exercices théoriques

1. Donner la forme algébrique, le module et l'argument des nombres :
$a=\sqrt{3}+i;\quad b=(1-i)(1+\sqrt{3}i);\quad c=\frac{1+i}{2-i};\quad d=-1-3i;$
$e=3-i;\quad f=\frac{3}{1-i};\quad g=(1-\sqrt{3}i)^{2010};\quad h=-3+4i.$

corrigé succinct :

$a=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=2e^{i\frac{\pi}{6}}$:

$\boxed{\text{le module de } a \text{ est 2, son argument est } \frac{\pi}{6}.}$

Pour b, en développant on trouve $\boxed{b=1+\sqrt{3}+(-1+\sqrt{3})i.}$ Pour déterminer sa forme trigonométrique, il est plus simple de calculer séparément celle de $1-i$ et celle de $1+\sqrt{3}i$ avant de multiplier les modules et d'additionner les arguments pour obtenir ceux de b :

$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $\boxed{b=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.}$

Pour c on obtient la forme algébrique (cartésienne) avec la méthode de la quantité conjuguée : on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $2+i$ du dénominateur $2-i$:

$c=\frac{(2+i)(1+i)}{(2+i)(2-i)}$, d'où $\boxed{c=\frac{1+3i}{5}.}$

On trouve alors directement son module $\sqrt{10}/5$ et son argument $\arctan(3)$: la forme exponentielle est donc $\boxed{c=\frac{\sqrt{10}}{5}e^{i\arctan(3)}.}$

Enfin on trouve directement $\boxed{d=\sqrt{10}e^{i(\arctan(\frac{-3}{-1})+\pi)}=-\sqrt{10}e^{i(\arctan(3))}.}$

Pour e, le module est $\sqrt{10}$ et l'argument $\arctan(-1/3)$.

Pour f, le module est $3/\sqrt{2}=3\sqrt{2}/2$ et l'argument est $\pi/4$.

Pour g, le module est 2^{2010} et l'argument est $-2010\pi/3$.

Pour h, le module est 5 et l'argument $\arctan(-4/3)+\pi$.

2. Calculer $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

corrigé succinct : On utilise la formule de Moivre :
$\sin 5\theta=\operatorname{im}(\cos\theta+i\sin\theta)^5=\operatorname{im}(\cos^5\theta+5i\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta-10i\cos^2\theta\sin^3\theta+5\cos\theta\sin^4\theta+i\sin^5\theta)=5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta$. Il ne reste plus qu'à utiliser les relations $\cos^4\theta=(1-\sin^2\theta)^2=\sin^4\theta-2\sin^2\theta+1$ et $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ pour trouver, après simplification :

$\boxed{\sin 5\theta=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta.}$

3. Linéariser : (a) $\sin^2\theta$ (b) $\cos^4\theta$ (c) $\sin^3\theta\ \cos^2\theta$

corrigé succinct : on utilise les formules d'Euler...

(a) $\sin^2\theta=(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})^2=-\frac{1}{4}(e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta})$, $\boxed{\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta).}$

(b) De même en développant $\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4$, on trouve

$\boxed{\cos^4\theta=\frac{\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3}{8}.}$

(c) De même, $\sin^3\theta\ \cos^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$, donc

$\boxed{\sin^3\theta\ \cos^2\theta=\frac{-\sin 5\theta+\sin 3\theta+2\sin\theta}{16}.}$

4. Calculer les racines carrées de :
$a=-5i;\quad b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad c=(1-i)^3;\quad d=-3+4i.$

corrigé succinct : On commence par mettre chacun de ces nombres sous forme trigonométrique.

$a=-5i=5e^{-i\pi/2}$, donc les racines carrées de a sont les $\pm\sqrt{5}e^{-i\pi/4}=$ $\boxed{\frac{\sqrt{10}+i\sqrt{10}}{2}.}$

$b=e^{-i\pi/3}$ donc les racines carrées de b sont les $\pm e^{-i\pi/6}=$ $\boxed{\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i).}$

$c=(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^3=2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$, donc les racines carrées de c sont les

$\boxed{\pm\sqrt{2\sqrt{2}}e^{-3i\pi/8}.}$

Pour les exprimer sous forme algébrique, il suffit de savoir calculer $\cos(-3\pi/8)$ et $\sin(-3\pi/8)$: on peut calculer le cosinus par la méthode vue au TD précédent pour se ramener à $\cos(-3\pi/4)$, et le sinus s'en déduit avec la relation $\sin^2+\cos^2=1$. Ainsi, les racines carrées sont $\boxed{\pm(\sqrt{\sqrt{2}-1}+i\sqrt{\sqrt{2}+1})}$.

$d=5e^{i(\arctan(-4/3)+\pi)}$ donc les racines carrées de d sont les $\boxed{\pm\sqrt{5}e^{i\frac{\arctan(-4/3)+\pi}{2}}}$.

5. Résoudre les équations :
   (a) $z^2+iz-1=0$ (b) $iz^2-(1+i)z+2=0$ (c) $z^3=1$
   (d) $z^4=-16$ (e) $z^6=1-i$ (f) $(1+z)^3=2i$

corrigé succinct : On utilise les formules avec le discriminant :

(a) $\Delta=i^2+4=3$, dont une racine carrées est $\sqrt{3}$, donc les solutions sont les $\boxed{\dfrac{-i\pm\sqrt{3}}{2}}$.

(b) $\Delta=-6i$ dont une racine carrée est $\sqrt{3}(1-i)$, donc les solutions sont les $\dfrac{(1+i)\pm\sqrt{3}(1-i)}{2i}=\dfrac{(-i+1)\pm\sqrt{3}(-i-1)}{2}$, soit $\boxed{\dfrac{(1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})i}{2} \text{ et } \dfrac{(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i}{2}}$.

(c) On cherche les racines cubiques de $1=e^{i0}$, donc les solutions sont, par application directe du cours, les $e^{i0/3}$, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$ soit $\boxed{1, \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ et } \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}}$.

(d) On cherche les racines quatrièmes de $-16=16e^{i\pi}=2^4e^{i\pi}$, ce sont donc les $2e^{i\pi/4}$, $2e^{i\pi/4+\pi/2}$, $2e^{i\pi/4+\pi}$ et $2e^{i\pi/4+3\pi/2}$, soit les $\boxed{\sqrt{2}(1+i), \sqrt{2}(-1+i), -\sqrt{2}(1+i) \text{ et } \sqrt{2}(1-i)}$.

(e) $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, donc les racines sont $2^{1/12}e^{-i\pi/24+2ik\pi/6}$.

(f) $2i=2e^{i\pi/2}$ donc z est de la forme $-1+2^{1/3}e^{i\pi/6+2ik\pi/3}$.

6. * On considère pour $x\in]-\pi/2,+\pi/2[$ $f(x)=\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$.
   Donner les parties réelle et imaginaire, le module, l'argument de $f(x)$.
   En déduire l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\tan x$.

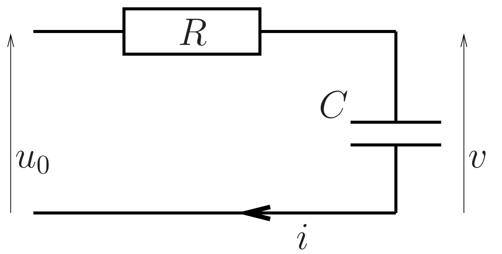
corrigé succinct : $f(x)=\dfrac{(1+i\tan x)^2}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1-\tan^2 x+2i\tan x}{1+\tan^2 x}$, donc $\mathrm{re}\,(f(x))=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et $\mathrm{im}\,(f(x))=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

$|f(x)|=\dfrac{(1-\tan^2 x)^2+(2\tan x)^2}{(1+\tan^2 x)^2}=\dfrac{1+\tan^4 x+2\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)^2}=1.$

Mais on voit aussi, en multipliant numérateur et dénominateur par $\cos x$, que $f(x)=\dfrac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}=\dfrac{e^{ix}}{e^{-ix}}=e^{2ix}=\cos 2x+i\sin 2x$: $\arg(f(x))=2x$, et donc $\cos 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et de plus en comparant les deux expressions de $f(x)$, $\sin 2x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

exercices pratiques

1. **un exercice de DS...**
   Un courant d'intensité i traverse le circuit suivant :



R, C et u_0 sont connues.

On cherche à déterminer i et v, qui sont liées par la relation $i=C\dfrac{dv}{dt}$.

(a) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la tension $v(t)$.
(b) Si u_0 est une constante U_0, déterminer v.
(c) Si $u_0(t)=A\cos(\omega t)$, $A>0$, représentée sous forme complexe par $\underline{u_0}(t)=Ae^{j\omega t}$ alors on cherche une solution de la forme $\underline{v}(t)=Be^{j(\omega t+\varphi)}$.
   Donner une relation entre B, φ et R, C, A, ω.
(d) Calculer B et φ en fonction de R, C, A, ω.

corrigé succinct :

(a) La tension aux bornes du circuit u_0 est égale à la somme des tensions aux bornes du condensateur (v) et de la résistance (Ri). On a donc $\boxed{RC\dfrac{dv}{dt} + v(t) = u_O(t).}$

(b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre : la solution de l'équation est obtenue en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l'équation sans second membre associée, $RC\dfrac{dv}{dt} + v(t) = 0$.
On a revu dans le TD précédent que les solutions de cette équation sont les $v(t) = ke^{-t/RC}$, pour tout k réel.
D'autre part, comme u_0 est constant, on peut chercher une solution particulière constante. Une telle solution vérifie donc $\dfrac{dv}{dt} = 0$, et donc doit vérifier $v = u_0$.
Ainsi, la solution générale est $\boxed{v(t) = u_0 + ke^{-t/RC},}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$. Ne connaissant pas les conditions initiales, on ne peut préciser k.

(c) Si u_0 est sinusoïdale, donnée sous forme complexe par $\underline{u_0}(t) = Ae^{j\omega t}$, alors on cherche une solution de la forme $\underline{v}(t) = Be^{j(\omega t+\varphi)}$.
On peut alors calculer en représentation complexe $\dfrac{d\underline{v}}{dt}(t) = Bj\omega e^{j(\omega t+\varphi)}$, et l'équation devient donc $RCBj\omega e^{j(\omega t+\varphi)} + Be^{j(\omega t+\varphi)} = Ae^{j\omega t}$.
Après factorisation et simplification par $e^{j\omega t}$, on obtient donc la relation $(RCj\omega + 1)Be^{j\varphi} = A$ soit $\boxed{Be^{j\varphi} = \dfrac{A}{1 + jRC\omega}.}$

(d) Mais alors B est le module, et φ l'argument du nombre $\dfrac{A}{1 + jRC\omega}$.
Ainsi, on trouve $\boxed{B = \dfrac{A}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}}$ et $\varphi = \arg(A) - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \arctan(RC\omega)$, d'où $\boxed{\varphi = -\arctan(RC\omega).}$