TD 4 : Dérivation et développements limités - corrigé

exercices théoriques

1. Calculer la dérivée des fonctions définies par :
$$a(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad b(x) = \arccos x \quad , \quad c(x) = \arcsin\sqrt{1+x}.$$

corrigé succinct : On peut dériver en exprimant $a(x)$ comme le produit $x(x^2+1)^{-1/2}$:
$$a'(x) = (x^2+1)^{-1/2} + x(-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-3/2} \times 2x).$$
Pour simplifier l'expression, on factorise le x^2+1 qui intervient avec le plus bas degré :
ainsi, $\boxed{a'(x) = (x^2+1)^{-3/2}(x^2+1-x^2) = (x^2+1)^{-3/2}.}$

La dérivée de arccos est une dérivée de cours, à connaître. Pour démontrer cette formule on part de la relation $\cos\arccos x = x$, que l'on dérive : on obtient $\arccos' x \times (-\sin\arccos x) = 1$, et comme $\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}$, on obtient
$\boxed{b'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.}$ (on rappelle que de même $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ce qui sera utile pour dériver c à la question suivante.

$D_c = [-1;0]$, $D_{c'} =]-1;0[$, et sur $D_{c'}$, et par dérivation de fonctions composées
$$c'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x})}{\sqrt{1-\sqrt{1+x}^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{1-(1+x)}}, \text{ donc } \boxed{c'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{-x}}.}$$

2. Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions :
$$a(x) = \cos x \quad , \quad b(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad c(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$$

corrigé succinct : La dérivée de $x \mapsto \cos(x)$ est $-\sin(x) = \cos(x+\pi/2)$ (utiliser un cercle trigonométrique !). Donc par récurrence immédiate,
$$\boxed{a^{(n)}(x) = \cos^{(n)}(x) = \cos(x+n\pi/2).}$$
De même $\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x}) = (-1)(-2)\times\ldots\times(-n)x^{-n+1}$, donc $\boxed{b^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.}$

On procède de même pour c : $c'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $c''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, et finalement : $\boxed{c^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}.}$

3. (a) Etudier la fonction **cosinus hyperbolique** $\text{ch}\, x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
   (b) Montrer en particulier que ch réalise une bijection entre $[0;+\infty[$ et $[1;+\infty[$. On appelle **argument cosinus hyperbolique** et on note argch sa réciproque.
   (c) Etudier argch ; préciser en particulier sa dérivée.
   (d) Montrer que pour tout $x \geq 1$, argch $x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

(a) On définit de même la fonction **sinus hyperbolique** $\text{sh}\, x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Alors on constate que ces fonctions sont définies, continues, dérivables sur $\mathbb{R}$, et que $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$ (et de même $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$.)
De plus, le signe de sh est facile à déterminer : $(e^x - e^{-x})/2 > 0$ si et seulement si $e^x > e^{-x}$ soit en prenant le logarithme, qui est une fonction strictement croissante : $x > -x$, donc $2x > 0$: sh est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
(on remarque aussi que ch est paire, et sh est impaire).

(b) Comme ch est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, que $\text{ch}(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$, on en déduit que ch réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$: tout élément $y \in [1,+\infty[$ est l'image par ch d'un unique élément x de $[0,+\infty[$.
On note cet élément argch y.

(c) On a donc par définition ch argch $y = y$, et en dérivant cette relation on en déduit $\text{ch}'(\text{argch}\, y) \times \text{argch}'y = 1$, donc $\text{argch}'y = 1/\text{sh}(\text{argch}\, y)$.
Mais il est facile de vérifier, en développant les formules définissant ces fonctions par des exponentielles, que $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ pour tout x. Alors en remplaçant x par argch y on obtient donc $y^2 - \text{sh}^2\text{argch}\, y = 1$, et donc $\text{sh}^2\text{argch}\, y = y^2-1$. Comme sh est positive sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\text{sh}\,\text{argch}\, y = \sqrt{y^2-1}$, et finalement pour tout $y > 1$,
$\boxed{\text{argch}'y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.}$: argch est strictement croissante de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

(d) Le plus simple, pour prouver que argch $x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ si $x \geq 1$, est de montrer que ces deux fonctions ont la même dérivée et même valeur en 0 : la dérivée de $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ est $\frac{1+2x/2\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} =$ argch'(x), et les valeurs en 1 sont toutes les deux nulles.

4. (a) Si on pose pour $x > 0$ $y = x^2$, déterminer la différentielle dy en fonction de x et dx, puis exprimer dx en fonction de y et dy.

(b) Même question avec $y = \tan x$ pour $-\pi/2 < x < \pi/2$.

corrigé succinct : ces calculs se ramènent à des calculs de dérivées :

(a) si $y = x^2$, $\dfrac{dy}{dx} = y'(x) = 2x$, donc $\boxed{dy = 2xdx.}$ Mais comme $x > 0$, $x = \sqrt{y}$ et donc $dx = dy/2x$, donc $\boxed{dx = \dfrac{dy}{2\sqrt{y}}.}$

(b) De même $\boxed{dy = (1+\tan^2 x)dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x},}$ et par conséquent $\boxed{dx = \dfrac{dy}{1+y^2}.}$

5. Existence et valeur des extrema des fonctions : $a(x) = x(3-x)$,

$$b(x) = \frac{4x^2 - 3x - 1}{4x^2 + 1}, \qquad c(x) = \sqrt{1 + \sin x}, \qquad d(x) = \arctan(x^2)$$

corrigé succinct : il est possible de traiter ces trois exercices par une étude complète de ces fonctions et tableau de variations, en utilisant les dérivées premières et seconde. Le corrigé qui suit propose des rédactions "minimales", ne donnant que les arguments strictement nécessaires.

a : a tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$, elle n'a donc pas de minimum global, et le maximum est atteint pour une valeur de x qui annule la dérivée $3 - 2x$. Comme la dérivée ne s'annule qu'en $x = 3/2$, $\boxed{\text{le maximum est atteint en } 3/2 \text{ et vaut } 9/4.}$

b : les limites de b en $+\infty$ et $-\infty$ valent 1. La dérivée s'annule pour $x = -3/2$ et $x = 1/6$, les valeurs correspondantes $5/4$ et $-5/4$ sont donc respectivement les maximum et minimum :

$\boxed{\text{le maximum de } b \text{ vaut } 5/4, \text{ atteint en } -3/2\,; \text{ le minimum vaut } -5/4, \text{ atteint en } 1/6.}$

c : sans calcul... sin est compris entre -1 et 1, donc $\sqrt{1+\sin x}$ est compris entre 0 et $\sqrt{2}$, et ces valeurs sont atteintes : en les $-\pi/2 + 2k\pi$ pour 0 et en les $\pi/2 + 2k\pi$ pour le $\sqrt{2}$. Ainsi,

$\boxed{\text{le minimum de } c \text{ est 0 et le maximum } \sqrt{2}.}$

d : x^2 est postif donc $d(x)$ est à valeurs dans $[0, \pi/2[$. La dérivée $d'(x) = 2x/(1+x^4)$ ne s'annule qu'en 0, donc le seul extrema est $d(0) = 0$ (c'est bien un minimum). La limite en $+\infty$ et $-\infty$ n'est pas un maximum car la valeur $\pi/2$ n'est pas une valeur prise par d.

6. On définit le « sinus cardinal » par $\text{sinc}x = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $\text{sinc}0 = 1$.

(a) Quel est le maximum de f ?

(b) Démontrer que $\tan x = x$ admet une unique solution a_k sur chaque intervalle $](2k-1)\pi/2; (2k+1)\pi/2[$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) En déduire que sinc$'$ s'annule une fois et une seule sur chacun de ces intervalles.

(d) Calculer sinc$''$ en fonction de sinc et sinc$'$. En déduire que les a_k sont alternativement des maxima et des minima locaux.

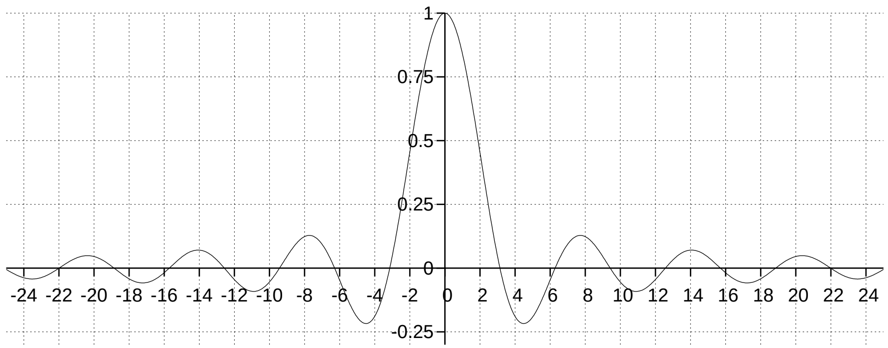
corrigé succinct : sinc est continue sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On admet qu'elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la dérivée n-ième en 0 est la limite de la dérivée n-ième autour de 0.

On calcule les dérivées $\text{sinc}'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ et $\text{sinc}''(x) = -\text{sinc}(x) - \dfrac{2}{x}\text{sinc}'(x)$.

$\text{sinc}'(x) = 0$ équivaut à $x = \tan x$: sinc$'$ a donc un unique zéro a_k dans chaque intervalle de largeur π $](2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}[$. De plus, sinc étant paire, $a_k = a_{-k}$ pour tout $k \neq 0$,.

On note que $a_0 = 0$, $\text{sinc}(0) = 1$; $a_1 = -a_{-1} \simeq 4,4934$, $\text{sinc}(a_1) \simeq -0,2172$; $a_2 = -a_{-2} \simeq 7,7253$, $\text{sinc}(a_2) \simeq 0,1284$.

On constate que $\text{sinc}''(a_k)$ est non nul (car $\text{sinc}(a_k) \neq 0$), donc en chaque a_k la dérivée s'annule et change de signe : chaque a_k est un extrema local strict. Plus précisément, a_0, a_2, ..., a_{2k} sont des maxima locaux et a_1, a_3, ..., a_{2k+1} sont des minima locaux.



7. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x) - 1}{\arctan(x^2)}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \sin(x/2)}{x^2}$ (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$

corrigé succinct :

(a) Au voisinage de 0, $\cos(x) = 1 - x^2/2 + ..$, donc $\dfrac{\cos(x) - 1}{x} = -x/2 + ..$: la limite est 0.

(b) On peut commencer par exprimer la différence en réduisant les fractions au même dénominateur pour se ramener à une forme indéterminée du type "0/0" : $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$. On peut alors écrire un développement limité du dénominateur et du numérateur avec un terme non nul : $x - \sin x = x^3/6 + x^3\epsilon(x)$ et $x \sin x = x^2 + x^2\epsilon(x)$, donc $\frac{x - \sin x}{x \sin x} = x/6 + x\epsilon(x)$, et ainsi $\boxed{\text{la limite est nulle.}}$

(c) Pour lever l'indétermination du type "0/0", il faut effectuer des développements limités du numérateur et du dénominateur ayant chacun un terme principal non nul (au moins). On peut ainsi, pour le dénominateur, écrire $\cos 2x - 1 = -4x^2/2 + x^2\epsilon(x)$ et $\arctan(x^2) = x^2 + \ldots$ Le quotient est donc de la forme $\frac{-4x^2/2 + x^2\epsilon(x)}{x^2 + ..} = \frac{-2 + \epsilon(x)}{1 + \epsilon(x)}$, et $\boxed{\text{la limite en 0 est } -2.}$

(d) Un développement limité d'ordre 2 du dénominateur suffira. Or $\sqrt{1+x} - 1 = x/2 - x^2/8 + x^2\epsilon(x)$ et $-\sin(x/2) = -x/2 + x^2\epsilon(x)$, donc $\boxed{\text{la limite cherchée est } -1/8.}$

(e) On peut additionner les fractions et faire un développement limité des numérateurs et dénominateurs. On peut aussi procéder ainsi : $\sin^2(x) = (x - \frac{1}{6}x^3 + x^4\epsilon(x))^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + x^4\epsilon(x)$, donc $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + x^2\epsilon(x)} - 1) = \frac{1}{x^2}(1 + \frac{1}{3}x^2 + x^2\epsilon(x) - 1) = \frac{1}{3} + \epsilon(x)$, $\boxed{\text{la limite cherchée est donc } 1/3.}$

8. Donner, en précisant leur position relative, les asymptotes aux courbes :

$$C_1 : y = x^3 \cos\frac{1}{x} - x^3 \quad C_2 : y = \frac{1 - 3x^2}{3 - 2x} \qquad C_3 : y = \sqrt{2x^2 - x + 1}$$

corrigé succinct :

C_1 : de même on constate qu'en l'infini, en utilisant un développement limité d'ordre 4 en 0 de $\cos u$ puis en remplaçant u par $\frac{1}{x}$ on obtient

$x^3 \cos\frac{1}{x} - x^3 = -\frac{x}{2} + \frac{1}{24x} + \frac{1}{x}\epsilon(\frac{1}{x})$, donc $\boxed{y = -\frac{x}{2} \text{ est asymptote}}$, située au dessus de C_1 en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.

C_2 : pour pouvoir utiliser les calculs usuels de développements limités, on commence par faire apparaître des $1/x$ en factorisant x^2 au dénominateur et x au numérateur :

$$\begin{aligned} \frac{1-3x^2}{3-2x} &= \frac{-3x^2}{-2x} \times \frac{1-1/(3x^2)}{1-1/(2x)} \\ &= \frac{3x}{2}\left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{23}{12x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(1/x)\right) \\ &\text{(division selon les puissances croissantes)} \\ \frac{1-3x^2}{3-2x} &= \frac{3x}{2} + \frac{9}{4} + \frac{69}{24x} + \frac{1}{x}\epsilon(1/x) \end{aligned}$$

donc la droite d'équation $y = \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}$ est asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$, située au dessus de C_2 en $+\infty$, au dessous en $-\infty$.

De plus on a évidemment une asymptote verticale pour $x = 3/2$.

C_3 : on factorise $2x^2$ pour se ramener au développement limité de $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\epsilon(u)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - x + 1} &= \sqrt{2x^2}\sqrt{1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}} \\ &= \sqrt{2x^2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right)^2\epsilon\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right)\right) \\ &= \sqrt{2x^2}\left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}\right) - \frac{1}{8}\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(1/x) \\ \sqrt{2x^2 - x + 1} &= \sqrt{2x^2}\left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{7}{32x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(1/x)\right) \end{aligned}$$

Donc si x tend vers $+\infty$, $y = \sqrt{2}(x - \frac{1}{4} + \frac{7}{32x} + \frac{1}{x}\epsilon(1/x))$.

$\boxed{\text{La droite d'équation } y = \sqrt{2}(x - \frac{1}{4}) \text{ est donc asymptote en } +\infty}$, et $\boxed{C_3 \text{ est située au dessus de son asymptote}}$ (car le coefficient de $1/x$, $7/32$, est positif).

De même si x tend vers $-\infty$, $y = -\sqrt{2}(x - \frac{1}{4} + \frac{7}{32x} + \frac{1}{x}\epsilon(1/x))$. La droite d'équation $y = -\sqrt{2}(x - \frac{1}{4})$ est asymptote, et C_3 est située au dessus de son asymptote (car le coefficient de $1/x$ est négatif et $1/x$ est aussi négatif).

9. Donner les développements limités des expressions suivantes :

(a) $\sqrt{1 - 2x}$ en 0 à l'ordre 3

(b) $\frac{1}{2 - x}$ en 0 à l'ordre 4

(c) $3\ \sin 2x - 2\ \sin 3x$ en 0 à l'ordre 3

(d) $\frac{1}{3 + 2x^2}$ en 0 à l'ordre 6

(e) $\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2 + x^4}$ en 0 à l'ordre 3

(f) $\frac{1}{2 - x}$ en 1 à l'ordre 4

(g) $sin(x)$ à l'ordre 3 en $\pi/4$

corrigé succinct : (a) $\sqrt{1 - 2x} = (1 - 2x)^{1/2}$ donc en utilisant le développement limité de $(1 + t)^\alpha$ avec $t = -2x$ et $\alpha = 1/2$, on trouve

$$\boxed{\sqrt{1 - 2x} = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^3\epsilon(x).}$$

(b) $\frac{1}{2 - x} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1 - x/2}$, donc en utilisant le développement limité de $\frac{1}{1+t}$ (avec t=-x/2), on trouve $\frac{1}{2 - x} = \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 + (\frac{x}{2})^3 + (\frac{x}{2})^4 + x^4\epsilon(x))$. Après simplification,

$$\boxed{\frac{1}{2 - x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{32}x^4 + x^4\epsilon(x).}$$

(c) Il suffit d'utiliser deux fois le développement de sin pour trouver

$$\boxed{3\ \sin 2x - 2\ \sin 3x = 5x^3 + x^3\epsilon(x).}$$

(d) On utilise le développement d'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{1+t}$: en remplaçant t par $2x^2$ on obtient un développement limité d'ordre 6 en x, donc l'expression est après simplification

$$\boxed{\frac{1}{3+2x^2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{27}x^4 - \frac{8}{81}x^6 + x^6\epsilon(x).}$$

(e) On effectue la division selon les puissances croissantes à l'ordre 3, en supprimant tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 4, qui ne nous intéressent pas dans le cadre d'un DL d'ordre 3. Donc :
$1 - 3x + 2x^2 + x^3 = (1 - x^2)(1 - 3x + 3x^2 - 2x^3) + x^3\epsilon(x)$, et le développement limité cherché est ainsi $\boxed{\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2 + x^4} = 1 - 3x + 3x^2 - 2x^3 + x^3\epsilon(x).}$

(f) Attention ici, on cherche un développement limité en 1, autrement dit on cherche à approcher $\frac{1}{2-x}$ au voisinage de 1 par un polynôme de degré 4 en $(1-x)$: pour cela on écrit $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{1+(1-x)}$, et on utilise le développement limité de $\frac{1}{1+t}$ en remplaçant t par $1-x$ (c'est possible car si x tend vers 1, t tend vers 0) : ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{2-x} = 1 - (1-x) + (1-x)^2 - (1-x)^3 + (1-x)^4 + (1-x)^4\epsilon(1-x).}$$

10. Donner un équivalent en $+\infty$ des fonctions suivantes :
$a(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \sin\frac{1}{x}$, $b(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$, $c(x) = \sqrt{5x^3 - 2x}$.

corrigé succinct : $a(x) \sim -\frac{1}{2x^2}$; $b(x) =\sim -\frac{1}{2}$; $c(x) \simeq \sqrt{5}x^{3/2}$.

exercices pratiques

1. **Un problème d'optimisation :** un fabricant produit des boîtes de conserve cylindriques, de volume 1 litre (et d'épaisseur fixe). Il souhaite utiliser le moins de métal possible : quelles dimensions doit-il choisir ?

corrigé succinct : $1l = 1$ dm^3, donc si h et r sont la hauteur et le rayon de la boîte, exprimés en décimètres, ils vérifient la relation $\pi r^2 h = 1$.

La surface de métal nécessaire est donc $2\pi rh + 2\pi r^2$ (le corps de la boîte, le couvercle et le fond), que l'on peut exprimer en fonction de r uniquement, en remplaçant h par son expression en fonction de r : $S(r) = 2/r + 2\pi r^2$.

On voit que si r tend vers 0 ou vers l'infini, $S(r)$ tend vers l'infini. Le minimum de la fonction est donc donné par $S'(r) = 0$ soit $-1/r^2 + 4\pi r = 0$, soit encore $2\pi r^3 = 1$, et $r = (2\pi)^{-1/3}$. Donc $h = (\frac{4}{\pi})^{1/3}$. A.N :

$$\boxed{r = 0.54 \text{ dm} = 5.4 \text{ cm},\ h = 1.08 \text{ dm} = 10.8 \text{ cm}.}$$

2. **Calcul d'erreur et différentielles :** si l'on mesure 1cm près 20cm pour rayon d'une boule, quel est le volume estimé ? Quelles sont les imprécisions absolue et relative sur cette détermination du volume ?

corrigé succinct :

On sait que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Les incertitudes sur R et V étant "petites", on les assimile aux différentielles dR et dV, que l'on peut relier par la formule $dV = 4\pi R^2 dR$.

Par conséquent, le volume estimé est $\boxed{V \simeq 33510 \text{ cm}^3 \simeq 33.5 \text{ l},}$ avec une incertitude de $\boxed{dV = 5027 \text{ cm}^3 \simeq 5 \text{ l}.}$ L'incertitude relative sur la mesure du rayon est $\frac{dR}{R} = 1/20 = 5\%$, et l'incertitude relative sur la mesure du volume est par conséquent $\boxed{\frac{dV}{V} = 3\frac{dR}{R} = 15\%.}$

3. *** Validité de l'approximation des petits angles :**
On souhaite estimer la validité de l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$.
   (a) Montrer que pour tout angle θ, $|\sin\theta - \theta| \leq |\theta|^3/6$.
   (b) Pour quels angles l'approximation est-elle valable à 10^{-2} près ?

corrigé succinct :

(a) On utilise la formule de Taylor-Mac Laurin à l'ordre 3 : $\sin\theta = 0 + \cos 0\ \theta - \sin 0\ \theta^2/2 - \cos u\ \theta^3/6$, avec $u \in [0;\theta]$, donc $|\sin\theta - \theta| \leq |\cos u||\theta|^3/6$ d'où le résultat car $\cos$ est à valeurs dans $[-1;1]$.

(b) il suffit de choisir θ tel que $\theta^3 = 6.10^{-2}$, soit $\theta = 0,391$ rad, soit en degrés : $\theta = 22,43^\circ$ (ATTENTION : pour pouvoir écrire $\sin x = x$ l'angle x doit être exprimé en radians ! ! !)

4. *** Circuit RLC parallèle :** tracer en fonction de ω la courbe représentant le module de l'impédance complexe d'un circuit R, L, C parallèle. Préciser ses asymptotes et leur position par rapport à la courbe.

corrigé succinct : On a $1/Z = 1/R + jC\omega + 1/(jL\omega)$ et donc $1/|Z| = \sqrt{(1/R)^2 + (C\omega - 1/(L\omega))^2}$.

$|1/Z|$ est minimal quand $C\omega = 1/(L\omega)$, i.e quand $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$.

Quand ω tend vers 0, on a $|1/Z| \sim 1/(L\omega)$ donc on a une asymptote verticale à la courbe en 0, et on peut même voir que l'hyperbole $1/(L\omega)$ est une asymptote (donnant un équivalent de meilleure précision).

Quand ω tend vers $+\infty$, un développement limité montre que $C\omega$ est asymptote à $1/|Z|$...