TD 3 : Variables aléatoires : corrigé

1. 5% des interrupteurs sortant d'une chaîne de production sont défectueux. On en prend deux au hasard. Soit X la variable aléatoire nombre d'interrupteurs défectueux dans l'échantillon prélevé.
   Donner la loi de probabilité de X, tracer sa fonction de répartition et calculer $E(X)$ et Var(X).

   corrigé succint : Les trois résultats possibles sont :
   « deux interrupteurs défectueux », de probabilité $0.05^2 = 0.0025$,
   « aucun interrupteur défectueux », de probabilité $0.95^2 = 0.9025$,
   « un seul interrupteur défectueux », de probabilité $1 - 0.95^2 - 0.05^2 = 0.095$.
   Alors $\boxed{E(X) = 0.0025 \times 2 + 0.095 = 0.1,}$ $E(X^2) = 0.0025 \times 4 + 0.095$, $E(X) = 0.105$, et donc $\boxed{\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0.095.}$
   Remarque : on peut aussi voir que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0.05$, donc $E(X) = np = 0.1$ et Var$(X) = np(1-p) = 0.1 \times 0.95 = 0.095$.

2. La distribution conjointe de deux variables aléatoires discrètes se présente comme suit :

$X \vert Y$	0	1	2
10	0	0.25	0
12	0.25	0	0.25
14	0	0.25	0

   (a) déterminer les distributions marginales, puis $E(X)$ et $E(Y)$.
   (b) Déterminer $E(X.Y)$ et la covariance de X et Y.
   (c) les deux variables sont-elles indépendantes ?

   corrigé succint : Pour trouver les $p(X = i)$ on additionne les coefficients $p(X = i, Y = j)$ pour $j = 0, 1, 2$: $\boxed{p(X = 10) = 0.25, p(X = 12) = 0.5, p(X = 14) = 0.25.}$
   De même, $\boxed{p(Y = 0) = 0.25, p(Y = 1) = 0.5, p(Y = 2) = 0.25.}$
   $E(X.Y) = 10p(X = 10, Y = 1) + 12p(X = 12, Y = 1) + 14p(X = 14, Y = 1) + 10p(X = 10, Y = 2) + 12p(X = 12, Y = 2) + 14p(X = 14, Y = 2) = 0.25 \times 10 + 0.25 \times 14 + 0.25 \times 24 = 12.$
   $E(X) = 12$ et $E(Y) = 1$, et donc $E(X.Y) = E(X).E(Y)$, mais pourtant $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes :}}$ on voit par exemple que $p(X = 10, Y = 0)$ n'est pas égal à $p(X = 10)p(Y = 0)$.

3. Deux systèmes de contrôle opèrent indépendamment et sont sujets à un certain nombre de pannes.
   On donne les lois de probabilité marginales régissant le nombre de pannes par jour de chaque système :

Système X			Système Y	
x_i	$f_X(x_i)$		y_i	$f_Y(y_i)$
0	0.07		0	0.10
1	0.35		1	0.20
2	0.34		2	0.50
3	0.18		3	0.17
4	0.06		4	0.03

   (a) Donner les probabilités des événements :
   « Y a au moins 2 pannes par jour » ;
   « le nombre de pannes de X est strictement inférieur à 2 et celui de Y supérieur ou égal à 3 » ;
   « il se produit une seule panne pendant la journée » ;
   « X a le même nombre de pannes que Y ».
   (b) Déterminer la distribution conjointe de X et Y et la loi conditionnelle du nombre de pannes par jour du système X sachant que le nombre de pannes par jour du système Y est 1.
   (c) Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, Var(X),Var(Y), Var$(X+Y)$.
   (d) Quelle est la covariance de X et Y ?

   corrigé succint :

   (a) $p(Y \geq 2) = p(Y = 2) + p(Y = 3) + p(Y = 4)$, $\boxed{p(Y \geq 2) = 0.7.}$
   $p(X < 2, Y \geq 3) = p(X < 2)p(Y \geq 3) = (0.07 + 0.35)(0.17 + 0.03)$, donc $\boxed{p(X < 2, Y \geq 3) = 0.084.}$
   $p(X + Y = 1) = p(X = 0, Y = 1) + p(X = 1, Y = 0)$ donc $\boxed{p(X + Y = 1) = 0.049.}$

$p(X=Y)=p(X=0,Y=0)+\ldots+p(X=4,Y=4)$, donc $\boxed{p(X=Y)=0.2794.}$

(b) La distribution conjointe de X et Y est donnée par le tableau donc les cases sont les $p(X=i)\times p(Y=j)$:

$X\|Y$	0	1	2	3	4
0	0.007	0.014	0.035	0.0119	0.0021
1	0.035	0.07	0.175	0.0595	0.0105
2	0.034	0.068	0.17	0.0578	0.0102
3	0.018	0.036	0.09	0.0306	0.0054
4	0.006	0.012	0.03	0.0102	0.0018

et la loi conditionnelle de X sachant que $Y=1$ est simplement la loi de X, car X et Y sont indépendantes.

(c) $\boxed{E(X)=1.81,}$ $\boxed{E(Y)=1.83,}$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, donc $\boxed{E(X+Y)=3.64,}$ $\boxed{\mathrm{Var}(X)=1.0139,}$

$\boxed{\mathrm{Var}(Y)=0.8611.}$

Comme X et Y sont indépendantes, $\boxed{\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y),}$ donc

$\boxed{\mathrm{Var}(X+Y)=1.875.}$

(d) Comme X et Y sont indépendantes, cov(X,Y)=0.

4. Si $k>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$. $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-kx} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$ est-elle une densité de probabilité ?
Calculer son espérance, $p([-1;1])$, $p([1,3])$ et $p(]1;+\infty[)$.

corrigé succint : f est une densité de probabilité si elle est positive et d'intégrale 1. Or f est positive, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-kx}dx=[-\lambda e^{-kx}/k]_0^{+\infty}=\lambda/k$.

Donc f est une densité de probabilité si et seulement si $\boxed{\lambda=k.}$

Alors la fonction de répartition est

$\boxed{F(x)=0 \text{ si } x\leq 0, \text{ et } F(x)=\int_0^x ke^{-kt}\,dt=1-e^{-kx} \text{ si } x\geq 0.}$

On en déduit les probabilités cherchées : $\boxed{p([-1,1])=F(1)-F(-1)=1-e^{-k},}$

$\boxed{p([1,3])=F(3)-F(1)=e^{-k}-e^{-3k},}$ et $\boxed{p(]1,+\infty])=1-F(1)=e^{-k}}$.

L'espérance se calcule en intégrant par parties :
$E=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\,dt=\int_0^{+\infty}kte^{-kt}\,dt=[-te^{-kt}/k]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-kt}\,dt$, donc

$\boxed{E=1/k.}$

5. Une variable aléatoire X a pour densité $f_X(x)=\dfrac{e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$.
Calculer $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

corrigé succint : L'exercice ne pose pas de difficulté si on admet que $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$.

En effet, $E(X)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-1)^2}{4}}\,dx$, soit avec le changement de variable $y=\dfrac{x-1}{2}$: $E(X)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(2y+1)e^{-y^2}2dy=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(2y+1)e^{-y^2}dy$. Mais $\int_{-\infty}^{+\infty}ye^{-y^2}dy=0$ (la fonction intégrée est impaire,) et $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$, donc

$\boxed{E(X)=1.}$

D'autre part, $E(X^2)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}\,dx$, soit après changement de variable $x=2y+1$, $E(X^2)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(2y+1)^2e^{-y^2}\,dy$, et comme $(2y+1)^2=4y^2+4y+1$, on en déduit que

$E(X^2)=\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2e^{-y^2}dy+1=\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}[-ye^{-y^2}/2]_{-\infty}^{+\infty}+\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy+1=3$,

donc $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E(X)^2=2$, et donc $\boxed{\mathrm{Var}(X)=2, \sigma(X)=\sqrt{2}.}$

6. Soient X et Y deux variables aléatoires de densité conjointe $f(x,y)=e^{-(x+y)}$ si $x\geq 0$ et $y\geq 0$, 0 sinon.
Vérifier que f est une densité, donner les densités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.
Montrer que X et Y sont indépendantes, puis calculer $p(\{X>2\}\cap\{Y>3\})$ et $p(\{X>2\}\cup\{Y>1\})$.

corrigé succint : La fonction est positive, et $\int\int_{\mathbb{R}^2}f=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}\,dxdy=\int\int_0^{+\infty}e^{-x}e^{-y}\,dxdy=(\int_0^{+\infty}e^{-x}dx)(\int_0^{+\infty}e^{-y}dy)=([-e^{-x}]_0^{+\infty})^2=1$.
La densité marginale en x est si $x\geq 0$ $f_X(x)=\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dy=[-e^{-(x+y)}]_0^{+\infty}=e^{-x}$, et nulle sinon.
De même, $f_Y(y)=0$ pour $y<0$ et si $y\geq 0$, $f_Y(y)=e^{-y}$. Le produit des densités $f_X(x)f_Y(y)$ est bien égal à $f(x,y)$, donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$

X et Y étant indépendantes, on peut s'épargner le calcul d'intégrales doubles pour obtenir $p(\{X>2\}\cap\{Y>3\})=p(\{X>2\})\times p(\{Y>3\})=e^{-2}\times e^{-3}=e^{-5}$, et $p(\{X>2\}\cup\{Y>1\})=1-p(\{X\leq 2\}\cap\{Y\leq 1\})=1-(1-e^{-2})(1-e^{-1})=-e^{-3}+e^{-2}+e^{-1}$.