1. On fixe un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct.
   Si $\vec{\omega}(\alpha, \beta, \gamma)$ est un vecteur, vérifier que $\vec{u} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{\omega}$ est linéaire, et déterminer sa matrice, son noyau, son image.

On a bien, pour tout réel λ et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les égalités $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{\omega} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{\omega})$, et $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{\omega} = \vec{u} \wedge \vec{\omega} + \vec{v} \wedge \vec{\omega}$, donc l'application est linéaire. et on peut la représenter par une matrice.

Pour déterminer sa matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il suffit de calculer en fonction de $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ l'image de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. On calcule donc $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\gamma\\\beta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma\\0\\-\alpha\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\\0\end{pmatrix}$.

La matrice est donc $\begin{pmatrix}0 & \gamma & -\beta\\ -\gamma & 0 & \alpha\\ \beta & -\alpha & 0\end{pmatrix}$, elle est antisymétrique (opposée de sa transposée).

2. (a) résoudre $y' = 3y + 2$
   (b) résoudre $y'' + 2y' + 2y = \cos(x)$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
   (c) résoudre $(1 + t)y' + y = 1 + \ln(1 + t)$, avec $y(0) = 4$

(a) voir le TD de S1...on trouve $y = -2/3 + Ae^{3x}$.

(b) voir le TD de S1...on trouve $\frac{4}{5}e^{-x}\lambda\cos(x) + \frac{2}{5}e^{-x}\lambda\sin(x) + (\cos(x) + 2\sin(x))/5$.

(c) a) on résoud l'équation sans second membre $(1 + t)y' + y = 0$, en $y'/y = -1/(1 + t)$ donc $\ln|y|$ et $\ln\frac{1}{1+t}$ sont égaux à une constante près.

Donc finalement $y_H(t) = \frac{C}{1+t}$ avec C réel.

b) On cherche donc (méthode de variation de la constante) une solution de la forme $y_p(t) = \frac{C(t)}{1+t}$. Alors $y_p'(t) = \frac{C'(t)}{1+t} - \frac{C(t)}{(1+t)^2}$ et si on reporte dans l'équation initiale, $C'(t) - \frac{(1+t)C(t)}{(1+t)^2} + \frac{C(t)}{1+t} = 1 + \ln(1 + t)$ donc $C'(t) = 1 + \ln(1 + t)$.

Ainsi (primitive de ln) $C(t) = t+(1+t)\ln(1+t)-(1+t)-1$ donc $C(t) = (1+t)\ln(1+t)$ et finalement, $y_p(t) = \frac{C(t)}{1+t} = \ln(1 + t)$.

c) finalement, les solutions sont de la forme $y(t) = y_H(t) + y_p(t) = \frac{C}{1+t} + \ln(1 + t)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer les suites définies par :
   (a) $u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 1$
   (b) $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 2$
   (c) $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$
   (d) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$
   (e) $u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n = 5$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$.
   (f) $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 3u_n - v_n$, $u_0 = 1$, $v_0 = 5$

corrigé succint :

(a) On trouve successivement $u_1 = 2$, $u_2 = 2^2$, $u_3 = 2^3$, et ainsi (par récurrence) $u_n = 2^n$

(b) 1) on cherche d'abord les suites telles que $v_{n+1} = 3v_n$, on trouve $v_n = C.3^n$ avec C réel.
2) on cherche ensuite une suite u constante vérifiant l'équation de départ : $u = 3u + 2$ donc $u = -1$
3) les solutions sont donc de la forme $u_n = C.3^n - 1$
4) on peut alors (et seulement maintenant) utiliser la condition initiale : $u_0 = 2 = C - 1$, donc $C = 3$.
Ainsi, $u_n = 3.3^n - 1 = 3^{n+1} - 1$

(c) On écrit l'équation caractéristique $X^2 = X + 1$ soit $X^2 - X - 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et de solutions $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Alors les suites solutions sont de la forme $u_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.
Ici on peut utiliser les conditions initiales : $u_0 = 0$ donc on a $A + B = 0$, $A = -B$.
Et comme $u_1 = 2$ on a $A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2$ donc $A\sqrt{5} = 2$, $A = 2/\sqrt{5}$. Et comme on sait que $B = -A$, $B = -2/\sqrt{5}$.
Ainsi, finalement $u_n = \frac{2}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$

(d) On écrit l'équation caractéristique $X^2 = 2X - 1$ soit $X^2 - 2X + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 0$, et de solution double 1.
Alors les suites solutions sont de la forme $u_n = A1^n + Bn1^n = A + Bn$.
Comme $u_0 = 1$ on a $A = 1$. Comme $u_1 = -1$ on a $A + B = -1$. Ainsi $A = 1$ et $B = -2$, ainsi $u_n = 1 - 2n$

(e) 1) L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2$ a pour solution $r = -1 \pm i$. On met ces racines sous forme exponentielles $\rho e^{i\theta}$ avec ici $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta = \pm 3\pi/4$ (module et argument).
Donc on peut écrire $u_n = \sqrt{2}^n(a\cos(3n\pi/4) + b\sin(3n\pi/4))$, a, b réels.
2) Par ailleurs, 1 est une suite constante solution qui vérifie la relation.

3) Ainsi, $u_n = 1 + \sqrt{2}^n(a\cos(3n\pi/4) + b\sin(3n\pi/4))$.
4) En utilisant les conditions initiales on voit que : $1 + a = 0$, $1 - a + b = 2$ donc $a = -1$, $b = 0$.

Ainsi, $u_n = 1 - \sqrt{2}^n \cos(3n\pi/4)$.

(f) On peut utiliser deux méthodes :
première méthode : l'idée est de "remplacer" deux relations d'ordre 1 avec u et v "mélangées" par une seule relation avec uniquement u, mais d'ordre 2, et une autre avec v.
Pour cela on écrit que pour tout n : $u_{n+2} = u_{n+1} + v_{n+1}$ (c'est la première relation de l'énoncé mais avec $n+1$ à la place de n).
Puis on remplace v_{n+1} par la deuxième relation ($v_{n+1} = 3u_n - v_n$) on obtient : $u_{n+2} = u_{n+1} + (3u_n - v_n) = u_{n+1} + 3u_n - v_n$,
et enfin on remplace v_n par la première relation de l'énoncé ($v_n = u_{n+1} - u_n$), et ainsi : $u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} = 2u_n$ (le u_{n+1} s'élimine ici, ça ne serait pas forcément le cas avec un autre exercice et ne change pas, sur le principe, la fin de la résolution).
Finalement on obtient une relation d'ordre 2, $u_{n+2} - u_n = 0$. On peut alors trouver u_n en utlisant le fait que $u_0 = 1$, $u_1 = u_0 + v_0 = 6$, c'est un exercice comparable aux exercices précédents de la feuille. Après calcul et simplification : $u_n = 2^{n+1} - (-2)^n$.
Puis on refait exactement pareil pour v_n : c'est aussi long, et on obtient $v_n = 2^{n+1} + 3(-2)^n$.
deuxième méthode :
On peut écrit sous forme matricielle les relations de l'énoncé :
$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
On peut donc écrire successivement :
$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$
Il suffit donc de calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^n$ pour conclure !
Le polynôme caractéristique de cette matrice est $\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 3 & -1-X \end{vmatrix} = X^2 - 4$, et les valeurs propres sont 2 et -2.
Les vecteurs propres associés à 2 sont les (x, x), $x \in \mathbb{R}$.
Les vecteurs propres associés à -2 sont les $(x, -3x)$, $x \in \mathbb{R}$.
On peut donc poser $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et la matrice de départ est diagonalisable, avec $P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1}$.
Il reste donc à calculer P^{-1} (formule vue en S2 pour les matrices 2×2) : $P^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
et finir le calcul par deux multiplications de matrices 2×2...et on obtient $A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3.2^n + (-2)^n & 2^n - (-2)^n \\ 3.2^n - 3(-2)^n & 2^n - 3(-2)^n \end{pmatrix}$ et finalement $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3.2^n + (-2)^n & 2^n - (-2)^n \\ 3.2^n - 3(-2)^n & 2^n + 3(-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - (-2)^n \\ 2^{n+1} + 3(-2)^n \end{pmatrix}$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
(b) En déduire les valeurs propres de A.
(c) En déduire les vecteurs propres de A.
(d) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
(e) En déduire l'expression de A^n.
(f) Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& 4x + 3z \\ y' &=& -2x + 2y - 3z \\ z' &=& -2x - z \end{array}\right.$.

corrigé succint :

(a) C'est $\begin{vmatrix} 4-X & 0 & 3 \\ -2 & 2-X & -3 \\ -2 & 0 & -1-X \end{vmatrix}$, soit après calcul $-X^3 + 5X^2 - 8X + 4$.
(b) La factorisation du polynôme caractéristique est $-(X-1)(X-2)^2$, donc les valeurs propres sont 1 et 2.
(c) Pour trouver les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, on résoud le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4x + 3z &=& x \\ -2x + 2y - 3z &=& y \\ -2x - z &=& z \end{array}\right.$, qui se ramène facilement à $\left\{\begin{array}{rcl} x + z &=& 0 \\ 2x - y + 3z &=& 0 \end{array}\right.$, donc on trouve comme solutions tous les vecteurs de la forme $x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Pour trouver les vecteurs propres associés à la valeur propre 2, on résoud le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4x + 3z &=& 2x \\ -2x + 2y - 3z &=& 2y \\ -2x - z &=& 2z \end{array}\right.$, qui se ramène facilement à l'équation $2x + 3z = 0$, donc on trouve comme solutions tous les vecteurs de la forme $x\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(d) Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (par exemple) forment une base car le déterminant de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ vaut 1 (développement selon la dernière colonne...), donc la matrice est diagonalisable, et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) On a donc $A = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}$, donc $A^n = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}P^{-1}$.

Pour calculer P^{-1} on résoud le système $\left\{\begin{array}{lcl} a &=& x+3y\\ b &=& -x+z\\ c &=& -x-2y\end{array}\right.$, ce qui donne $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2a-3c\\ y &=& a+c\\ z &=& -2a+b-3c\end{array}\right.$, donc $P^{-1} = \begin{pmatrix}-2&0&-3\\1&0&1\\-2&1&-3\end{pmatrix}$

Finalement, $A^n = \begin{pmatrix}-2+3.2^n & 0 & -3+3.2^n\\ 2-2^{n+1} & 2^n & 3-3.2^n\\ 2-2^{n+1} & 0 & 3-2^{n+1}\end{pmatrix}$

(f) Il s'agit de résoudre $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

On définit X, Y et Z par la relation $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$, soit aussi $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

remarque 1 : Il ne sera nulle part nécessaire ici d'expliciter le calcul de X, Y, Z en fonction de x, y, z (ce qui serait faisable en utilisant le calcul de P^{-1} effectué à la question précédente).

remarque 2 : P est constante, la dérivée de $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est $P^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix}$.

Alors en multipliant par P^{-1} le système devient $P^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$, soit $X' = X$, $Y' = 2Y$, $Z' = 2Z$.

Les solutions sont donc $X = \alpha e^t$, $Y = \beta e^{2t}$ et $Z = \gamma e^{2t}$, et par conséquent, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\alpha e^t\\ \beta e^{2t}\\ \gamma e^{2t}\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha e^t+3\beta e^{2t}\\ -\alpha e^t+\gamma e^{2t}\\ -\alpha e^t-2\beta e^{2t}\end{pmatrix}$, α, β et γ étant des réels quelconques (on pourrait les déterminer si on donnait 3 conditions initiales pour le système d'équations différentielle, par exemple les valeurs en 0 des fonctions que l'on cherche x, y et z).

5. On attache deux ressorts identiques, de longueur au repos L, de raideur k et de masses négligeables à trois points de masses identiques m.
On suppose que les seules forces exercées sur les points sont les forces de rappel des ressorts.
On fixe un repère horizontal avec un vecteur unitaire $\vec{\imath}$ dirigé vers la droite, et on note x_1, x_2 et x_3 les abscisses des points, et on définit les variables $u_1 = x_1 + L$, $u_2 = x_2$, $u_3 = x_3 - L$.

(a) Déterminer le système d'équations différentielles que vérifient les fonctions u_1, u_2, u_3.

(b) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice correspondante.

(c) Interpréter physiquement.

<u>corrigé succint :</u>

(a) La force appliquée sur l'objet de gauche vaut $k((x_2 - x_1) - L)) = k(x_2 - (x_1 + L)) = k(-u_1 + u_2)$.
Ainsi en appliquant le PFD à cet objet, $u_1'' = -k/m\, u_1 + k/m\, u_2$.
En l'appliquant de même aux deux autres objets, on trouve le système
$\begin{pmatrix}u_1''\\u_2''\\u_3''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k/m & k/m & 0\\ k/m & -2k/m & k/m\\ 0 & k/m & -k/m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$

b)Le polynôme caractéristique de cette matrice $\begin{vmatrix}-k/m-X & k/m & 0\\ k/m & -2k/m-X & k/m\\ 0 & k/m & -k/m-X\end{vmatrix}$ vaut, en remplaçant L_1 par $L_1 + L_2 + L_3$ puis en mettant $-X$ en facteur sur la première ligne :
$-X\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ k/m & -2k/m-X & k/m\\ 0 & k/m & -k/m-X\end{vmatrix}$
Puis en enlevant k/m fois la première ligne à la seconde :
$-X\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -3k/m-X & 0\\ 0 & k/m & -k/m-X\end{vmatrix}$
soit finalement $-X(-X-3k/m)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & k/m & -k/m-X\end{vmatrix}$ et en développant selon la deuxième ligne : $-X(-X-3k/m)(-X-k/m)$.
Les valeurs propres sont donc 0, $-k/m$ et $-3k/m$.
Elles sont associées respectivement aux vecteurs propres $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.
On a 3 valeurs propres différentes donc la matrice est diagonalisable. Si on pose $P = \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$ la matrice dans la base canonique des vecteurs propres, alors $P^{-1}AP = D$ avec A la matrice du système définie plus haut, et D la matrice diagonale de coefficients 0, $-k/m$ et $-3k/m$.

(b) Introduisons les fonctions U_1, U_2, U_3 par $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{pmatrix}$, alors $P^{-1}\begin{pmatrix}u_1''\\u_2''\\u_3''\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}-k/m & k/m & 0\\ k/m & -2k/m & k/m\\ 0 & k/m & -k/m\end{pmatrix}PP^{-1}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ donc

$$\begin{pmatrix} U_1'' \\ U_2'' \\ U_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k/m & 0 \\ 0 & 0 & -3k/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix},$$

ce qui correspond aux 3 équations différentielles :
$U_1'' = 0$, de solutions $U_1 = (at + b)$
$U_2'' = -k/mU_2$, de solutions $U_2 = c\cos(\sqrt{k/mt}) + d\sin(\sqrt{k/mt})$
$U_3'' = -3k/mU_3$, de solutions $U_3 = e\cos(\sqrt{3k/mt}) + f\sin(\sqrt{3k/mt})$
Et ensuite $u_1 = U_1 - U_2 + U_3$
$u_2 = U_1 - 2U_3$
$u_3 = U_1 + U_2 + U_3$
On obtient trois solutions fondamentales :

— si seule U_1 est non nulle :
mouvement de translation rectiligne uniforme de l'ensemble (sans déformation des ressorts)
— si seule U_2 est non nulle :
oscillations à la pulsation $\sqrt{k/m}$ et en opposition de phase des deux points extérieurs, le point 2 restant fixe
— si seule U_3 est non nulle :
oscillations en phase des points extérieurs à pulsation $\sqrt{3k/m}$, le point 2 oscillant en opposition de phase et amplitude double.

6. (Automatique...) Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{K}{1 + \dfrac{2z}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $K = 3/2$, $\omega_0 = \sqrt{2}$, $z = 3\sqrt{2}/4$.

corrigé succint : Le dénominateur vaut $p^2/2 + 3p/2 + 1$, de discriminant $1/4$ et de racines $p_1 = -4$ et $p_2 = -2$.
Donc la fraction vaut $\dfrac{3/2}{(p+4)(p+2)/2} = \dfrac{3}{(p+2)(p+4)}$, de la forme $\dfrac{a}{p+2} + \dfrac{b}{p+4}$ avec $a = 3/2$ et $b = -3/2$.

7. (Supoptique 2015) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_{\mathbb{R}_+} \dfrac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^{1/2} \dfrac{x}{1-x^4}\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^1 \dfrac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{d}x$

(e) si $a > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ $\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega x - a|x|}\mathrm{d}x$

(f) $\int\int_{[1,a]\times[1,b]} xye^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

corrigé succint :

(a) en posant $y = x^2$: $\pi/4$
(b) en posant $y = x^2$: $\ln(5/3)/4$
(c) en posant $y = e^x$: $\ln(2) - \ln(1 + 1/e)$
(d) par intégration par parties : $\pi/4 - \ln(2)/2$
(e) L'intégrale vaut $\int_0^{+\infty} e^{(-2\pi i\omega - a)x}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 e^{(-2\pi i\omega + a)x}\mathrm{d}x$, on peut primitiver chaque exponentielle, la limite en les infinis des primitives est nulle et il ne reste que les valeurs en 0. Après simplifications on trouve l'intégrale égale à $\dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2\omega^2}$s
(f) On peut facilement séparer en deux les intégrales : $[xe^x - e^x]_1^a[ye^y - e^y]_1^b$

8. Calculer la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal.

corrigé succint : On veut donc calculer $L(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(x)/x\mathrm{d}x$.
On dérive par rapport à p, la dérivée de $L(p)$ est l'intégrale de la dérivée par rapport à p :
$L'(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(x)\mathrm{d}x$, donc $L'(p) = -\mathrm{Im}(\int_0^{+\infty} e^{-px}e^{ix}\mathrm{d}x)$,
$L'(p) = -\mathrm{Im}(\int_0^{+\infty} e^{(-p+i)x}\mathrm{d}x)$,
$L'(p) = -\mathrm{Im}[e^{(-p+i)x}/(-p+i)]_0^{+\infty} = -\mathrm{Im}\dfrac{0-1}{-p+i} = \mathrm{Im}\dfrac{-p-i}{p^2+1} = -\dfrac{1}{1+p^2}$.
Ainsi en primitivant, $L(p) = -\arctan(p) + c$, où c est constante.
Si p tend vers l'infini, la fonction intégrée tend vers 0, donc (on admet, il faudrait en savoir plus pour être rigoureux) que $L(p)$ tend vers 0 aussi.
Donc $0 = -\pi/2 + c$, et donc $c = \pi/2$.
On a donc $L(p) = \pi/2 - \arctan(p)$.
On a au passage montré que $L(0) = \int_0^{+\infty} \sin(x)/x\mathrm{d}x = \pi/2$

9. On considère $f(x) = (\int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \dfrac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
Montrer que $f' + g' = 0$, en déduire la valeur de $f + g$ puis la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t$.

corrigé succint :
Pour dériver f, on a "juste" besoin de savoir dériver une intégrale par rapport à sa borne supérieure x (cf terminale : la dérivée par rapport à x de $\int_0^x u(t)\mathrm{d}t$ est $u(x)$) et de savoir dériver le carré d'une fonction (la dérivée de v^2 est $2vv'$) :
$f'(x) = 2\exp(-x^2)\int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t$
Et pour dériver g, de dériver par rapport à x sous l'intégrale : la dérivée de g par rapport à x est l'intégrale de la dérivée par rapport à x de $\dfrac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}$.
Donc $g'(x) = \int_0^1 -2x\exp(-x^2(1+t^2))\mathrm{d}t$
On peut écrire alors $g'(x) = -2x\exp(-x^2)\int_0^1 \exp(-x^2t^2)\mathrm{d}t$, et en posant $y = xt$, $g'(x) = -2\exp(-x^2)\int_0^x \exp(-y^2)$.

On constate donc que $f' + g' = 0$. Donc $f + g$ est constante. Mais $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan(1) = \pi/4$.

Donc $f(x) + g(x) = \pi/4$ pour tout x.

En déterminant les limites en l'infini : $f(x)$ tend vers $(\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t)^2$ et $g(x)$ tend vers 0 car la fonction intégrée tend vers 0.

Donc finalement, l'intégrale de Gauss vaut $\sqrt{\pi}/2$.

10. Déterminer la nature des séries :

(a) $\sum \frac{1}{1+n^2}$

(b) $\sum e^{-n^2}$

(c) $\sum \ln(1 + 1/n^2)$

(d) $\sum n^2 e^{-n/2}$

(e) $\sum (-1)^n/\sqrt{n}$

(f) $\sum \ln(1 + (-1)^n/n)$

(g) $\sum \frac{(-1)^n \sin(n)}{n\sqrt{n}}$

corrigé succint :

(a) $\frac{1}{1+n^2}$ est positif et équivalent à $1/n^2$, terme général d'une série convergente : par équivalence, la série converge. (on peut aussi MAJORER par $1/n^2$, ou comparer à l'intégrale de $1/(1+x^2)$).

(b) Pour e^{-n^2} : il n'y a pas d'équivalent plus simple. On peut comparer à l'intégrale de e^{-x^2} si on se rappelle en avoir étudié la nature en S2...Sinon le plus simple est une majoration très grossière mais efficace : $0 \le e^{-n^2} \le e^{-n}$, car $e^{-n} = (1/e)^n$ est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 : elle converge et donc par comparaison, $\sum e^{-n^2}$ converge aussi.

(c) $\ln(1+1/n^2)$ est positif et est équivalent à $1/n^2$, terme général d'une série convergente, donc la série converge.

On pourrait aussi "remarquer" qu'une primitive de $\ln(1 + 1/x^2)$ est $x\ln(x^2 + 1) + 2\arctan(x) - 2x\ln(x)$ et essayer d'utiliser une comparaison avec une intégrale. En période de confinement de durée indéfinie, c'est une piste qui peut occuper.

(d) On peut écrire : $n^2e^{-n/2} = (n^2e^{-n/4})e^{-n/4}$. Comme $n^2e^{-n/4}$ tend vers 0, pour n assez grand on a la majoration $n^2e^{-n/2} \le e^{-n/4}$, et $e^{-n/4} = (e^{-1/4})^n$, terme général d'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Donc par comparaison, la série converge.

(e) La série $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ est une série alternée avec $1/\sqrt{n}$ qui est décroissante et qui tend vers 0 : la série converge.

(f) Pour $\sum \ln(1 + (-1)^n/n)$ on utilise un développement limite $\ln(1 + x) = x - x^2/2 + ..$ si x tend vers 0, donc ici $\sum \ln(1 + (-1)^n/n) = (-1)^n/n + a_n$ où a_n est une suite équivalente à $-1/(2n^2$. La première série est une série alternée convergente, la seconde converge par équivalent, donc la série étudiée, somme de deux séries convergentes, converge.

(g) On peut étudier la convergence absolue de $\sum \frac{(-1)^n \sin(n)}{n\sqrt{n}}$: la série des valeurs absolues est $\sum \frac{|\sin(n)|}{n\sqrt{n}}$, le terme général est positif et inférieur $1/n^{3/2}$, série de Riemann convergente. La série est donc absolument convergente (par comparaison) donc convergente.

11. Convergence et somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

corrigé succint :

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$, donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2})$, donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}(1 + 1/2 + \sum_{n=3}^{N}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) - 1/(N+1) - 1/(N+2))$ et comme la somme au centre de l'expression vaut 0, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} = 3/2 - 1/(N+1) - 1/(N+2)$, qui tend vers 3/2.

Ainsi, la série converge et sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ vaut $3/2$.

12. Déterminer, en fonction des valeurs de α et de β, la nature de la série de terme général $\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$.

corrigé succint :

Si $\alpha < 0$, la série diverge grossièrement. Si $\alpha = 0$ aussi, par comparaison avec par exemple la série des $1/n$ qui diverge.

Si $\alpha > 1$, on peut majorer (à partir d'un certain rang au moins) le terme général par le terme général d'une série de Riemann convergente (prendre $1/n^{\alpha'}$ avec $1 < \alpha' < \alpha$), et constater que la série converge.

Si $0 < \alpha < 1$, on peut minorer le terme général par le terme général d'une série de Riemann divergente (prendre $1/n^{\alpha'}$ avec $\alpha < \alpha' < 1$), et constater que la série diverge.

Si $\alpha = 1$ et $\beta \ge 0$, le terme général est minoré par $1/n$ qui est le terme général d'une série divergente, la série diverge.

Si $\alpha = 1$ et $\beta < 0$: on pose $f(x) = \ln(x)^\beta/x$ (pour $x > 1$). Alors $f'(x) = (\beta - \ln(x))(\ln(x))^{\beta-1}/x^2$ est du signe de $\beta - \ln(x)$ donc négatif pour x assez grand. Comme de plus $f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$, on sait que la série et l'intégrale de $f(x)$ en $+\infty$ sont de même nature.

Etudions $\int^X \frac{\ln^\beta(x)}{x}\mathrm{d}x$. On pose $y = \ln(x)$. Alors $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/x$ et donc l'intégrale devient $\int^{\ln(X)} y^\beta \mathrm{d}y$. Si $\beta = 1$, l'intégrale diverge (primitive en $\ln(y)$ qui tend vers 0 à l'infini). Si $\beta \ne -1$ une primitive est $y^{\beta+1}/(\beta+1)$ donc l'intégrale converge si et seulement si $\beta < 1$.

13. On note, pour $n \geq 1$, $a_n = \ln(1 + 1/n)$ et $u_n = 1/n - a_n$.
   (a) Montrer que $\sum_{n=1}^{N} a_n = \ln(N+1)$
   (b) Montrer que la série $\sum u_n$ converge
   (c) En déduire que $\sum_{n=1}^{N} 1/n = \ln(N) + \gamma + ...$, avec γ un réel strictement positif.

corrigé succint :

(a) On remarque que $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$, donc $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) = \sum_{n=2}^{N+1} \ln(n) - \sum_{n=1}^{N} \ln(n) = \ln(N+1) - \ln(1) = \ln(N+1)$

(b) Si x tend vers 0, $\ln(1+x) = x - x^2/2 + ...$ donc u_n équivaut à $1/(2n^2)$, et par équivalence, la série des u_n converge

(c) $\sum_{n=1}^{N} 1/n = \sum_{n=1}^{N} (1/n - a_n) + \sum_{n=1}^{N} a_n$ donc $\sum_{n=1}^{N} 1/n - \ln(N) = \sum_{n=1}^{N} u_n + (\sum_{n=1}^{N} a_n) - \ln(N) = \sum_{n=1}^{N} u_n + \ln(1 + 1/N)$, et donc si on note γ la somme de la série des u_n, le résultat est prouvé.

14. Une crue centennale est définie comme une crue qui a, chaque année, une chance sur 100 de se produire.
   a) Quelle est la probabilité d'observer (au moins) une crue centennale au XXIème siècle ?
   b) Quelle est la période moyenne entre deux crues centennales ?

a) C'est 1 moins la probabilité de l'évènement complémentaire, "aucune crue ne se produit sur un siècle" : $1 - (99/100)^{100} \simeq 64\%$

b) La période moyenne vaut $1 * (1/100) + 2 * (99/100) * (1/100) + 3 * (99/100)^2 * (1/100) + ... = f(99/100)/100$ en posant $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$.

La série entière qui définit $f(x)$ est de rayon de convergence 1 et une primitive de $f(x)$ est $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = 1/(1-x) - 1$ (série géométrique), donc $f(x) = 1/(1-x)^2$, donc $f(99/100) = 1/(1 - 99/100)^2 = 100^2$ et la période moyenne entre deux crues centennales est donc de 100 ans.

15. Ecrire, pour $|x| < 1$, $\arctan(x)$ comme la somme d'une série entière.

corrigé succint :

La dérivée de $\arctan(x)$ est $\dfrac{1}{1+x^2}$ dont le développement en série entière est (on reconnaît une série géométrique de raison $-x^2$) : $\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Donc en primitivant $\arctan(x) = \arctan(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

16. On rappelle que pour une loi de Poisson de paramètre λ,
$p_k = P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.
Démontrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.
Démontrer que $E(X) = \lambda$ et $\text{Var}(X) = \lambda$.

corrigé succint :

1) $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$ (on reconnaît le développement en série entière de l'exponentielle de λ).

2) L'espérance de X vaut $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Dans cette série, le terme d'indice $k = 0$ vaut 0 (car $0! = 1$), donc

$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda}$, donc

$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}\lambda}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$.

Si on réindexe la somme (on pose $n = k - 1$) : $E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!}$, et on reconnaît encore le développement en série entière de e^{λ}...donc $E(X) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$.

3) La variance vaut $E(X^2) - E(X)^2 = (\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}) - \lambda^2$.

Indication : on peut écrire $k^2 = k(k-1) + k$ et donc

$\text{Var}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + E(X) - \lambda^2$. Pour calculer la somme on peut procéder comme pour l'espérance...mais en décalant les indices de deux et non de un.

Le résultat final doit bien sûr donner λ.

17. Soient X et Y des variables indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Donner la loi de $X + Y$.

$p(X + Y = k) = \sum_{l=0}^{k} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!} \dfrac{e^{-\mu}\mu^{k-l}}{k!}$ soit $\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k$: loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

18. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, calculer $E(\dfrac{1}{X+1})$.

C'est $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k+1)!}$ soit $\dfrac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$ et en réindexant (décalage de 1 des indices) : $\dfrac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda} (\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} - 1)$ soit encore $\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^{\lambda} - 1) = \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$.

19. Si X suit une loi géométrique de paramètre p (soit pour tout entier positif k, $p(X = k) = (1-p)^{k-1} p$), calculer $E(1/X)$.

C'est $\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p/k = \dfrac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(1-p)^k}{k} = -\dfrac{p\ln(p)}{1-p}$ (on reconnaît le développement en série entière de $\ln(1-x)$ avec $x = 1 - p$)

20. On fixe θ réel et on définit quand c'est possible $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n$. Déterminer une expression de $f(x)$ pour $|x| < 1$.

corrigé succint : Si $|x| < 1$, la série converge absolument donc converge.

$f(x)$ est la partie réelle de $\sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{i\theta})^n = \dfrac{1}{1 - xe^{i\theta}} = \dfrac{1}{(1 - x\cos(\theta)) + ix\sin(\theta))}$.

On trouve finalement $f(x) = \dfrac{1 - x\cos\theta}{1 + x^2 - 2x\cos\theta}$.

21. On considère une chaîne de fabrication. La probabilité qu'une pièce produite soit défectueuse vaut p.

On note Y le nombre de pièces produite sur une période de une heure. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.

On note X le nombre de pièces défectueuses produite sur une période de une heure.

a) Déterminer $p(X = k|\ Y = l)$.

b) En déduire la loi de X.

a) On reconnaît une loi binomiale de paramètres l et p.

b) L'ensemlbe des $Y = l$ pour $l \in \mathbb{N}$ forme un système complet d'évènements, donc $p(X = k) = \sum_{l\ \in \mathbb{N}} p(X = k|Y = l) p(Y = l) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k} \lambda^l \exp(-\lambda)/l!$.

Mais $\binom{l}{k}$ est nul si $k > l$, et donc $p(X = k) = \sum_{l \geq k} \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k} \lambda^l \exp(-\lambda)/l!$.

En sortant de la somme des termes constants (ne dépendant pas de l) on a donc $p(X = k) = \dfrac{\exp(-\lambda)(\lambda p)^k}{k!} \sum_{l=k}^{+\infty} \dfrac{(1-p)^{l-k}\lambda^{l-k}}{(l-k)!}$.

On peut réindexer la somme à partir de 0 en posant $m = l - k$, en $\sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{(1-p)^m \lambda^m}{m!}$.

Ainsi, $p(X = k) = \dfrac{\exp(-\lambda)(\lambda p)^k}{k!} \exp((1-p)\lambda) = \dfrac{\exp(-p\lambda)(\lambda p)^k}{k!}$: on reconnaît une loi de Poisson de paramètre λp.