TD 4 : Lois usuelles : corrigé

1. La proportion de tubes défectueux produits par une entreprise est 2%.
   (a) Quelle est la loi du nombre de tubes défectueux dans un échantillon de 200 tubes ? Déterminer son espérance et sa variance.
   (b) Les conditions requises pour approcher cette loi par une loi de Poisson sont-elles satisfaites ?
   Calculer les probabilités d'obtenir un nombre de tubes défectueux :
   – nul
   – égal à 5
   – inférieur ou égal à 6
   – superieur ou égal à 10

corrigé succint :

(a) Il s'agit d'une $\boxed{\text{loi binomiale de paramètres 200 et 0.02}}$ (on répète 200 fois l'opération qui consiste à choisir au hasard un tube, et on compte le nombre total de tubes défectueux tirés).
Son espérance est $\boxed{E(X) = np = 4}$ et sa variance $\boxed{\text{Var}(X) = np(1-p) = 3.92.}$

(b) Le résultat 'choisir un tube défectueux' est intuitivement un évènement rare ; il serait donc logique d'approcher la loi par une loi de Poisson.
Comme $n \geq 30$, $p \leq 0.1$ et $np = 4 \leq 5$, les conditions énoncées dans le cours sont vérifiées, et on utilisera effectivement l'approximation par une $\boxed{\text{loi de Poisson de paramètre } \lambda = np = 4.}$
En utilisant l'approximation par une loi de Poisson de paramètre 4, on trouve donc :
– $\boxed{p(X = 0) = 0.0183}$
– $\boxed{p(X = 5) = 0.1563}$
– $\boxed{p(X \leq 6) = 0.8893}$
– $p(X \geq 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leq 9) = 1 - 0.9919$, $\boxed{p(X \geq 10) = 0.0081}$

2. Dans une banque, il y a 5% de chances pour qu'un client se présente au guichet durant un intervalle de 30 secondes. Quelle est la probabilité pour que 10 clients se présentent en une heure ? Pour que se présentent au moins 15 clients en une heure ?

corrigé succint : Si la probabilité qu'un client se présente durant un intervalle de 30 secondes est 0.05, le nombre moyen de clients par heure est $0.05 \times 3600/30 = 6$.

Par conséquent, on calcule les valeurs cherchées en utilisant la table de la loi de Poisson de paramètre 6 : $\boxed{p(X = 10) = 4.13\%}$, $\boxed{p(X \geq 15) = 1 - 0.9986 = 0.14\%.}$

3. Pour se prémunir contre les 10% défections tardives habituellement constatées, une compagnie aérienne pratique la surréservation : elle vend 270 billets pour 250 sièges dans un avion.
   Soit X la variable aléatoire « nombre de personnes ayant réservé qui se présentent pour embarquer ».
   (a) Quelle est la probabilité qu'une personne ayant acheté un billet se présente à l'embarquement ?
   (b) Montrer que X suit une loi binomiale, et que l'approximation par une loi normale est justifiée.
   (c) Quelle est la probabilité qu'exactement 250 personnes se présentent à l'embarquement ?
   Quelle est la probabilité que toute personne ayant réservé et se présentant soit assurée d'un siège ?

corrigé succint :

(a) C'est simplement $\boxed{p = 0.9,}$ puisque la compagnie constate 10% de défections.

(b) On répète 270 fois un "tirage au sort" pour déterminer si un passager se présente (avec une probabilité de 0.9), et l'on compte le nombre de passagers qui se présentent : X suit bien une loi binomiale de paramètres $n = 270$ et $p = 0.9$.
Comme $n > 50$ et et que $np(1-p) = 24.3$, on peut effectivement approcher la loi de X par une $\boxed{\text{loi normale de paramètres } np = 243 \text{ et } np(1-p) = 24.3.}$

(c) On souhaite déterminer $p(X = 250)$ et $p(X \leq 250)$; si on utilise l'approximation par la loi normale, on calcule en fait $p(249.5 \leq X \leq 250.5)$ et $p(X \leq 250.5)$.
Pour cela, on se ramène à une loi normale centrée réduite : $p(X \leq 250.5) = p(\frac{X-243}{\sqrt{24.3}} \leq \frac{7.5}{\sqrt{24.3}}) = p(\frac{X-243}{\sqrt{24.3}} \leq 1.52) \simeq 0.9357$, de même $p(X \leq 249.5) \simeq 0.905$ Ainsi,
$\boxed{\text{la probabilité que toute personne ayant réservé ait un siège est de } 93.57\%}$, et la probabilité qu'exactement 250 personnes se présentent est 0.03.

(remarque : un calcul exact donne, avec la loi binomiale, $p(X \leq 250) = 94.11\%$; par ailleurs un calcul de $p(X \leq 250)$ (et non 250.5) avec la loi normale donne une moins bonne approximation, 92.22%).

4. Un ascenseur supporte une charge de 800 kg. Le poids des utilisateurs est distribué selon la loi normale de paramètres $\mu = 80$ kg et $\sigma = 20$kg. Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter simultanément pour que la probabilité de surcharge ne dépasse pas 0.001 ?

corrigé succint : Si X est la variable aléatoire représentant le poids (la masse...) de n utilisateurs, X est la somme de n variables aléatoires indépendantes dont la loi est une loi normale de paramètres $\mu = 80$ kg et $\sigma^2 = 400$kg. Par conséquent, la loi de X est aussi une loi normale, de paramètres $80n$ et $400n$.

On souhaite avoir $p(X > 800) \leq 0.001$, soit $p(X < 800) \geq 0.999$.

Mais $p(X < 800) = p(\dfrac{X - 80n}{\sqrt{400n}} < \dfrac{800 - 80n}{\sqrt{400n}})$, donc d'après la table de la loi normale centrée réduite, on en déduit que $\dfrac{800 - 80n}{\sqrt{400n}} \geq 3.08$, soit $80n + 61.6\sqrt{n} - 800 \leq 0$, soit enfin $4n + 3\sqrt{n} - 40 \leq 0$, donc en résolvant cette équation du second degré, $\sqrt{n} \leq 2.8$, $n \leq 7.84$, donc $\boxed{\text{le nombre maximal de personnes à admettre est 7.}}$