TD 3 : Polynômes et fractions rationnelles - corrigé

exercices théoriques

1. Effectuer la division selon les puissances décroissantes de :
   (a) $X^4 - X^3 + 3X^2 + 1$ par $X^2 + 3X + 1$
   (b) $X^5 + 2X^3 - 3X - 2$ par $X^3 + X + 1$
   (c) $6X^5 - 7X^4 + 1$ par $(X-1)^2$

corrigé succinct :

(a) On pose la division :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|rrrrr}
X^4 & - & X^3 & + & 3X^2 & & & + & 1 & & X^2 & + & 3X & + & 1 \\
X^4 & + & 3X^3 & + & X^2 & & & & & & X^2 & - & 4X & + & 14 \\
\hline
 & - & 4X^3 & + & 2X^2 & & & + & 1 & & & & & & \\
 & - & 4X^3 & - & 12X^2 & - & 4X & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & 14X^2 & + & 4X & + & 1 & & & & & & \\
 & & & & 14X^2 & + & 42X & + & 14 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & - & 38X & - & 13 & & & & & &
\end{array}
$$

donc $\boxed{X^4 - X^3X + 1 = (X^2+3X+1)(X^2-4X+14) - 38X - 13.}$

(b) De même on trouve $\boxed{X^5 + 2X^3 - 3X - 2 = (X^3+X+1)(X^2+1) - X^2 - 4X - 3.}$

(c) De même $\boxed{6X^5 - 7X^4 + 1 = (X^2-2X+1)(6X^3+5X^2+4X+3) + 2X - 2.}$

2. Effectuer la division selon les puissances croissantes de :
   (a) $2 + X^2$ par $1 - X + 3X^2$ à l'ordre 2
   (b) 1 par $1 + 2X - X^2$ à l'ordre 3
   (c) $5 + 2X$ par $1 + X$ à l'ordre 1.
   (d) $1 - X$ par $1 + X$ à l'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

corrigé succinct :

(a) On pose la division :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|rrrrr}
2 & + & & & X^2 & & & & & 1 & - & X & + & 3X^2 \\
2 & - & 2X & + & 6X^2 & & & & & 2 & + & 2X & - & 3X^2 \\
\hline
 & & 2X & - & 5X^2 & & & & & & & & & \\
 & & 2X & - & 2X^2 & + & 6X^3 & & & & & & & \\
\hline
 & & & - & 3X^2 & - & 6X^3 & & & & & & & \\
 & & & - & 3X^2 & + & 3X^3 & - & 9X^4 & & & & & \\
\hline
 & & & & & - & 9X^3 & + & 9X^4 & & & & &
\end{array}
$$

donc $\boxed{2 + X^2 = (1 - X + 3X^2)(2 + 2X - 3X^2) - 9X^3 + 9X^4.}$

(b) De même, $\boxed{1 = (1 + 2X - X^2)(1 - 2X + 5X^2 - 12X^3) + 29X^4 - 12X^5.}$

(c) De même, $\boxed{5 + 2X = (5 - 3X)(1 + X) + 3X^2.}$

3. Déterminer le polynôme réel unitaire de degré 4 dont $1 - i$ est racine simple et 2 est racine double.

corrigé succinct : Si le polynôme est unitaire de degré 4, il s'écrit $(X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$, a, b, c, d désigant ses quatres racines complexes.
On sait déjà que 2 est racine double (il compte deux fois dans la liste ci-dessus).
$1 - i$ étant racine, il ne reste plus qu'une racine à trouver. On utilise alors le résultat souvent utile suivant : si z est racines de P et si P est à coefficients réels, $\bar{z}$ est racine de P. En effet, puisque $P(z) = 0$, on a $\overline{P(z)} = 0$ et donc $0 = \overline{P}(\bar{z}) = P(\bar{z})$. Ainsi, $1 + i$ est aussi racine de P, donc $P = (X-2)^2(X-(1-i))(X-(1+i)) = (X^2-4X+4)(X^2-2X+2)$:
$\boxed{P = X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 16X + 8.}$

4. Factoriser sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ les polynômes :
   (a) $X^2 + 2X - 3$ (b) $X^4 + 2X^2 - 3$ (c) $X^3 - X^2 + 2X - 2$
   (d) $X^4 + 1$ (e) $X^4 - 2X^3 + X - 2$ (f) $X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 5X + 1$

corrigé succinct : (a) Le discriminant de ce polynôme du second degré est 16, et ses racines sont -3 et 1. Ainsi, $\boxed{X^2 + 2X - 3 = (X-1)(X+3).}$

(b) On utilise le résultat précédent $X^4 + 2X^2 - 3 = (X^2-1)(X^2+3)$. Il reste à factoriser chacun de ces deux facteurs.

On a $X^2-1=(X-1)(X+1)$, et X^2+3 est irréductible sur $\mathbb{R}$, et vaut $(X-\sqrt{3}i)(X+\sqrt{3}i)$ sur $\mathbb{C}$.

Ainsi, $\boxed{\text{sur } \mathbb{R},\ X^4+2X^2-3=(X-1)(X+1)(X^2+3)}$, et

$\boxed{\text{sur } \mathbb{C},\ X^4+2X^2-3=(X-1)(X+1)(X-\sqrt{3}i)(X+\sqrt{3}i)}$.

(c) On commence par déterminer une racine "évidente", à chercher parmi les diviseurs du terme constant -2 : on teste donc $2, -2, 1, -1$, pour constater que 1 est effectivement racine (et pas les trois autres nombres).

Alors on effectue la division de X^3-X^2+2X-2 par $X-1$ (on sait à l'avance que le reste doit être nul) : $X^3-X^2+2X-2=(X-1)(X^2+2)$. X^2+2 étant irréductible sur $\mathbb{R}$, la décomposition est : $\boxed{\text{sur } \mathbb{R},\ X^3-X^2+2X-2=(X-1)(X^2+2)}$, et

$\boxed{\text{sur } \mathbb{C},\ X^3-X^2+2X-2=(X-1)(X+\sqrt{2}i)(X-\sqrt{2}i)}$.

(d) Il est plus simple de commencer par factoriser ce polynôme sur $\mathbb{C}$. Pour cela on doit trouver ses racines, ce qui revient à déterminer les racines quatrièmes de -1 : ce sont $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{5i\pi/4}=e^{-3i\pi/4}$ et $e^{7i\pi/4}=e^{-i\pi/4}$.

Ainsi, $\boxed{\text{sur } \mathbb{C},\ X^4+1=(X-e^{i\pi/4})(X-e^{3i\pi/4})(X-e^{-3i\pi/4})(X-e^{-i\pi/4})}$.

Pour obtenir la décomposition sur $\mathbb{R}$, on développe les deux produits correspondants aux racines conjuguées :
$(X-e^{i\pi/4})(X-e^{-i\pi/4})=X^2-2\cos(\pi/4)X+1=X^2-\sqrt{2}X+1$ et
$(X-e^{3i\pi/4})(X-e^{-3i\pi/4})=X^2-2\cos(3\pi/4)X+1=X^2-\sqrt{2}X+1$. Ainsi,

$\boxed{\text{sur } \mathbb{R},\ X^4+1=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1).}$

(e) On trouve -1 et 2 comme "racines évidentes". On peut alors diviser le polynôme par $(X+1)(X-2)=X^2-X-2$ et obtenir $X^4-2X^3+X-2=(X+1)(X-2)(X^2-X+1)$.

Le polynôme X^2-X+1 n'a pas de racines réelles : la factorisation sur $\mathbb{R}$ est donc $X^4-2X^3+X-2=(X+1)(X-2)(X^2-X+1)$.

Ses racines complexes (calculées à l'aide du discriminant) sont $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$, donc la factorisation sur $\mathbb{C}$ est $X^4-2X^3+X-2=(X+1)(X-2)(X-e^{i\pi/3})(X-e^{-i\pi/3})$.

(f) On commence par déterminer une "racine évidente" en cherchant parmi les diviseurs du terme constant 1. On constate que 1 est racine, et le polynôme est donc divisible par $(X-1)$: $X^4-5X^3+8X^2-5X+1=(X^3-4X^2+4X-1)(X-1)$. On peut à nouveau chercher une racine évidente de X^3-4X^2+4X-1, et trouver de nouveau 1 : $X^3-4X^2+4X-1=(X-1)(X^2-3X+1)$.

Et alors en utilisant la méthode du discriminant :

$\boxed{\text{sur } \mathbb{R} \text{ et sur } \mathbb{C},\ X^4-5X^3+8X^2-5X+1=(X-1)^2(X-(3+\sqrt{5})/2)(X-(3-\sqrt{5})/2).}$

5. * Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $X^3-3iX^2+(2i-3)X+2+i=0$

corrigé succinct :

1 est racine "évidente".

Le quotient de la division du polynôme par $X-1$ est $X^2+(-3i+1)X-2-i$, qui a pour racines (formules du discriminant) i et $-1+2i$.

Les racines cherchées sont donc 1, i et $-1+2i$.

6. Décomposer en élements simples sur $\mathbb{R}$ les fractions :

(a) $\dfrac{X^2+3}{X^2-1}$ (b) $\dfrac{6}{X(X-1)(X+2)}$ (c) $\dfrac{X^3+1}{X(X^2+1)}$ (d) $\dfrac{X^2-2X-3}{X^3+2X^2-3X}$

corrigé succinct : (a) Pour trouver la partie entière de la fraction, on écrit la division selon les puissances décroissantes de X^2+3 par X^2-1 : $X^2+3=1\times(X^2-1)+4$, donc $\dfrac{X^2+3}{X^2-1}=1+\dfrac{4}{X^2-1}$. Comme $X^2-1=(X-1)(X+1)$, on sait alors que l'on a une décomposition en éléments simples du type $1+\dfrac{\lambda}{X-1}+\dfrac{\mu}{X+1}$.

Pour déterminer λ, on multiplie toute l'expression par $X-1$:
$(X-1)\dfrac{X^2+3}{X^2-1}=(X-1)\dfrac{X^2+3}{(X-1)(X+1)}=\dfrac{X^2+3}{X+1}=(X-1)+\lambda+\dfrac{\mu(X-1)}{X+1}$.

Puis on prend la valeur en 1 : $\dfrac{4}{2}=0+\lambda+0$.

Ainsi, on trouve $\lambda=2$ et de même (en multipliant par $X+1$ avant de prendre la valeur en -1) : $\mu=-2$.

La décomposition est donc $\boxed{\dfrac{X^2+3}{X^2-1}=1+\dfrac{2}{X-1}-\dfrac{2}{X+1}.}$

(b) Il n'y a pas de partie entière (car le degré du numérateur 6, 0, est strictement inférieur au degré du dénominateur, 3), donc on sait que l'on a une décomposition du type
$\dfrac{6}{X(X-1)(X+2)}=\dfrac{\lambda}{X}+\dfrac{\mu}{X-1}+\dfrac{\nu}{X+2}$.

Pour déterminer λ, on multiplie tout par X : $\dfrac{6}{(X-1)(X+2)}=\lambda+\dfrac{\mu X}{X-1}+\dfrac{\nu X}{X+2}$,

puis on prend la valeur en 0 : $\lambda=\dfrac{6}{(-1)(2)}=-3$.

De même pour μ en multipliant par $X-1$ et en prenant la valeur en 1 : $\mu=2$, et pour ν en multipliant par $X+2$ et en prenant la valeur en 2 : $\nu=1$.

Ainsi, $\boxed{\dfrac{6}{X(X-1)(X+2)}=\dfrac{-3}{X}+\dfrac{2}{X-1}+\dfrac{1}{X+2}.}$

(c) La partie entière est ici 1, et on sait alors que l'on a une décomposition en éléments simples réelle de la forme $\dfrac{X^3+1}{X(X^2+1)}=1+\dfrac{a}{X}+\dfrac{bX+c}{X^2+1}$.

Pour trouver a on procède comme précédemment, $a = 1$.

Pour trouver b et c, le plus efficace est de mutiplier l'expression par $X^2 + 1$ avant de prendre la valeur en i (cette valeur n'est pas chosie au hasard : il s'agit d'une racine du dénominateur $X^2 + 1$) : on trouve $\dfrac{X^3+1}{X} = X^2 + 1 + \dfrac{X^2+1}{X} + bX + c$, et donc $bi + c = \dfrac{i^3+1}{i} = -1 - i$. Ainsi, $b = -1$, $c = -1$, et

$$\boxed{\frac{X^3+1}{X(X^2+1)} = 1 + \frac{1}{X} - \frac{X+1}{X^2+1}.}$$

(d) On commence ici par remarquer qu'il n'y a pas de partie entière dans cette fraction. Puis l'on factorise le dénominateur : $X^3 + 2X^2 - 3X = X(X^2 + 2X - 3)$, et on factorise ensuite $X^2 + 2X - 3$ en cherchant ses racines par la méthode du discriminant. On obtient au final $X^3 + 2X^2 - 3X = X(X-1)(X+3)$.

La décomposition en éléments simples cherchées sera donc du type $\dfrac{X^2-2X-3}{X^3+2X^2-3X} = \dfrac{\lambda}{X} + \dfrac{\mu}{X-1} + \dfrac{\nu}{X+3}$, et on détermine les coefficients par la méthode habituelle maintenant : $\boxed{\dfrac{X^2-2X-3}{X^3+2X^2-3X} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{X+3}.}$

7. Décomposer en élements simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ les fractions :

(a) $\dfrac{X^4-2X}{X^2+1}$ (b) $\dfrac{3}{X^3-1}$ (c) $\dfrac{2(X-2)}{(X^2+1)^2}$

corrigé succinct : (a) La partie entière de la fraction, obtenue par division selon les puissances décroissantes, est $X^2 - 1$: $\dfrac{X^4-2X}{X^2+1} = X^2 - 1 + \dfrac{-2X+1}{X^2+1}$.

Remarquons que $\dfrac{-2X+1}{X^2+1}$ est un élément simple réel ! (cf.le cours...), donc on vient d'écrire la décomposition réelle : $\boxed{\text{sur } \mathbb{R},\ \dfrac{X^4-2X}{X^2+1} = X^2 - 1 + \dfrac{-2X+1}{X^2+1}.}$

Pour déterminer la décomposition en éléments simples complexes, il faut factoriser $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$. La décomposition est alors de la forme $\dfrac{X^4-2X}{X^2+1} = X^2 - 1 + \dfrac{\lambda}{X-i} + \dfrac{\mu}{X+i}$.

On trouve λ par la méthode usuelle : on multiplie l'expression par $X - i$: $\dfrac{X^4-2X}{X+i} = (X^2-1)(X-i) + \lambda + \dfrac{\mu(X-i)}{X+i}$, et on prend la valeur en i : $\dfrac{i^4-2i}{2i} = \lambda$, donc $\lambda = -1 - i/2$.

On peut trouver par la même méthode μ, mais il est plus rapide de voir que, la fraction initiale étant réelle, les coefficient associés aux dénominateurs conjugués $X - i$ et $X + i$ sont eux-même conjugués, donc $\mu = \overline{\lambda} = -1 + i/2$.

Ainsi, $\boxed{\text{sur } \mathbb{C}\ ,\ \dfrac{X^4-2X}{X^2+1} = X^2 - 1 + \dfrac{-1-i/2}{X-i} + \dfrac{-1+i/2}{X+i}.}$

(b) On constate que la fraction a une partie entière nulle, et que $X^3 - 1$ se factorise à l'aide des racines cubiques de 1 en $X^3 - 1 = (X-1)(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3})$ (on a intérêt ici à écrire la troisième racine cubique de 1 sous la forme $e^{-2i\pi/3}$ plutôt que $e^{4i\pi/3}$).

Alors la décomposition en éléments simples sera de la forme

$$\frac{3}{X^3-1} = \frac{3}{(X-1)(X-e^{2i\pi/3})(X-e^{-2i\pi/3})} = \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{X-e^{2i\pi/3}} + \frac{\nu}{X-e^{-2i\pi/3}}.$$

La technique habituelle s'applique ici, mais les calculs sont un peu longs.

Pour trouver λ, on multiplie par $X - 1$ et on prend la valeur en 1 :

$$\lambda = \frac{3}{(1-e^{2i\pi/3})(1-e^{-2i\pi/3})} = \frac{3}{1 - e^{2i\pi/3} - e^{-2i\pi/3} + 1} = \frac{3}{2 - 2\cos(2\pi/3)} = \frac{3}{2+1} = 1.$$

Pour trouver μ, on multiplie par $X - e^{2i\pi/3}$ et on prend la valeur en $e^{2i\pi/3}$:

$$\mu = \frac{3}{(e^{2i\pi/3}-1)(e^{2i\pi/3}-e^{-2i\pi/3})} = \frac{3}{e^{4i\pi/3} - 1 - e^{2i\pi/3} + e^{-2i\pi/3}} = \frac{3}{-1/2 - \sqrt{3}i/2 - 1 + 1/2 - \sqrt{3}i/2 - 1/2 - \sqrt{3}i/2} = \frac{3}{-3/2 - 3\sqrt{3}i/2} = \frac{1}{\sqrt{3}i/2} = \frac{1}{e^{-2i\pi/3}} = e^{2i\pi/3}.$$

On trouve de même (par le calcul, ou bien en utilisant le fait que $\mu = \overline{\lambda}$) $\mu = e^{-2i\pi/3}$, et donc

$$\boxed{\text{sur } \mathbb{C},\ \frac{3}{X^3-1} = \frac{1}{X-1} + \frac{e^{2i\pi/3}}{X-e^{2i\pi/3}} + \frac{e^{-2i\pi/3}}{X-e^{-2i\pi/3}}.}$$

Pour trouver la décomposition réelle, on additionne (en réduisant les fractions au même dénominateur) les deux fractions conjuguées à coefficients complexes :

$$\frac{e^{2i\pi/3}}{X-e^{2i\pi/3}} + \frac{e^{-2i\pi/3}}{X-e^{-2i\pi/3}} = \frac{e^{2i\pi/3}(X-e^{-2i\pi/3}) + e^{-2i\pi/3}(X-e^{2i\pi/3})}{(X-e^{2i\pi/3})(X-e^{-2i\pi/3})} = \frac{2\cos(2\pi/3)X - 2}{X^2 - 2\cos(2\pi/3)X + 1} = \frac{-X-2}{X^2+X+1},$$

et ainsi la décomposition est

$$\boxed{\text{sur } \mathbb{R},\ \frac{3}{X^3-1} = \frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1}.}$$

(c) La partie entière est nulle, et la fraction est un élément simple réel de seconde espèce (cf.le cours), ainsi la fraction est décomposée sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{C}$, on peut factoriser $(X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$, et donc la décomposition en éléments simples sera de la forme $\dfrac{a}{(X-i)^2} + \dfrac{b}{X-i} + \dfrac{c}{(X+i)^2} + \dfrac{d}{X+i}$.

Pour trouver a on multiplie l'expression par $(X-i)^2$ et on prend la valeur en i : $\dfrac{2(i-2)}{(2i)^2} = a$, donc $a = 1 - i/2$, et de même $c = 1 + i/2$.

Trouver b et d est plus problèmatique...on peut, de manière générale, choisir de remplacer X par deux valeurs différentes des pôles i et $-i$, et obtenir ainsi deux équations à deux inconnues b et d...

Si l'on veut limiter les calculs on peut : remplacer X par 0, ce qui donne une équation simple : $-a+ib-c-id=-4$ soit $i(b-d)=-2$ soit encore $b-d=2i$.

Puis multiplier l'expression par X et considérer la limite en l'infini : à gauche on obtient 0, à droite $b+d$. Ainsi, $b+d=0$, et donc $b=i$, $d=-i$. La décomposition cherchée est donc :

$$\boxed{\text{sur } \mathbb{C},\ \frac{2(X-2)}{(X^2+1)^2}=\frac{1-i/2}{(X-i)^2}+\frac{i}{X-i}+\frac{1+i/2}{(X+i)^2}-\frac{i}{X+i}.}$$

8. Calculer : $$I=\int_0^2\frac{x^2\,dx}{(x-3)(x+1)}$$ et $$J=\int_0^1\frac{dx}{(x-2)(x^2+1)}$$

corrigé succinct :

Pour I, on commence par décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{x^2}{(x-3)(x+1)}=1+\dfrac{9/4}{x-3}-\dfrac{1/4}{x+1}$ (exercice !).

On vérifie que cette fonction est bien continue sur l'intervalle d'intégration $[0,2]$, de primitive $x+\dfrac{9}{4}\ln|x-3|-\dfrac{1}{4}\ln|x+1|$). L'intégrale vaut donc $I=2+[\dfrac{9}{4}\ln|x-3|-\dfrac{1}{4}\ln|x+1|]_0^2=2+\dfrac{9}{4}(\ln 1-\ln 3)-\dfrac{1}{4}(\ln 3+\ln 1)$, donc

$$\boxed{I=2-5\frac{\ln 3}{2}.}$$

De même pour J : $\dfrac{1}{(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{1/5}{x-2}+\dfrac{-x/5-2/5}{x^2+1}=\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x+2}{x^2+1})=\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x}{x^2+1})-\dfrac{2}{x^2+1}$.

Cette fonction est continue sur $[0,1]$, et une primitive est $\dfrac{1}{5}(\ln|x-2|-\ln(x^2+1)/2-2\arctan x)$, donc l'intégrale vaut $\dfrac{1}{5}(\ln 1-\ln 2/2-2\arctan 1-\ln 2+\ln 1+2\arctan 0)=\dfrac{1}{5}(-3\ln 2/2-\pi/2)$. Ainsi,

$$\boxed{J=-\frac{3\ln 2+\pi}{10}.}$$

9. Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y'-\dfrac{2y}{x}=0$ avec $y(1)=1$

corrigé succinct : L'équation se transforme en $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{x(x^2+1)}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2x}{x^2+1}$, soit en prenant une primitive de chaque côté : $\ln|y|=2\ln|x|-\ln(x^2+1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}+c$, et donc $y=C\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Si de plus on impose que $y(1)=1$, on obtient $C=2$, et donc $\boxed{y=\dfrac{2x^2}{x^2+1}.}$

10. * Déterminer P de degré 4 dont 1 est racine double et tel que 0 est racine triple de $P-2$.

corrigé succinct : On peut écrire, puisque 0 est racine triple de $P-2$: $P-2=aX^3(X-b)$, avec a,b à déterminer.

Ecrire que 1 est racine double de P revient à dire que $P(1)=0$ et $P'(1)=0$, ce qui donne les équations $-2=a(1-b)$ et $0=3a(1-b)+a$ donc $a-ab=-2$ et $4a-3ab=0$.

Ainsi, $a=6$ et $b=4/3$ et le polynôme cherché est $P=2+6X^3(X-4/3)$, donc

$$\boxed{P=6X^4-8X^3+2.}$$

exercices pratiques

1. * **Polynôme interpolateur de Lagrange**

Lors d'une expérience, la mesure d'une certaine quantité Q au cours du temps donne $Q(0)=1$, $Q(1)=2$, $Q(3)=5$. Trouver le polynôme Q de degré 2 qui coïncide avec ces mesures.

corrigé succinct : On cherche Q sous la forme aX^2+bX+c, et les conditions donnent donc le système

$$\begin{cases} c=1\\ a+b+c=2\\ 9a+3b+c=5\end{cases}$$

dont la solution est $(a,b,c)=(1/6,5/6,1)$.

Ainsi, $\boxed{Q=\dfrac{X^2+5X+6}{6}.}$