1. **Calcul approché d'intégrales par la méthode des trapèzes :**

   Pour approcher numériquement la valeur de l'intégrale $\int_a^b f$ d'une fonction continue f, on peut utiliser la méthode des trapèzes.

   Elle consiste à répartir régulièrement $n+1$ nombres $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ sur l'intervalle $[a, b]$, puis à additionner les aires des trapèzes de largeur $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteurs $f(x_i)$ à gauche, $f(x_{i+1})$ à droite.

   On approche donc l'intégrale par $\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$.

   (a) Écrire une fonction `f` qui prend pour paramètre un réel x et renvoie la valeur $\ln(1+x)$.

   (b) Écrire la fonction `trapezes` qui prend pour paramètres deux réels a et b, un entier n, et renvoie la valeur approchée de $\int_a^b f$ obtenue par la méthode des trapèzes à $n+1$ points.

   (c) Savez-vous calculer la valeur exacte de $\int_0^1 f$? (la réponse devrait être oui...) Comparez-la aux valeurs obtenues pour $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$.

2. **Séries de Fourier :**

   Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux, on appelle **coefficients de Fourier** de f les nombres

   $$a_p(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(pt)\,dt \quad \text{et} \quad b_p(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(pt)\,dt.$$

   On souhaite vérifier graphiquement que les sommes de Fourier

   $$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{n}(a_p\cos(pt) + b_p\sin(pt))$$

   « se rapprochent » de f quand n augmente.

   (a) Ecrire la fonction `f` qui a un réel double associe son cosinus redressé double alternance.

   (b) Ecrire la fonction `a` qui prend pour paramètre un entier `p` et renvoie $a_p(f)$, calculé en utilisant une méthode des trapèzes à 50 pas.

   (c) Ecrire la fonction `b` qui prend pour paramètre un entier `p` et renvoie $b_p(f)$, calculé en utilisant une méthode des trapèzes à 50 pas.

   (d) On souhaite tracer simultanément la fonction f et quelques-unes de ses sommes de Fourier sur un intervalle de deux périodes $[-2\pi, 2\pi]$:

      i. créer une liste `X` avec 200 valeurs d'abscisses régulièrement réparties sur cet intervalle,

      ii. créer la liste `Y` avec les 200 valeurs correspondantes de la fonction f,

      iii. demander à l'utilisateur une valeur entière `n`,

      iv. placer dans une liste `Z` les valeurs correspondantes de la fonction $S_n(f)$,

      v. tracer sur un même graphique les courbes de f et $S_n(f)$.

      Tester pour plusieurs valeurs de n entre 5 et 100. Qu'observe-t-on ?

   (e) Procéder de même avec le carré de la fonction cosinus redressé simple alternance.

   (f) Procéder de même avec la fonction f la fonction impaire, 2π-périodique et qui vaut 0 en 0 et $\dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]0, \pi]$.