

exercices théoriques

1. Dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé on considère $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Calculer leurs normes, leur produit scalaire, l'angle qu'ils forment entre eux. Déterminer la projection de \vec{u} sur \vec{v} .

corrigé succinct : On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$, et de même $\|\vec{v}\| = \sqrt{6}$. Et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 2 \times 1 = 3$.

Mais on sait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$, donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 3/6 = 1/2$, et donc l'angle géométrique (\vec{u}, \vec{v}) vaut $\frac{\pi}{3}$.

Soit \vec{w} le projeté de \vec{u} sur \vec{v} . Alors \vec{w} est de la forme $\lambda\vec{v}$ et tel que $\vec{u} - \vec{w}$ soit orthogonal à \vec{v} :

ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{v} - \lambda\|\vec{v}\|^2 = 0$. $\lambda = \vec{u} \cdot \vec{v} / \|\vec{v}\|^2$, et donc le projeté de \vec{u} sur \vec{v} est $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$. Ici, c'est donc le vecteur $\vec{v}/2$.

2. Dans un repère orthonormé, on considère $\vec{u}(4, 2, -2)$ et $\vec{v}(-1, 3, 4)$. Déterminer de deux façons différentes un vecteur orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} .

corrigé succinct : On peut chercher un vecteur $\vec{w}(x, y, z)$ et écrire la condition d'orthogonalité avec le produit scalaire, pour obtenir un système de deux équations $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, d'où $4x + 2y - 2z = 0$ et $-x + 3y + 4z = 0$. Il y a une inconnue de trop : on peut fixer par exemple $z = 1$, alors $x = 1$, $y = -1$ (tout autre choix de z donne un vecteur colinéaires qui est, bien sûr, solution lui-aussi).

Plus direct, et plus simple : le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est automatiquement une solution : en effet, le produit vectoriel de deux vecteurs est toujours orthogonal à ceux-ci ! On calcule ainsi $\vec{u} \wedge \vec{v} = (14, -14, 14)$.

3. En repère orthonormé direct, on donne $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(0, -1, 1)$ et $\vec{w}(2, 1, 1)$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

corrigé succinct : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1, -1, -1)$ et $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (1, -1, -1) \cdot (2, 1, 1) = 0$.

4. (a) Soit (P) un plan, de vecteur normal \vec{n} , A un point de (P) . Soit M un point quelconque de l'espace. Donner une expression, à l'aide d'un produit scalaire, de la distance $d(M, P)$ de M à (P) .

- (b) Soit (D) une droite de vecteur directeur \vec{u} , A un point de (D) et M un point quelconque ; calculer $d(M, D)$. Applications numériques :

(D_1) définie par $A(1, 0, -1)$ et $\vec{u}(1, -2, 1)$, $M_1(1, -1, 3)$.

(D_2) intersection de $3x + 2y - z = 7$ et $x + 3y + z = 0$, $M_2(2, 1, -1)$.

corrigé succinct :

- (a) Notons H la projection orthogonale de M sur P . La distance $d(M, P)$ cherchée est alors MH .

Mais $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$, et donc $\vec{AM} \cdot \vec{n} = \vec{HM} \cdot \vec{n}$ (car \vec{AH} est un vecteur du plan P , donc est orthogonal à \vec{n}), et comme \vec{HM} et \vec{n} sont colinéaires, le produit scalaire $\vec{HM} \cdot \vec{n}$ vaut $\pm HM \|\vec{n}\|$. Ainsi, on a bien $HM = |\vec{AM} \cdot \vec{n}| / \|\vec{n}\|$, d'où

$$d(M, P) = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

- (b) Appelons H la projection orthogonale de M sur D . Alors MH est la distance cherchée. On peut décomposer le vecteur \vec{AM} en $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$, et on a $\vec{AM} \wedge \vec{u} = \vec{AH} \wedge \vec{u} + \vec{HM} \wedge \vec{u}$. Mais \vec{u} et \vec{AH} sont colinéaires, donc $\vec{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0} + \vec{HM} \wedge \vec{u}$. Et comme \vec{u} et \vec{HM} sont orthogonaux, finalement, $\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{HM}\| \cdot \|\vec{u}\|$. D'où

la formule
$$d(M, D) = \|\vec{HM}\| = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Pour le premier exemple, il s'agit d'une application directe de la formule précédente. On trouve $d(M_1, D_1) = \frac{\|(7, 4, 1)\|}{\|(1, -2, 1)\|} = \sqrt{11}$.

Dans le deuxième exemple, la difficulté est de trouver un vecteur directeur et un point de (D_2) . La droite est définie comme intersection de deux plans, plans dont les vecteurs normaux $(3, 2, -1)$ et $(1, 3, 1)$ sont orthogonaux à la direction de la droite. Par conséquent (cf. exercice T2), le vecteur $(3, 2, -1) \wedge (1, 3, 1) = (5, -4, 7)$ est un vecteur directeur de D .

Pour trouver un point de la droite, il faut fixer une de ses coordonnées librement puis résoudre un système pour trouver les deux autres. Par exemple cherchons le point A dont la cote z vaut 0 : ses coordonnées x et y vérifient $3x + 2y = 5$ et $x + 3y = 0$, d'où $x = 3$ et $y = -1$: $A(3, -1, 0)$.

Ainsi, $d(M_2, D_2) = \frac{\|(-10, -2, 6)\|}{\|(5, -4, 7)\|} = \sqrt{14}/3$.

exercices pratiques

1. Elingage

On attache une charge de masse $m = 50$ kg par deux câbles reliés de manière à faire un angle α entre eux, puis on suspend le tout par un autre câble.

On suppose que chaque câble, individuellement, supporte une masse de 50 kg. Le montage est-il solide ?

corrige succinct : On appelle \vec{P} le poids de la charge, \vec{T} la tension du câble principal, et \vec{T}_1 et

\vec{T}_2 les tensions des deux câbles de gauche et droite.

Alors $\vec{T} = -\vec{P}$ et $\vec{T} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$.

\vec{T}_1 et \vec{T}_2 ont la même composante verticale, donc $\|\vec{T}\|^2 = -\vec{T} \cdot (\vec{T}_1 + \vec{T}_2) = -2\vec{T} \cdot \vec{T}_1 = 2\|\vec{T}\| \cdot \|\vec{T}_1\| \cos(\alpha/2)$, et finalement $\|\vec{T}_1\| = \frac{mg}{2 \cos(\alpha/2)}$.

Pour que le système tienne, il faut que $\|\vec{T}_1\|$ soit supérieur à mg , donc $2 \cos(\alpha/2) \geq 1$, ce qui est possible si et seulement si $|\alpha/2| \leq \frac{\pi}{3}$ (car la fonction cosinus est décroissante) donc il faut et il suffit que l'angle α soit inférieur à $2\pi/3$, soit 120° .

2. Particule dans un champ magnétique

On fixe un repère orthonormé direct de l'espace.

Une particule de charge q , de masse m et de vitesse \vec{v} est soumise à un champ magnétique constant $\vec{B}(0, 0, B)$. Son mouvement est alors décrit par $m\vec{a} = \vec{F}$ (postulat fondamental de la dynamique), avec $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ la force de Lorentz.

On note $(x(t), y(t), z(t))$ les coordonnées de la particule en fonction du temps, $(v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ leurs dérivées (les coordonnées de \vec{v}) et $(a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ les coordonnées de l'accélération.

- Prévoir, sans calcul, l'allure de la trajectoire de la particule.
- En projetant sur les trois axes le postulat fondamental de la dynamique $m\vec{a} = \vec{F}$, écrire les trois équations vérifiées par v_x, v_y, v_z et leurs dérivées.
- A l'aide de la troisième de ces équations, déterminer v_z , puis z .
- En dérivant la première équation, puis en combinant le résultat avec la deuxième, déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par v_x . En déduire v_x , puis x .
- En déduire v_y , puis y , et retrouver le résultat du 2a.

corrige succinct :

(a)

- (b) On calcule $\vec{F} = (qBv_y, -qBv_x, 0)$. Comme $m\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt})$, on obtient le système :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qBv_y \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

- (c) v_z est donc constante, et donc z est de la forme $z(t) = z(0) + v_z t$.

- (d) En dérivant deux fois v_x on a : $\frac{d^2 v_x}{dt^2} = qB \frac{dv_y}{dt} = -(qB/m)^2 v_x$.

Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants. Elle admet donc comme solution $v_x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, où $\omega = qB/m$ et A, φ sont des paramètres réels.

Ainsi, $x(t) = K + \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$, $K \in \mathbb{R}$.

- (e) On obtient en dérivant $mv_y = -\frac{1}{qB} A \omega \sin(\omega t + \varphi)$, soit $v_y = -A \sin(\omega t + \varphi)$, et

donc $y(t) = L + \frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$, $L \in \mathbb{R}$.

Ainsi selon x et y la particule décrit un cercle (x et y sont respectivement un sinus et un cosinus de même amplitude, même pulsation, même phase), alors que selon z elle a un mouvement rectiligne uniforme : finalement, la particule dans ce champ magnétique décrit une hélice.

3. * Force de Coriolis

Soit $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de la Terre. Déterminer ses coordonnées dans un repère bien choisi.

Tout mobile de masse m se déplaçant à la vitesse \vec{v} subit la force de Coriolis $\vec{F} = 2m\vec{v} \wedge \vec{\Omega}$. Décrire, puis calculer la force de Coriolis exercée sur un planeur de 320 kg volant dans l'hémisphère nord à 100 km/h d'ouest en est. La comparer à la force de pesanteur. Que se passe-t-il si le trajet a lieu d'est en ouest ? Ou dans l'hémisphère sud ?

corrige succinct : On fixe un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ "naturel" : le centre O est le centre de la Terre, \vec{k} dirige l'axe de rotation de la Terre, de sens Sud-Nord, et \vec{i}, \vec{j} sont des vecteurs du plan de l'équateur.

Alors dans ce repère, $\vec{\Omega}$ a pour coordonnées $(0, 0, \omega)$ où ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre, soit $\frac{2\pi}{86400}$ rad/s.

La force subie par le planeur est orthogonale à sa trajectoire et à l'axe de la Terre, et orientée de telle manière que $(\vec{v}, \vec{\Omega}, \vec{F})$ soit direct : la force est orientée vers la droite du planeur, et cela, que le planeur se déplace d'ouest en est, ou d'est en ouest, dans l'hémisphère nord.

Dans l'hémisphère sud, le planeur est dévié vers la gauche.

On calcule l'intensité de la force : \vec{v} et $\vec{\Omega}$ étant orthogonaux, $\|\vec{F}\| = 2mv\omega$, soit ici 1, 293 N, alors que la force de pesanteur est de mg , soit 3139 N : la force de Coriolis est très faible devant la pesanteur...mais ses effets ne sont pas pour autant négligeables.