(x - x_0)^n\ \epsilon(x)$ sous la forme $\circ((x - x_0)^n)$, ou encore, par abus, sous la forme ...

Le plus souvent, on utilisera pour une fonction f son

développement limité en 0 d'ordre n

de la forme $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + ...$

Ce développement n'a de sens que si x est petit.
Alors, chacun des termes est plus petit (quand x tend vers x_0) que le précédent et rend l'approximation plus précise.

exemple : le développement limité d'ordre 1 en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est $1 + x/2 \ldots$,
le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est $1 + x/2 + 3x^2/8 + \ldots$

formule de Taylor

formule de Taylor :

une fonction $n+1$ fois dérivable admet pour développement limité d'ordre n en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

en particulier, en 0 on obtient la

formule de Taylor-Young :

une fonction $n+1$ fois dérivable admet pour développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Ainsi, le développement limité d'ordre 0 en 0 d'une fonction continue est $f(x) = f(0)$: cela revient à remplacer la fonction par sa valeur en 0.

et le développement limité d'ordre 1 en 0 d'une fonction dérivable est $f(x) = f(0) + f'(0)x$: c'est l'équation de sa tangente en 0.

trois exemples simples :

la valeur en 0 de la dérivée n-ième de l'exponentielle vaut toujours 1, donc :

exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

de même la valeur en 0 de la dérivée n-ième du cosinus vaut alternativement $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$ donc

cosinus :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

et de même :

sinus :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

applications aux calculs de limite :

exemple 1 : on souhaite déterminer la limite en 0 de $\dfrac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$".
Difficile de comparer les valeurs d'un cosinus, d'une exponentielle ; et aucune formule exacte ne permet de simplification de l'expression.

Mais on cherche la limite en 0 : pas besoin de formule exacte, il suffit de "simplifier" les expressions pour x proche de 0 !

On va se contenter de prendre une expression avec 2 termes non nuls, donc :

on remplace $\cos(x)$ par $1 - x^2/2 + ...$ (DL d'ordre 2)

et e^{x^2} par $1 + x^2 + ...$

Ainsi, $$\frac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1} = \frac{1-(1-x^2/2+\dots)}{(1+x^2+\dots)-1} = \frac{x^2/2+\dots}{x^2+\dots}.$$

Cette expression peut se simplifier par x^2 : $\dfrac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1} = \dfrac{1/2+\dots}{1+\dots}$
...et la limite cherchée est donc $1/2$.

applications aux calculs de limite :

exemple 2 : on souhaite déterminer la limite en 0 de $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

On commencera par essayer de se ramener à une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$", en additionnant les deux fractions : $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \sin(x)}{x}$

On peut alors utiliser un développement limité d'ordre 3, à deux termes non nul, de sin : $\sin(x) = x - x^3/6 + \dots$.

Ainsi, $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - (x - x^3/6 + \dots)}{x} = \dfrac{x^3/6 + \dots}{x}$.

En simplifiant l'expression par x, on lève l'indétermination : $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2/6 + \dots}{1}$, et la limite est donc nulle.

DL d'une puissance

pour tout réel α et tout entier positif k on voit par récurrence que

$$\frac{\mathrm{d}^k(1+x)^\alpha}{\mathrm{d}x^k} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \text{ donc}$$

pour une puissance α :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ \ldots$$

si $\alpha = -1$ on obtient en particulier

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots$$

de même si $\alpha = 1/2$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \ldots$$

DL d'une somme, d'un produit

DL d'une somme :

le développement limité d'ordre n en 0 de $f+g$ est la somme du développement limité d'ordre n en 0 de f et du développement limité d'ordre n en 0 de g

exemple : le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\sin(x)+\sqrt{1+x}$ est
$$1+3x/2-x^2/8+\dots$$

DL d'un produit :

pour déterminer le développement limité d'ordre n en 0 de fg il suffit de multiplier le développement limité d'ordre n en 0 de f par celui de g, **en ne gardant que les termes de dégré inférieur ou égal à** n

exemple : le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+x}\cos(x)$ est
$$1+x/2-5x^2/8+\dots$$

exemple : le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x^2\exp(x)$ est $x^2+x^3+x^4/2+\dots$

DL d'une composée

dans un développement limité de $f(x)$, on peut remplacer x par n'importe quelle expression qui tend vers 0, développer, et ne garder que les termes de degré inférieur ou égal à l'ordre souhaité

exemple 1 : le DL d'ordre 3 en 0 de $\cos(2x)$ est $1 - (2x)^2/2 + \ldots = 1 - 2x^2 + \ldots$

exemple 2 : le DL d'ordre 4 en 0 de $\exp(x^2)$ est $1 + x^2 + x^4/2 + \ldots$

exemple 3 : le DL d'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+x+3x^2}$ est $1 - (x+3x^2) + (x+3x^2)^2/2 + \ldots$ soit $1 - x - 3x^2 + x^2 + 6x^3 + 9x^4 + \ldots$.

Mais, étant partis d'un DL d'ordre 2 de $1/(1+x)$, les termes de degré 3 et 4 ne sont pas significatifs, et ne correspondent pas aux termes que l'on obtiendrait en calculant un DL d'ordre 3 ou 4.

Finalement on obtient le DL d'ordre 2 en 0 : $1 - x - 2x^2 \ldots$.

DL d'un quotient

DL d'un quotient :

si $g(0) \neq 0$, le développement limité d'ordre n de $f(x)/g(x)$ est le quotient de la division selon les puissances croissantes du développement limité d'ordre n de f par le développement limité d'ordre n de g.

exemple : le DL d'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+x+3x^2}$ est $1 - x - 2x^2 + \ldots$ car

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|rrrrrrr}
1 & & & & & & & & 1 & + & x & + & 3x^2 \\
\cline{9-13}
1 & + & x & + & 3x^2 & & & & 1 & - & x & - & 2x^2 \\
\cline{1-5}
 & - & x & - & 3x^2 & & & & & & & & \\
 & - & x & - & x^2 & + & \ldots & & & & & & \\
\cline{2-7}
 & & & - & 2x^2 & + & \ldots & & & & & & \\
 & & & - & 2x^2 & + & \ldots & & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & \ldots & & & & & &
\end{array}
$$

exemple : le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\tan(x)$ est $x + x^3/3 + \ldots$

DL d'une primitive

si $F'(x) = f(x)$, on obtient le développement limité d'ordre n de F en primitivant le développement limité d'ordre $n-1$ de $f(x)$ et en prenant pour constante $F(0)$.

exemple : le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$ est $x - x^2/2 + x^3/3 + \ldots$

exemple : le développement limité d'ordre 5 en 0 de $\arctan(x)$ est $x - x^3/3 + x^5/5 + \ldots$

DL en l'infini

En utilisant la quantité $1/x$, on peut aussi utiliser les développements limités pour déterminer des limites et asymptotes en l'infini.

Par exemple, pour trouver la droite asymptote en $+\infty$ à la courbe $C : y = \sqrt{x^2+x+1}$, on aimerait remplacer la racine par des fonctions plus simples à manipuler...on va utiliser un développement limité.

On a vu que **si** u **est proche de 0**, $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 - u^2/8 + \dots$.

On va ici faire apparaître des termes $u = 1/x$, qui tendent bien vers 0 si x tend vers l'infini, en mettant x^2 en facteur dans la racine : $y = x\sqrt{1 + (1/x + 1/x^2)}$.

En utilisant le développement limité : $y = x(1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) - \frac{1}{8}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})^2 + \dots)$

En développant et en ne gardant pas les termes en $1/x^3$, $1/x^4$, ... :

$y = x(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^2} + \dots)$ soit finalement $y = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x^2} + \dots$.

Si on considère la droite $D : y = x + 1/2$, on constate donc que la différence de hauteur entre un point de C et un point de D vaut approximativement $\frac{3}{8x^2}$: elle est positive et tend vers 0 en $+\infty$.

Par conséquent, D est asymptote à C, et C est située au dessus de D.

gradient : rappels

on définit le

gradient de $f(x,y)$

$$\vec{\text{grad}}(f) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

(et de même pour une fonction de 3 variables)

interprétation géométrique

si $f(x,y) = k$ est une courbe, $\vec{\text{grad}}(f)$ est orthogonal à la courbe et pointe dans le sens des f croissants

si $f(x,y,z) = k$ est une surface, $\vec{\text{grad}}(f)$ est orthogonal à la surface et pointe dans le sens des f croissants

opérateur nabla

on définit l'opérateur

nabla

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

on applique l'opérateur à une fonction : $\vec{\nabla}(f) = \vec{\text{grad}}(f)$

produit scalaire ou vectoriel avec un champ de vecteurs : divergence et rotationnel !

divergence

$\vec{A} = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$ champ de vecteurs, on définit sa

divergence

$$\mathrm{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

la divergence en (x, y, z) est un nombre qui représente le flux du champ à travers une surface élémentaire autour d'un point (x, y, z), divisé par la surface en question ; en particulier, si le champ représente un mouvement de particules, une divergence positive indique que les particules s'éloignent de (x, y, z) (champ divergent), une divergence négative qu'elles s'y accumulent (champ convergent), une divergence nulle un bilan nul

formule de Green-Ostrogradsky

on considère une surface fermée S, et V son intérieur

flux sortant

le **flux sortant** d'une surface S est $\int\int_S \vec{A}.\mathrm{d}^2\vec{S}$,
$\mathrm{d}^2\vec{S}$ vecteur de norme $\mathrm{d}^2 S$, orthogonal à la surface et orienté vers l'extérieur

le calcul du flux, qui correspond à un bilan au niveau de la surface S, peut aussi être fait globalement sur V ; on obtient la

formule de Green-Ostrogradsky

$$\int\int_S \vec{A}.\mathrm{d}^2\vec{S} = \int\int\int_V \mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}^3 V$$

le flux sortant à travers une surface est l'intégrale volumique de la divergence

exemple : lien entre surface et volume d'une boule/sphère

on considère S une sphère de rayon R, V la boule correspondante, et le champ $\vec{OM}$

alors :

$\mathrm{d}^2\vec{S} = \vec{OM}/R\mathrm{d}^2S$, donc $\vec{OM}.\mathrm{d}^2\vec{S} = R\mathrm{d}^2S$, et le flux de $\vec{OM}$ à travers S vaut $4\pi R^2 \times R$

$\mathrm{div}(\vec{OM}) = 3$, l'intégrale volumique de la divergence vaut $3 \times 4/3\pi R^3$

la formule de Green-Ostrogradsky est vérifiée...

exemple : équation de continuité

fluide de masse volumique ρ, champ de vitesse $\vec{V}$; on considère le champ $\rho\vec{V}$

flux par unité de temps à travers S : quantité de matière sortant du volume V correspondant : $\int\int_S \rho\vec{V}.\mathrm{d}^2\vec{S} = \int\int\int_V -\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}^3V$

théorème de Green-Ostrogradsky : $\int\int_S \rho\vec{V}\,.\,\mathrm{d}^2\vec{S} = \int\int\int_V \mathrm{div}(\rho\vec{V})\,\mathrm{d}^3V$

donc : $-\int\int\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}^3V = \int\int\int_V \mathrm{div}(\rho\vec{V})\,\mathrm{d}^3V$

ceci étant valable pour tout volume V, on en déduit l'

équation de continuité

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \mathrm{div}(\rho\vec{V})$$

écoulement stationnaire d'un fluide incompressible : $\mathrm{div}(\vec{V}) = 0$

le rotationnel

$\vec{A} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$ champ de vecteurs, on définit son

rotationnel

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\,\vec{\imath} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\,\vec{\jmath} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,\vec{k}$$

le rotationnel en (x,y,z) représente le vecteur-rotation du champ : sa direction correspond à l'axe de rotation, sa norme à la vitesse de rotation

exemples

- $\vec{A}_1 = \vec{\imath}$
- $\vec{A}_2 = x\vec{\imath}$
- $\vec{A}_3 = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$
- $\vec{A}_4 = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$
- $\vec{A}_5 = (x - 2y)\vec{\imath} + (2x + y)\vec{\jmath}$

caractérisation des champs de gradient

d'après le théorème de Schwarz, si $\vec{A} = \vec{\text{grad}}(f)$ est un champ de gradient (i.e si $\vec{A}$ dérive d'un potentiel), on a $\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{0}$

on remarque en fait que $\vec{A}.\vec{dl}$ est fermée si et seulement si $\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{0}$, et donc :

caractérisation des champs de gradient

$\vec{A}$ est un champ de gradient si et seulement si $\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{0}$

formule de Stokes

on considère une courbe fermée C délimitant une surface S

la circulation d'un champ de long de C est égale au flux du rotationnel à travers S

formule de Stokes

$$\oint_C \vec{A}.\vec{dl} = \int\int_S \vec{rot}(\vec{A}).\vec{d^2S}$$

on retrouve le fait que si $\vec{A}$ est un champ de gradient (dérive d'un potentiel) alors sa circulation sur un chemin fermé est nulle

potentiel-vecteur

pour tout champ $\vec{A}$, $\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A})) = 0$

réciproquement, si $\vec{B}$ est un champ de divergence nulle, on peut l'écrire comme un rotationnel :

$\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}(\vec{A})$, en imposant de plus que $\mathrm{div}(\vec{A}) = \vec{0}$

laplacien

soit $F(x, y, z)$ une fonction ; alors le

laplacien de F

est la divergence du gradient : $\Delta F = \mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}}(F)) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}(F) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}$

il mesure la dispersion d'un champ dérivant d'un potentiel à l'aide des dérivées secondes du potentiel

équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T$$, avec T température, t temps, D diffusivité thermique du milieu

barre conductrice de chaleur, une extrémité est en contact avec une source froide et l'autre avec une source chaude

alors gradient de température $\vec{\mathrm{grad}}(T)$ orienté de la source froide vers la source chaude

la chaleur circule en sens inverse :

- en un point où le laplacien est nul, il entre autant de chaleur qu'il n'en sort, et la température ne varie pas ;
- en un point où le laplacien est strictement positif, il entre plus de chaleur qu'il n'en sort, la température croît ;
- en un point où le laplacien est strictement négatif, il sort plus de chaleur qu'il n'en rentre, la température décroît

en coordonnées cylindriques

pour une fonction $F(r, \theta, z)$ et un champ $\vec{A} = A_r \vec{u_r} + A_\theta \vec{u_\theta} + A_z \vec{u_z}$

gradient

$$\vec{\text{grad}}(F) = \frac{\partial F}{\partial r}\, \vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\, \vec{u_\theta} + \frac{\partial F}{\partial z}\, \vec{u_z}$$

divergence

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

rotationnel

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \vec{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) \vec{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \vec{u_z}$$

laplacien

$$\Delta F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

en coordonnées sphériques

pour une fonction $F(r,\theta,\varphi)$ et un champ $\vec{A} = A_r\vec{u_r} + A_\theta\vec{u_\theta} + A_\varphi\vec{u_\varphi}$

gradient

$$\vec{\mathrm{grad}}(F) = \frac{\partial F}{\partial r}\,\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\,\vec{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\,\vec{u_\varphi}$$

divergence

$$\mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial\varphi}$$

rotationnel

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A}) =$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{u_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u_\varphi}$$

laplacien

$$\Delta F = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rF)}{\partial r^2}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}$$

formules utiles

f et g fonctions, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ champs de vecteurs
alors

- $\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A})) = 0$
- $\mathrm{div}(f\vec{A}) = f\,\mathrm{div}(\vec{A}) + \vec{A}.\vec{\mathrm{grad}}(f)$
- $\mathrm{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A}) - \vec{A}.\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B})$
- $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}(f)) = \vec{0}$
- $\vec{\mathrm{rot}}(f\vec{A}) = f\,\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A}) - \vec{A} \wedge \vec{\mathrm{grad}}(f)$
- $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A})) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{A})) - \Delta\vec{A}$
- $\vec{\mathrm{grad}}(fg) = f\,\vec{\mathrm{grad}}(g) + g\,\vec{\mathrm{grad}}(f)$
- $\Delta(fg) = f\,\Delta g + 2fg + g\,\Delta f$
- $\int f.\vec{dl} = -\int\int_S \vec{\mathrm{grad}}(f) \wedge \vec{dS}$
- $\int\int_S f.\vec{dS} = \int\int\int_V \vec{\mathrm{grad}}(f).dV$
- $\int\int_S \vec{B} \wedge \vec{dS} = -\int\int\int_V \vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}).dV$