TD 8 : Matrices : corrigé

exercices théoriques

1. Calculer, quand c'est possible, les sommes $A+B$ et les produits AB :

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

   (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   corrigé succinct :

   (a) On ne peut calculer $A+B$, et le produit AB vaut $AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

   (b) On ne peut calculer $A+B$, et le produit AB vaut $AB = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) On ne peut calculer ni $A+B$, ni AB (le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B).

   (d) On calcule $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - A - 2I = 0$.

   (b) En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

   (c) Résoudre les équations $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $AY = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (d) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.

   (e) On pose $P(X) = X^2 - X - 2$.
   Déterminer le reste de la division selon les puissances décroissantes de X^5 par P. En déduire l'expression de A^5.

   corrigé succinct :

   (a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -18 & -17 & 9 \\ -30 & -30 & 16 \end{pmatrix}$ et donc $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$.

   (b) On a donc $\dfrac{A^2 - A}{2} = I$, donc $A\dfrac{A-I}{2} = \dfrac{A-I}{2}A = I$, l'inverse de A est la matrice $\dfrac{A-I}{2}$, que l'on calcule directement : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ -9 & -10 & 9/2 \\ -15 & -15 & 13/2 \end{pmatrix}$.

   (c) A est inversible donc $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ équivaut à $A^{-1}AX = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $IX = X = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -29/2 \\ -47/2 \end{pmatrix}$. De même, $AY = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ équivaut à $Y = A^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, soit $Y = \begin{pmatrix} -7 \\ 26 \\ 41 \end{pmatrix}$.

   (d) Première méthode : on cherche λ tel que $AX = \lambda X$ ait une solution non nulle. On doit donc résoudre un système avec un paramètre...c'est possible mais long.
   Deuxième méthode : si $AX = \lambda X$, $A^2X = \lambda^2 X$ donc $(A^2 - A - 2I)X = (\lambda^2 - \lambda - 2)X = 0$, et donc $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Ainsi, les seuls candidats pour être valeur propre sont $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$.
   Il suffit alors de résoudre les systèmes $AX = -X$ et $AX = 2X$. Si on note (x, y, z) les coordonnées de X, le premier système est donc $\begin{cases} 6x + 6y - 3z = 0 \\ -18x - 18y + 9z = 0 \\ -30x - 30y + 15z = 0 \end{cases}$ et on remarque que les 3 lignes sont des multiples de l'unique équation $2x + 2y - z = 0$.
   On a donc une infinité de solutions, de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$ soit encore $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, pour tous x, y réels.

Le second système est $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+6y-3z &=& 0\\ -18x-21y+9z &=& 0\\ -30x-30y+12z &=& 0\end{array}\right.$ qui équivaut à $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 0\\ 6x+7y-3z &=& 0\\ 5x+5y-2z &=& 0\end{array}\right.$, donc en enlevant la première ligne à la deuxième : $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 0\\ 5x+5y-2z &=& 0\\ 5x+5y-2z &=& 0\end{array}\right.$ et on obtient un système de deux équations à deux inconnues, que l'on résoud en prenant z pour paramètre : $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& z\\ 5x+5y &=& 2z\end{array}\right.$, donc $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& z\\ -5y &=& -4z\end{array}\right.$, $y=4z/5$ et $x=-2y+z=-8z/5+z=-3z/5$, donc $X=\begin{pmatrix}-8z/5\\4z/5\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-8/5\\4/5\\1\end{pmatrix}$: les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont les vecteurs de la forme $\lambda\begin{pmatrix}-8\\4\\5\end{pmatrix}$ pour λ réel.

(e) On calcule un quotient X^3+X^2+3X+5 et un reste $11X+10$. Par conséquent, $X^5=(X^2-X-2)(X^3+X^2+3X+5)+11X+10$, et on peut évaluer cette égalité en A, pour obtenir $A^5=(A^2-A-2I)(A^3+A^2+3A+5I)+11A+10I$.
Comme $A^2-A-2I=0$, on en déduit que $A^5=11A+10$, soit $A^5=\begin{pmatrix}65&76&-23\\-188&-199&109\\-290&-290&164\end{pmatrix}$.

3. On fixe un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé direct, et $\vec{\omega}(\alpha,\beta,\gamma)$.
Vérifier que $\vec{f}:\vec{u}\mapsto\vec{u}\wedge\vec{\omega}$ est linéaire, et déterminer sa matrice.

On a bien, pour tout réel λ et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les égalités $(\lambda\vec{u})\wedge\vec{\omega}=\lambda(\vec{u}\wedge\vec{\omega})$, et $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{\omega}=\vec{u}\wedge\vec{\omega}+\vec{v}\wedge\vec{\omega}$, donc l'application est linéaire. et on peut la représenter par une matrice.

Pour déterminer sa matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, il suffit de calculer en fonction de $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ l'image de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. On calcule donc $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\gamma\\\beta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\\0\\-\alpha\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\\0\end{pmatrix}$.

La matrice est donc $\begin{pmatrix}0&\gamma&-\beta\\-\gamma&0&\alpha\\\beta&-\alpha&0\end{pmatrix}$, elle est antisymétrique (opposée de sa transposée).

4. On fixe un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé direct, et on considère :

- la rotation r d'axe $(O,\vec{k})$ et d'angle θ,
- la symétrie orthogonale s de plan $x+2y-z=0$.

On admet que ces applications sont des applications linéaires.

(a) i. Déterminer les coordonnées des images des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

ii. En déduire celles $r(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$ puis la matrice R de r.

(b) Déterminer l'image de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ par s. En déduire la matrice S de s.

(c) i. Déterminer les valeurs propres de $M=SRS$.

ii. Déterminer $\vec{a}$ non nul tel que $srs(\vec{a})=\vec{a}$ puis deux vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ non colinéaires et orthogonaux à $\vec{a}$.

iii. Ecrire la matrice de srs dans la base $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.
En déduire la nature géométrique de srs.

corrigé succinct :

(a) i. En revenant aux définitions des cosinus et sinus, on voit que $r(\vec{i})=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$, $r(\vec{j})=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$ (faire un dessin dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$...)
D'autre part, $\vec{k}$ est invariant : $r(\vec{k})=\vec{k}$.

ii. On en déduit la matrice $R=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Et par conséquent, les coordonnées de $r(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$ sont données par le calcul $R\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\x\sin\theta+y\cos\theta\\z\end{pmatrix}$.

(b) Le vecteur $\vec{n}(1,2,-1)$ est un vecteur normal au plan, de norme $\sqrt{6}$. Par conséquent l'image d'un vecteur $\vec{u}$ par s est $\vec{u}-2\dfrac{\vec{n}.\vec{u}}{||\vec{n}||^2}\vec{n}$.

Ainsi, $s(\vec{i})=\vec{i}-2(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})/6$. On calcule de même $s(\vec{j})$ et $s(\vec{k})$, et finalement, $S=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&1\\-2&-1&2\\1&2&2\end{pmatrix}$.

(c) Je taperais la correction de la suite de l'exercice si l'un d'entre vous cherche...

exercices pratiques

1. **Google** On souhaite évaluer l'importance de n sites internet en utilisant les liens entrant vers ce site.

   Plus précisément, on utilise une matrice constituée de 0 et de 1 : le coefficient $G_{i,j}$ vaut 1 si le site j contient un lien vers le site i, 0 sinon.

   On prend un exemple très simple avec $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Si l'on évalue l'importance d'un site par le nombre de sites pointant vers lui, quel est le site le plus important dans cet exemple ?

   (b) Si l'on choisit d'évaluer l'importance d'un site par un nombre positif x_i proportionnel à la somme des importances des sites pointant vers lui, quelle équation vérifie le vecteur X de coordonnées x_i ?

   Quelle est, dans le cas ci-dessus, le site le plus important ?

corrigé succinct :