1. Dans un grand lot de pièces circulaires, on a prélevé au hasard 40 pièces dont on vérifie le diamètre.
   Les mesures (en cm) sont :

4.9	5.0	5.2	4.7	4.8	5.1	4.5	5.2	4.9	4.8
4.9	4.9	4.9	5.3	5.0	4.8	4.8	4.9	5.1	5.3
5.4	4.9	4.9	5.0	4.8	4.8	5.3	4.8	5.1	5.0
5.1	4.8	4.7	5.0	4.9	4.8	4.6	4.7	4.9	4.7

   Estimer par un intervalle de confiance 95% le diamètre moyen des pièces.

   corrigé succint :

   On trouve les estimations ponctuelles $\boxed{\bar{x} = 4.93}$, $\boxed{s = 0.202}$ et $\boxed{s^2 = 0.0406.}$

   L'effectif de l'échantillon étant « grand » (supérieur à 30), on peut considérer que $\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}-\mu}{s}$ suit une loi normale centrée réduite.

   Par conséquent, l'espérance de $\bar{X}$ sera dans 95% des cas dans l'intervalle $[\bar{x} - 1.96s/\sqrt{n}, \bar{x} + 1.96s/\sqrt{n}]$, soit ici dans l'intervalle $\boxed{[4.87, 4.99].}$

   (complément : estimation par intervalle de confiance de la variance : **Si** X **suit une loi normale**, on sait alors que $(n-1)s^2/\sigma^2$ suit une loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté, donc σ^2 est avec une probabilité de 95% dans l'intervalle $[(n-1)s^2/c_1^2, (n-1)s^2/c_2^2]$ pour $c_1^2 \simeq 59.342$ et $c_2^2 \simeq 24.433$ (lus dans la table du χ^2 à 40 degrés de liberté, car le formulaire ne donne pas la table à 39 degrés de liberté), soit $\boxed{\sigma^2 \in [0.0267, 0.0648].}$ Si on ne sait pas que X suit une loi normale, on ne peut rien dire...)

2. Des essais en laboratoire sur 20 lampes miniatures donnent les durées de vie suivantes, en heures :
   451, 412, 412, 375, 407, 454, 375, 393, 355, 364, 414, 413, 345, 432, 392, 329, 439, 381, 451, 413.
   On suppose la durée de vie distribuée normalement.
   (a) Donner l'estimation ponctuelle de la durée de vie moyenne et de sa variance pour l'ensemble de la production.
   (b) Estimer par un intervalle ayant un niveau de confiance de 95% la durée de vie moyenne.

   corrigé succint :

   (a) On trouve $\boxed{\bar{x} = 400.35}$, $\boxed{s = 36.01}$ et $\boxed{s^2 = 1297.}$

   (b) $\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}-\mu}{s}$ suit une loi de Student à 19 degrés de liberté, et donc l'espérance de $\bar{X}$ sera dans 95% des cas dans l'intervalle $[\bar{x} - t(0.95)s/\sqrt{n}, \bar{x} + t(0.95)s/\sqrt{n}]$, et on lit $t(0.95) = 2.093$ dans la table de la loi de Student à 19 degrés de liberté, donc l'intervalle cherché est $\boxed{[383.5, 417.2].}$

   (c) (complément : estimation de l'écart-type par intervalle de confiance : X suit une loi normale, donc $(n-1)s^2/\sigma^2$ suit une loi du χ^2 à $n-1$ degré de liberté, donc σ^2 est avec une probabilité de 95% dans l'intervalle $[(n-1)s^2/c_1^2, (n-1)s^2/c_2^2]$ pour $c_1^2 \simeq 32.8523$ et $c_2^2 \simeq 8.9065$ (lus dans la table du χ^2 à 19 degrés de liberté), soit $\sigma^2 \in [750.11, 2766.86]$, et donc l'écart-type a 95% de chances de vérifier $\boxed{\sigma \in [27.39, 52.6].}$)

3. (a) Sur un échantillon de 40 pièces fabriquées par une machine, 8 sont défectueuses. Trouver un intervalle de confiance à 95% de la proportion réelle de pièces défectueuses fabriquées par la machine.
   (b) Sur un échantillon de 300 pièces fabriquées par une machine, 60 sont défectueuses. Trouver les intervalles de confiance 95% et 99.7% de la proportion réelle de pièces défectueuses fabriquées par la machine.

   corrigé succint :

   (a) On admet que si la proportion de pièces défectueuses dans la population est p, la proportion F de pièces défectueuses dans un échantillon d'effectif n suit approximativement une loi normale $N(p, \dfrac{p(1-p)}{n})$.
   Par conséquent, $\dfrac{F-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$, et donc dans 95% des cas, $-1.96 \leq \dfrac{F-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq 1.96$.
   Si on approche l'écart-type $\sqrt{p(1-p)/n}$ par son estimation ponctuelle $\sqrt{0.2*0.8/40} = 0.089$, on obtient $p \in [0.2 - 1.96 \times 0.0632, 0.2 + 1.96 \times 0.0632]$, soit l'intervalle $\boxed{[0.076, 0.324].}$
   Cet intervalle n'a pas grand intérêt en pratique : savoir que la proportion de pièces défectueuses se situe entre 7% et 32% n'est pas un encadrement très utile..

   (b) De même, avec $n = 300$, on trouve les intervalles de confiance 95% $\boxed{[0.155, 0.245]}$ et 99.7% $\boxed{[0.131, 0.269].}$.
   Logiquement, l'augmentation de n aboutit à un encadrement bien plus précis.