TD 6 : Equations différentielles : corrigé

exercices théoriques

1. Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

(a) $y' = 3y$,

(b) $y' = 2\dfrac{y}{x} - 1$,

(c) $y' - xy = x$,

(d) $y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(e) $y' - 2xy = 3xe^{x^2}$

(f) $y' = xe^y$,

(g) $yy' = x$,

(h) $y' = \sqrt{y}$.

corrigé succinct : Les quatre premières équations sont des équations différentielles linéaires du premier ordre, dont le cours fournit une méthode systématique de résolution (qui se ramène à deux calculs de primitive : l'un lors de la résolution de l'équation sans second membre associée, l'autre dans l'utilisation de la méthode de variation de la constante).

Les trois dernières équations sont des équations non linéaires, mais à « variables séparables » : on peut les écrire sous la forme $y'f(y) = g(x)$ pour f et g deux fonctions. En considérant des primitives F et G de f et g, l'équation se ramène alors à résoudre $F(y) = G(x) + c$, qui n'est plus une équation différentielle mais une "simple" équation numérique.

(a) On a $y = ce^{3x}$, $c \in \mathbb{R}$ (c'est du cours de terminale...)

(b) On résoud d'abord l'équation sans second membre associée $y' = 2\dfrac{y}{x}$: elle entraîne que $y'/y = 2/x$, soit en prenant les primitives $\ln|y| = 2\ln|x| + c = \ln(x^2) + c$, donc $|y| = e^c e^{\ln(x^2)}$. Ainsi, $y = \pm e^c x^2$, donc y est de la forme $y(x) = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$.
Pour résoudre l'équation initiale, on sait qu'il suffit d'additionner une solution particulière à la solution générale de l'équation sans second membre. Et on peut bien sûr remarquer que x est une solution particulière : ainsi, la solution générale de l'équation est $\boxed{y(x) = Cx^2 + x, C \in \mathbb{R}.}$
Si on ne devine pas cette solution particulière, il faut alors utiliser la méthode de "variation de la constante". On cherche une solution y sous la forme $y(x) = C(x)x^2$ (on remplace la constante C apparue dans la résolution de l'équation sans second membre par une fonction $C(x)$). L'équation devient alors, en remplaçant y et y' par leur expression en fonction de C : $C'(x)x^2 + 2xC(x) = 2C(x)x^2/x - 1$, soit après simplification $C'(x) = -1/x^2$. Ainsi, $C(x) = 1/x + c$, et les solutions sont donc bien les $y(x) = C(x)x^2 = x + cx^2$, $c \in \mathbb{R}$.

(c) On résoud d'abord l'équation sans second membre associée $y' - xy = 0$: $y'/y = x$, $\ln|y| = x^2/2 + c$, $y = Ce^{x^2/2}$. Et on remarque ensuite que -1 est une solution particulière. La solution générale de l'équation est donc $\boxed{y(x) = -1 + Ce^{x^2/2}, C \in \mathbb{R}.}$

(d) On résoud l'équation sans second membre associée $y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = 0$, d'où $y'/y = -1/\sqrt{x}$, d'où $\ln|y| = -2\sqrt{x} + c$ et donc $y(x) = Ce^{-2\sqrt{x}}$. En remarquant alors que 1 est une solution particulière, on trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = 1 + Ce^{-2\sqrt{x}}, C \in \mathbb{R}.}$

(e) On résoud l'équation sans second membre $y' - 2xy = 0$, et on trouve $y(x) = Ce^{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. En l'absence de solution particulière "évidente" pour l'équation générale, on peut appliquer la méthode de variation de la constante : on cherche les solutions sous la forme $y(x) = Ce^{x^2}$, ce qui fournit l'équation $C'(x)e^{x^2} = 3xe^{x^2}$, donc $C'(x) = 3x$ et donc $C(x) = 3x^2/2 + c$. Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = (3x^2/2 + c)e^{x^2}.}$

(f) L'équation $y' = xe^y$ est équivalente à $y'e^{-y} = x$, donc a $-e^{-y} = x^2/2 + c$, soit encore à $\boxed{y(x) = -\ln(-x^2/2 - c), c \in \mathbb{R}.}$ Pour que les solutions soient définies, il faut donc que c soit strictement négatif, et la solution est alors définie sur $[-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}]$.

(g) $yy' = x$ devient $y^2/2 = x^2/2 + c$ donc $y^2 = x^2 + 2c$ d'où $\boxed{y(x) = \sqrt{x^2 + 2c}, c \in \mathbb{R}.}$

(h) L'équation s'écrit $y'/\sqrt{y} = 1$ d'où $2\sqrt{y} = x + c$ d'où $\boxed{y = (x + c)^2/4, c \in \mathbb{R}.}$

2. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

(a) $y'' = \omega^2 y$,

(b) $y'' + 2y' + y = 2$,

(c) $y'' + \omega^2 y = 1$,

(d) $y'' + 2y' + 5y = 5\cos x$,

(e) $y'' + y' - 2y = e^{-2x}$,

(f) $y'' + y' + y = 0$.

corrigé succinct :

(a) L'équation caractéristique associée est $X^2 - \omega^2 = 0$, donc les solutions sont $\pm\omega$, et les solutions de l'équation différentielle sont ainsi les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}.}$
(en posant $\alpha = A + B$ et $\beta = A - B$ on peut aussi écrire $y(x) = \alpha \mathrm{ch}\, x + \beta \mathrm{sh}\, x$, une autre forme parfois préférable pour les solutions de cette équation)
2A=a+b B=a-b

(b) On résoud d'abord l'équation homogène $y'' + 2y' + y = 0$, dont l'équation caractéristique est $X^2 + 2X + 1 = 0$ qui admet une solution unique $X = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont alors $y(x) = (Ax + B)e^x$.

Comme 2 est une solution constante "évidente", on en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = 2 + (Ax + B)e^x.}$

(c) L'équation caractéristique de l'équation sans second membre associée a pour solutions $i\omega$ et $-i\omega$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Comme d'autre part $1/\omega^2$ est une solution constante évidente de l'équation $y'' + \omega^2 y = 1$, les solutions de l'équation initiale sont les fonctions $\boxed{y(x) = 1/\omega^2 + A\cos\omega x + B\sin\omega x,\ A, B \in \mathbb{R}.}$

(d) L'équation caractéristique $X^2 + 2X + 5 = 0$ a pour solutions $-1 - 2i$ et $-1 + 2i$, donc l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 5y = 0$ a pour solutions les fonctions $y(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

On peut chercher une solution particulière « ressemblant » au second membre, qui est un $\cos x$: $a\cos x + b\sin x$. Alors l'équation devient $(-a\cos x - b\sin x) + 2(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x) = 5\cos x$. En identifiant les coefficients du sinus et du cosinus, on en déduit le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4a + 2b & = & 5 \\ -2a + 4b & = & 0 \end{array}\right.$, dont les solutions sont $a = 1$ et $b = 1/2$. $\cos x + \dfrac{\sin x}{2}$ est une solution particulière, et les solutions de l'équation initiale sont ainsi les fonctions $\boxed{y(x) = \cos x + \dfrac{\sin x}{2} + Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x.}$

(e) L'équation homogène $y'' + y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions $y(x) = Ae^{-2x} + Be^x$.

On peut chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = axe^{-2x}$. Alors $y'(x) = (a - 2ax)e^{-2x}$ et $y''(x) = (-4a + 4ax)e^{-2x}$, et l'équation devient donc $(-4a + 4ax) + (a - 2ax) - 2ax = 1$, soit $-4a + a = 1$, soit $a = -1/3$. $-xe^{-2x}/3$ est une solution particulière de l'équation, et les solutions sont ainsi de la forme $\boxed{y(x) = -xe^{-2x}/3 + Ae^{-2x} + Be^x.}$

(f) L'équation caractéristique associée est $X^2 + X + 1 = 0$. Son discriminant est -3, dont les racines sont $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, et par conséquent les solutions de l'équation différentielle sont $\boxed{y(x) = (A\cos(\sqrt{3}x/2) + B\sin(\sqrt{3}x/2))e^{-x/2}.}$

3. * Si f et g sont deux fonctions réelles, on pose

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t - s)\, ds.$$

On considère l'équation $y' + ay = f(t)$ (a constante, f fonction).

(a) Montrer que si $h(t) = e^{-at}$, $y = f * h$ est la solution de l'équation vérifiant $y(0) = 0$.

(b) Calculer y si f est la fonction qui vaut 1 sur $[0; 1]$ et 0 ailleurs.

corrigé succinct :

(a) Pour dériver y, on en cherche une expression simplifiée : $y(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)e^{-at}e^{as}\, ds = e^{-at}\int_0^t f(s)e^{as}$, qui est un produit de deux fonctions dont on connaît les dérivées. Ainsi, on vérifie que $\boxed{y'(t) = -ay(t) + f(t).}$

(b) Si f est la fonction qui vaut 1 sur $[0; 1]$ et 0 ailleurs, alors pour t négatif, $y(t) = 0$.

pour $0 \le t \le 1$, $y(t) = \int_0^t e^{-a(t-s)}\, ds = \dfrac{e^{-at} - 1}{a}$

pour $t \ge 1$, $y(t) = \int_0^1 e^{-a(t-s)}\, ds = \dfrac{1 - e^a}{a}e^{-at}$

4. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2\dfrac{y}{x^2} = 0$.

(a) Montrer que $y = \lambda x^2$ est solution de (E) pour tout λ réel.

(b) Chercher toutes les solutions de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x)x^2$.

corrigé succinct :

(a) si $y(x) = \lambda x^2$, $y''(x) = 2\lambda = 2y/x^2$, donc $y = \lambda x^2$ est bien solution de (E).

(b) On souhaite trouver une deuxième famille de solutions pour l'équation : pour cela, et bien qu'il s'agisse d'une équation différentielle du second ordre, on applique aussi ici une méthode de "variation de la constante", en cherchant y sous la forme $y(x) = \lambda(x)x^2$.

Alors $y'(x) = \lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x)$, et on vérifie que $y''(x) = \lambda''(x)x^2 + 4x\lambda'(x) + 2\lambda(x)$, donc l'équation (E) devient $\lambda''(x)x^2 + 4x\lambda'(x) = 0$, soit encore en simplifiant par x : $\lambda''(x) = -4/x\lambda'(x) = 0$, qui est une équation différentielle du premier ordre par rapport à la fonction λ'. On en déduit que $\ln|\lambda'(x)| = -4\ln|x|$, donc $\lambda'(x) = c/x^4$, $c \in \mathbb{R}$, donc $\lambda(x) = -\dfrac{c}{3x^3} + d$, $c, d \in \mathbb{R}$.

Ainsi, toutes les fonctions $\boxed{y(x) = -\dfrac{c}{x} + dx^2,\quad c, d \in \mathbb{R},}$ sont des solutions de (E).

Et on admettra que ce sont les seules, sur chaque intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

exercices pratiques

1. **Circuit LR série :** Le courant $i(t)$ qui circule dans un circuit LR soumis à une tension sinusoïdale vérifie l'équation $L\frac{di}{dt}+Ri=U_0\sin\omega t$. Déterminer i si $i(0)=0$.

   corrigé succinct : L'équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. La solution de l'équation sans second membre associée est $Ke^{-\frac{Rt}{L}}$. On peut chercher une solution particulière de la forme $A\cos\omega t+B\sin\omega t$. En intégrant dans l'équation, on obtient le système $\omega BL+RA=0$ et $-\omega AL+RB=U_0$, donc $B=\dfrac{RU_0}{(\omega L)^2+R^2}$ et $A=\dfrac{-L\omega U_0}{(\omega L)^2+R^2}$. On peut aussi écrire $A=U_0\cos\varphi$ et $B=U_0\sin\varphi$ avec $\varphi=\arccos(\dfrac{-L\omega}{(\omega L)^2+R^2})=\pi-\arctan(\dfrac{R}{L\omega})$, la solution particulière est alors $U_0\cos(\omega t-\varphi)$.

   La solution générale est donc $i(t)=Ke^{-\frac{Rt}{L}}+U_0\cos(\omega t-\varphi)$, $K\in\mathbb{R}$, et la solution particulière pour $i(0)=0$ est obtenue avec $K=-U_0\cos\varphi$, soit

   $$\boxed{i(t)=-U_0\cos\varphi\, e^{-Rt/L}+U_0\cos(\omega t-\varphi).}$$

2. * **Circuit LC série :** Le courant $i(t)$ qui circule dans un circuit LC soumis à une tension sinusoïdale vérifie l'équation $L\dfrac{d^2i}{dt^2}+\dfrac{i}{C}=\omega U_0\cos\omega t$. Déterminer i si $i(0)=0$ et $\dfrac{di}{dt}(0)=0$.

   corrigé succinct : La solution générale de l'équation sans second membre, qui est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, est $A\cos(\dfrac{t}{\sqrt{LC}})+B\sin(\dfrac{t}{\sqrt{LC}})$, $A,B\in\mathbb{R}$.

   Pour résoudre l'équation, il suffit donc d'en trouver une solution particulière. Si on la cherche sous la forme $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$, on obtient $-L\omega^2a\cos(\omega t)-L\omega^2b\sin(\omega t)+a\cos(\omega t)/C+b\sin(\omega t)/C=\omega U_0\cos(\omega t)$, et par conséquent on trouve $b=0$, $a=\dfrac{\omega CU_0}{1-LC\omega^2}$.

   La solution générale est donc de la forme $A\cos(\dfrac{t}{\sqrt{LC}})+B\sin(\dfrac{t}{\sqrt{LC}})+\dfrac{\omega CU_0}{1-LC\omega^2}\cos(\omega t)$.

   La condition initiale $i(0)=0$ implique $A+\dfrac{\omega CU_0}{1-LC\omega^2}=0$, la condition $i'(0)=0$ implique $B=0$, et donc finalement la solution cherchée de l'équation différentielle est

   $$\boxed{\frac{\omega CU_0}{1-LC\omega^2}(\cos(\omega t)-\cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})).}$$

3. **Parachute**

   (a) Résoudre l'équation différentielle $\dfrac{y'}{y^2-a^2}=b$ ($a>0$ et $b\in\mathbb{R}$)

   (b) Un parachutiste est freiné par la résistance de l'air, proportionnelle au carré de sa vitesse. On note $k=30$ Nm^{-2}s^2 ce coefficient de proportionnalité, et $m=80$ kg la masse du parachutiste.

      i. Montrer que sa vitesse v vérifie $v'=-\frac{k}{m}v^2+g$.

      ii. A $t=0$, ayant atteint en chute libre la vitesse de 250 km.h^{-1}, le parachutiste ouvre sa toile. Donner sa vitesse $v(t)$ pour $t>0$.

      iii. Quelle est la vitesse limite du mouvement ?

      iv. Au bout de combien de temps la vitesse est-elle devenue inférieure à 20 km.h^{-1} ?

   corrigé succinct :

   (a) On trouve en utilisant la décomposition en éléments simples $\dfrac{1}{y^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}(\dfrac{1}{y-a}-\dfrac{1}{y+a})$, on obtient l'équation $\dfrac{y-a}{y+a}=Ce^{2abx}$, $C\in\mathbb{R}$, soit finalement

   $$\boxed{y(x)=a\frac{1+Ce^{2abx}}{1-Ce^{2abx}}.}$$

   (b) i. cf.cours de mécanique en S2...

      ii. On applique la question préliminaire avec $y=v$, $x=t$, $a=\sqrt{mg/k}$, $b=-k/m$. Alors $\dfrac{1+C}{1-C}=v(0)/a$, d'où $C=\dfrac{-a+v(0)}{a+v(0)}$, donc avec $v(0)=250\text{km.h}^{-1}=69.44\text{m.sec}^{-1}$ on obtient $C=0.863$, et donc

      $$\boxed{v(t)=\sqrt{mg/k}\frac{1+\frac{v(0)-a}{a+v(0)}e^{-2\sqrt{kg/mt}}}{1-\frac{v(0)-a}{a+v(0)}e^{-2\sqrt{kg/mt}}}\simeq\frac{5.11+4.41e^{-3.83t}}{1-0.863e^{-3.83t}}.}$$

      iii. $\boxed{v_\infty=\sqrt{mg/k}\simeq 5.11m.s^{-1}=18.4km.h^{-1}.}$

      iv. On trouve $t\simeq 0.8$sec.