exercices théoriques

1. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $e^x - 2e^{-x} = -2$
(b) $\ln|x-1| + \ln|x+1| = 0$
(c) $\cos\ x = \frac{1}{2}$
(d) $\sin\ 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
(e) $\sin\ x = \cos\ x$
(f) $\tan\ 3x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
(g) $\sqrt{3}\cos\ x - \sin\ x = 1$
(h) $2\cos\ x + 0.5\sin\ x = 1.5$
(i) $\cos\ x + 0.2\sin\ x = 6$
(j) $3\cos\ x - 4\sin\ x = 5$
(k) $2\sin^2\ x + \sin\ x - 1 = 0$
(l) $\arcsin\ x = \frac{3\pi}{4}$
(m) $\arcsin\ x = \arccos\ x$

corrigé succinct :

(a) Quand une équation fait apparaître uniquement des exponentielles de l'inconnue on peut souvent se ramener à une équation polynômiale en posant $e^x = X$. Ainsi, l'équation devient ici $X - 2/X = -2$ avec $X > 0$ (car $X = e^x > 0$). Elle est donc équivalente à $X^2 + 2X - 2 = 0$ dont le discriminant est 12, et les solutions $\dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$. L'unique solution $X > 0$ est donc $X = -1 \pm \sqrt{3}$, qui correspond à $\boxed{x = \ln(\sqrt{3} - 1).}$

(b) L'équation est définie pour $x \neq \pm 1$. On peut donc, pour $x \neq \pm 1$ transformer l'équation en les équations équivalentes $\ln|x^2 - 1| = 0$, $|x^2 - 1| = 1$, $x^2 - 1 = \pm 1$, soit finalement $x^2 = 0$ ou $x^2 = 2$ dont les trois solutions sont $\boxed{x = 0,\ x = \sqrt{2} \text{ et } x = -\sqrt{2}.}$

(c) Il suffit d'écrire $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ pour trouver : $\boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

(d) De même on écrit $\frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3})$, et donc x est solution si et seulement si $2x$ vaut $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc finalement : $\boxed{x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

(e) Un raisonnement géométrique permet d'éviter les calculs : l'angle x est solution si et seulement si l'abscisse et l'ordonnée du point correspondant du cercle trigonométrique sont égales. Donc $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, soit encore $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

(f) $\tan\ 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$ équivaut à : $3x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ soit : $\boxed{x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.}$

(g) L'équation équivaut successivement à $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\ x - \frac{1}{2}\sin\ x = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}\cos\ x - \sin\frac{\pi}{6}\sin\ x = \cos\frac{\pi}{3}$, $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{3}$. Ainsi $x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et les solutions sont donc les $\boxed{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } \frac{-\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

(h) On transforme d'abord l'équation en l'équation $\frac{4}{\sqrt{17}}\cos\ x + \frac{1}{\sqrt{17}}\sin\ x = \frac{3}{\sqrt{17}}$.
On peut alors écrire $\frac{4}{\sqrt{17}} = \cos\arctan\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin\arctan\frac{1}{4}$, et donc en posant $\alpha = \arctan\frac{1}{4}$, l'équation devient $\cos\ \alpha\ \cos\ x + \sin\ \alpha\ \sin\ x = \frac{3}{\sqrt{17}}$, soit $\cos(x - \alpha) = \cos(\arccos\frac{3}{\sqrt{17}})$. Ainsi, $x - \alpha = \pm\arccos(\frac{3}{\sqrt{17}}) + 2k\pi$; les solutions sont donc les $\boxed{\arctan\frac{1}{\sqrt{4}} \pm \arccos\frac{3}{\sqrt{17}} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$ (remarque : $x \simeq 1$, mais $x \neq 1$)

(i) On transforme l'équation en $\frac{5}{\sqrt{26}}\cos\ x + \frac{1}{\sqrt{26}}\sin\ x = \frac{6}{\sqrt{26}}$. Mais on remarque alors que le membre de gauche est de la forme $\cos(x - \beta)$ (cf.le cours, et l'équation précédente), alors que le membre de droite est strictement supérieur à 1 : $\boxed{\text{l'équation n'admet pas de solution.}}$

(j) $\frac{3}{5}\cos\ x - \frac{4}{5}\sin\ x = 1$, donc si $\gamma = \arctan(-\frac{4}{3})$, l'équation devient $\cos\gamma\cos\ x + \sin\gamma\sin\ x = 1$, d'où et $\cos(x - \gamma) = 1$. Ainsi, $x - \gamma = 2k\pi$, donc les solutions sont les $\boxed{-\arctan\frac{4}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

(k) On résoud d'abord $2X^2 + X - 1$, dont les solutions sont $X = -1$ et $X = \frac{1}{2}$.
En remplaçant X par $\sin\ x$, on obtient donc deux équations trigonométriques, dont les solutions sont les $\boxed{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

(l) La fonction arcsin prend ses valeurs dans $[-\pi/2; \pi/2]$: $\boxed{\text{l'équation n'a pas de solution.}}$

(m) $\arcsin x$ est dans $[-\pi/2; \pi/2]$ et $\arccos x$ dans $[0; \pi]$, donc si ces quantités sont égales elles sont toutes deux dans $[0; \pi/2]$, et donc x doit être dans $[0; 1]$.

L'équation est alors équivalente à $x = \sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}$, soit $x > 0$ et $x^2 = 1 - x^2$, d'où $\boxed{x = \sqrt{2}/2.}$

2. Calculer $\cos \frac{5\pi}{8}$, $\sin \frac{5\pi}{8}$, et $\tan \frac{5\pi}{8}$.

corrigé succinct : On utilise la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ avec $x = \frac{5\pi}{8}$ pour obtenir $2\cos^2 \frac{5\pi}{8} = 1 + \cos \frac{5\pi}{4} = 1 - \sqrt{2}/2$, d'où finalement $\cos^2 \frac{5\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$. Comme $\frac{5\pi}{8}$ est entre $\pi/2$ et π, son cosinus est négatif, et donc $\boxed{\cos \dfrac{5\pi}{8} = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$

Avec la formule $\sin 2x = 2 \sin x \ \cos x$, on obtient alors $\boxed{\sin \dfrac{5\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}},}$

et par conséquent $\boxed{\tan \dfrac{5\pi}{8} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.}$

3. Quels angles font avec $\vec{i}$ les vecteurs $\vec{u}(\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $\vec{v}(-1, 3)$, $\vec{w}(-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$?

corrigé succinct : $(\vec{i}, \vec{u}) = \pi/3$, $(\vec{i}, \vec{v}) = -\arctan(3) + \pi$, $(\vec{i}, \vec{w}) = -5\pi/6$.

exercices pratiques

1. **Mesure du rayon de la Terre par Eratosthène, vers -200 av.J.C :** Lors du solstice d'été, à midi, le soleil est au zénith dans la ville de Syène (Assouan). A Alexandrie, située à 800km au nord sur le même méridien, les rayons du soleil font un angle de 7° avec la verticale.

   (a) Avec ces données, déterminer le rayon de la Terre.

   (b) Comparer à la valeur aujourd'hui mesurée, 6378km.

   corrigé succinct :

   (a) D'après les données, si d est la distance le long d'un méridien entre Syène et Assouan et si $\theta = 7^\circ = 7 * \pi/180$rad est l'angle correspondant, on a $R \times \theta = d$, donc $R = d/\theta \simeq 6548$km.

   (b) Le calcul d'Eratosthène donne une erreur de 170km, soit une erreur relative de l'ordre de $2,7\%$...la mesure est très correcte.

2. **Entendu un dimanche après-midi...**
   « Petite randonnée tranquille ce matin, une belle pente à 30° régulière. Par contre, la voiture a trouvé la descente de Laffrey sur Vizille un peu raide : une longue pente à 12% ! ». Comment comparer ces valeurs ?

   corrigé succinct :

   12% de pente signifie que si le trajet horizontal (la distance parcourue en projection) est d, la voiture est descendue de $d \times 0,12$, et l'angle correspondant est donc caractérisé par $\tan\theta = 0,12$ soit $\theta \simeq 0,119$ rad $\simeq 6,84^\circ$.

   A l'inverse, 30° de pente correspondent à $57,7\%$.

3. **Nombre de chiffres :** le plus grand nombre premier connu à ce jour est $2^{43\ 112\ 609} - 1$. Combien de chiffres sont nécessaires pour l'écrire ?

   corrigé succinct :

   Le nombre de chiffres n est caractérisé par la double inégalité $10^{n-1} \leq 2^{43\ 112\ 609} - 1 < 10^n$, soit encore $10^{n-1} < 2^{43\ 112\ 609} < 10^n$ (l'inégalité de droite est stricte car une puissance de 2 n'est pas divisible par 5, donc a fortiori ne peut être une puissance de 10).

   Si l'on peut écrire $2^{43\ 112\ 609}$ sous la forme 10^x, le nombre de chiffre sera donc égal à la partie entière de x plus un.

   On détermine alors x en prenant le logarithme népérien de cette égalité, soit $x = \ln 10 = 43\ 112\ 609 \ln 2$, donc $x = 43\ 112\ 609 \ln(2)/\ln 10 \simeq 12\ 978\ 188,5$.

   Le nombre premier s'écrit donc avec 12 978 189 chiffres.

4. **Décharge d'un condensateur :** Un condensateur de capacité C, initialement chargé à q_0, se décharge sur une résistance R. Alors la charge $q(t)$ vérifie l'équation différentielle : $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$.

   (a) Déterminer la charge q, puis l'intensité $i = \frac{dq}{dt}$ en fonction de t.

   (b) Au bout de combien de temps la charge a-t-elle diminué de 63% ?

   (c) Au bout de combien de temps vaut-elle 5% de la charge initiale ?

   corrigé succinct :

   (a) La solution de cette équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants est $q(t) = q_0 e^{-t/RC}$.

   (b) On cherche t tel que $e^{-t/RC} \leq 1 - 0,63 = 0,37$, soit $t \geq -\ln(0,37)RC \simeq 0.994RC \simeq RC$.

   (c) De même, on cherche t tel que $e^{-t/RC} \leq 0,05$, soit $t \geq -\ln(0,05)RC \simeq 2.996RC \simeq 3RC$.

5. * **Tunnel :** pour relier deux villes C et F distantes de 80km, on veut percer un tunnel entre deux points C' et F' situés 200m sous C et F. Deux options se présentent : ou bien percer en ligne droite, ou bien percer en restant en permanence à une profondeur de 200m.
   (a) Comparer les distances à percer dans les deux cas.
   (b) Dans le premier cas, quelle sera la profondeur maximale atteinte ?

   (on prendra $R = 6378$km pour rayon de la Terre)

   corrigé succinct :

   (a) Soit O le centre de la Terre, et soit θ l'angle $\widehat{COF} = \widehat{C'OF'}$. Alors $\theta = 80/R$.
   Si l'on perce en ligne droite : on note M le milieu de $[C'F']$. Alors on calcule $C'M = OC'\sin(\theta/2)$ par relation trigonométrique dans le triangle OMC' rectangle en M, et donc comme $C'F'/2 = C'M$: $C'F' = 2OC'\sin(\theta/2)$.
   Ainsi, $\boxed{C'F' = 2(R - 0.2) * \sin(40/R) \simeq 79.9970\text{km}.}$
   Si l'on perce à profondeur constante de 200m : on parcourt la distance $\widehat{C'F'} = (R - 0.2)\theta$, soit $\boxed{\widehat{C'F'} = 80\dfrac{R - 0.2}{R} \simeq 79.9975\text{km}.}$
   (b) La profondeur cherchée est $R - OM$. Mais $OM = OC'\cos(\theta/2) = (R - 0.2)\cos(\theta/2) = (R-0.2)\cos(40/R)$, $\boxed{\text{la profondeur maximale atteinte est de 325.4m.}}$

6. **Graduation d'une cuve cylindrique**
   Une cuve cylindrique de rayon $R = 1$m et de longueur $L = 5$m est posée sur le sol selon sa longueur. On souhaite déterminer le volume V de liquide en fonction de sa hauteur h, $0 \leq h \leq 2$.
   (a) Calculer $V(0)$, $V(1)$, $V(2)$.
   (b) En décomposant la surface de liquide comme différence entre la surface d'un secteur circulaire et celle d'un triangle isocèle, donner $V(h)$ pour $0 \leq h \leq 1$.
   (c) En déduire la valeur de $V(h)$ pour $1 \leq h \leq 2$.
   (d) Peut-on facilement graduer la cuve, c'est à dire exprimer la hauteur du liquide en fonction de son volume ?

   corrigé succinct :

   (a) On a $\boxed{V(0) = 0,}$ $\boxed{V(1) = \pi R^2 L/2 = 5\pi/2}$ et $\boxed{V(2) = \pi R^2 L = 5\pi.}$
   (b) On considère un des disques qui ferment la cuve. Soit O son centre, et A et B les points du cercle correspondant tel que le liquide soit situé sous $[AB]$. Soit enfin θ l'angle $\widehat{AOB}$ et C le milieu de $[AB]$.
   Alors $V(h) = L \times S(h)$, où $S(h)$ est la surface de liquide sur le disque. Et on peut calculer $S(h)$ comme différence entre l'aire d'un secteur d'angle θ et l'aire du triangle AOB.
   Le triangle AOC étant rectangle en C, $AC^2 = AO^2 - OC^2 = 1 - (1-h)^2 = 2h - h^2$, donc $AC = \sqrt{2h - h^2}$. L'aire de AOC est $OC \times AC/2$, et l'aire de AOB est donc égale à $OC \times AC$, soit $(1 - h)\sqrt{2h - h^2}$.
   L'aire du secteur angulaire est simplement égale à $\theta R^2/2$, donc ici $\theta/2$, et on peut calculer $\theta/2$ grâce à la trigonométrie dans le triangle rectangle en C AOC : $OC = OA\cos(\theta/2)$ donc $1 - h = \cos(\theta/2)$, $\theta/2 = \arccos(1 - h)$.
   Finalement, on obtient donc $V(h) = 5(\arccos(1 - h) - (1 - h)\sqrt{2h - h^2})$, d'où
   $\boxed{V(h) = 5(\arccos(1 - h) - (1 - h)\sqrt{2h - h^2}).}$
   (c) Si h est compris entre 1 et 2, c'est l'air qui occupe un volume correspondant à une hauteur $2 - h$ (comprise entre 0 et 1), et l'on peut calculer ce volume grâce à la question précédente. Ainsi, $V(h) = V(2) - V(2 - h) = 5(\pi - \arccos(-1 + h) + (-1 + h)\sqrt{2(2 - h) - (2 - h)^2})$, et donc
   $\boxed{\text{si } 1 \leq h \leq 2,\ V(h) = 5(\pi - \arccos(-1 + h) + (-1 + h)\sqrt{2h - h^2}).}$
   On peut même démontrer que cette expression est égale à celle déterminée pour $0 \leq h \leq 1$. En effet, un peu de géométrie (ou une utilisation des dérivées) montre que la fonction $x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$ est constante sur $[-1; 1]$, de valeur π. Par conséquent, $\pi - \arccos(-1 + h) = \arccos(1 - h)$. Comme $-1 + h = -(1 - h)$ on a donc pour $1 \leq h \leq 2$, $V(h) = 5(\arccos(h - 1) - (1 - h)\sqrt{2h - h^2})$, et on retrouve bien la formule précédente.
   Ainsi, pour tout h compris entre 0 et 2, $\boxed{V(h) = 5(\arccos(1 - h) - (1 - h)\sqrt{2h - h^2}.}$
   (d) Non, il n'est pas possible d'inverser cette formule donnant V en fonction de h pour obtenir h en fonction de V. Seuls des calculs numériques de h, pour un certain nombre de valeurs de V (tous les 100 litres, par exemple..), permettront de déterminer comment graduer la cuve.

7. **Electricité**
   Un générateur $G1$ fournit une tension $u_1 = A\cos\omega t$ et un générateur $G2$ une tension $u_2 = A\sin\omega t$. Quel est le déphasage par rapport à u_1 de la tension obtenue en plaçant $G1$ et $G2$ en série ?

   corrigé succinct : La tension étudiée est $(u_1 + u_2)(t) = A\cos\omega t + A\sin\omega t$.
   On peut donc transformer cette expression en l'écrivant $\sqrt{2}A(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\omega t + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\omega t)$, soit $\sqrt{2}A\cos(\omega t - \pi/4)$. Ainsi, le déphasage cherché vaut $\boxed{-\pi/4}$.